

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МОНОКРИСТАЛІВ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Копп Михайло Йосипович

УДК 532.517:533.951

532.546

ДИСЕРТАЦІЯ
ГЕНЕРАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СТРУКТУР В ГІДРОДИНАМІЧНИХ
СЕРЕДОВИЩАХ ПІД ВПЛИВОМ ЗОВНІШНІХ ПОЛІВ

01.04.02 – теоретична фізика

природничі науки

Е5 - фізика та астрономія (0533)

Подається на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання
ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело.

_____ М.Й. Копп

Харків – 2025

АНОТАЦІЯ

Копн М.Й. Генерація нелінійних структур в гідродинамічних середовищах під впливом зовнішніх полів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – «теоретична фізика» (природничі науки, Е5 – фізика і астрономія (0533)). – Інститут монокристалів НАН України, Харків, 2025.

У дисертації розвивається як лінійна, так і нелінійна теорія виникнення дисипативних структур у різних гідродинамічних середовищах, таких як газ, рідина та плазма, під впливом зовнішніх полів. Під зовнішніми полями розуміють дію як макроскопічних сил поля тяжіння, сили Коріоліса і сили Лоренца, а й зовнішньої дрібномасштабної сили для моделювання турбулентності. Розглянуті випадки, коли в рідинах містяться частинки нанорозмірного масштабу. Вивчено механізми генерації структур типу конвективних осередків у рідинах, що містять деяку концентрацію живої (активної) матерії - мікроорганізмів з різними видами таксису.

Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатка. У вступі обґрунтовано вибір теми дослідження, сформульовано його мету і завдання, визначено об'єкт і предмет дослідження, а також перелічено використані методи. Крім того, наведено відомості про наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, а також дані про їх апробацію.

У першому розділі розвинено теорію вихрового динамо у середовищах, що обертаються з постійною кутовою швидкістю. За допомогою методу багатомасштабних асимптотичних розкладів отримано замкнені рівняння нелінійного вихрового динамо в середовищах, що обертаються, під дією дрібномасштабної зовнішньої сили. Показано, що на лінійній стадії генерація великомасштабних

вихрових структур (ВВС) відбувається внаслідок розвитку великомасштабної нестійкості α -ефекту. Ця нестійкість виникає через дію сили Коріоліса та зовнішньої сили. Доведено що у випадку неспіральної сили, необхідною умовою розвитку нестійкості є відхилення осі обертання від вертикального напрямку. Виявлено нові стаціонарні розв'язки у вигляді локалізованих вихрових структур: спіральних кінків, нелінійних хвиль Бельтрамі та кінків з профілем швидкості у вигляді перегину. У підрозділах 1.3-1.5 побудовано теорію нелінійного вихрового динамо в стратифікованій сухій та вологій атмосфері, що обертається. Визначено режими лінійної генерації великомасштабних вихрових збурень та встановлено області (критерії) виникнення цієї нестійкості залежно від параметрів обертання D і стратифікації \tilde{R} (сухої та вологої). Врахування ефектів стратифікації в середовищі, що обертається (температурний підігрів та додаткове джерело конденсаційного тепловиділення), призводить до суттєвого посилення генерації великомасштабних збурень. У підрозділі 1.6 побудовано теорію параметричної генерації великомасштабних вихрових структур (ВВС) в стратифікованій нанорідині, що похило обертається. Виявлено новий ефект генерації ВВС у нанорідині (без градієнта температури), пов'язаний зі збільшенням концентрації наночастинок. Зі зростанням частоти ω_0 та хвилового числа k_0 зовнішнього параметричного впливу параметричного впливу зовнішньої сили ефективність генерації ВВС зменшується. Цей ефект відкриває можливості для керування процесом генерації ВВС. На нелінійній стадії зростання ВВС отримано локалізовані розв'язки у вигляді нелінійних хвиль і кінка.

У другому розділі побудовано самозгоджену теорію магніто-вихрового динамо в середовищах, що обертаються, під дією зовнішньої дрібномасштабної сили. У підрозділі 2.1 встановлено, що на лінійній стадії генерація вихрових структур відбувається за рахунок розвитку нестійкості гідродинамічного (ГД) α -ефекту, а генерація магнітних структур — через нестійкість магнітогідродинамічного (МГД) α -ефекту. Обидва типи нестійкостей зумовлені спільною ді-

єю дрібномасштабної зовнішньої сили та сили Коріоліса. Отримано стаціонарні розв'язки, що описують магнітні структури у вигляді періодичних нелінійних хвиль і кінків у середовищі з кінцевою електропровідністю. Для середовищ із дуже низькою електропровідністю знайдено нелінійні стаціонарні розв'язки, які описують вихрові структури у вигляді спіральних кінків. У підрозділі 2.2 отримано систему нелінійних рівнянь для магніто-вихрового динамо в електропровідній рідині, що обертається з нахилоною віссю, під дією зовнішньої неспіральної сили. Встановлено, що генерація великомасштабних вихрових структур (ВВС) і великомасштабних магнітних полів (ВМП) на лінійній стадії виникає внаслідок нестійкості типу α -ефекту, причому необхідною умовою для її розвитку є відхилення вектора кутової швидкості обертання Ω від вертикальної осі OZ . Доведено існування великомасштабних регулярних і хаотичних вихрових та магнітних полів у стаціонарному режимі. У підрозділі 2.3, у межах лінійної теорії багатомасштабних асимптотичних розкладів, отримано рівняння еволюції для великомасштабних збурень у температурно-стратифікованому електропровідному середовищі з дрібномасштабною спіральністю поля швидкості та магнітного поля. Показано, що за відсутності дрібномасштабної спіральності магнітного поля генерація ВВС і ВМП відбувається незалежно одна від одної внаслідок розвитку нестійкостей гідродинамічного (ГД) і магнітогідродинамічного (МГД) α -ефектів. Проведено якісні оцінки лінійної стадії великомасштабної нестійкості для сонячних умов, які демонструють добре узгодження характерних масштабів і часових інтервалів виникнення гідродинамічних структур із тими, що були виявлені експериментально. У підрозділі 2.4 отримано замкнену самоузгоджену систему нелінійних рівнянь, що описує нелінійну стадію зростання ВВС і ВМП у стратифікованому електропровідному середовищі. Продемонстровано можливість існування великомасштабних стаціонарних хаотичних вихрових і магнітних структур, а також регулярних стаціонарних магнітних структур типу нелінійної хвилі, кінка і солітона. У підрозділі

2.5 виведено замкнену систему нелінійних рівнянь для великомасштабних вихрових і магнітних збурень у стратифікованому середовищі, що обертається з нахиленою віссю, під дією дрібномасштабної неспіральної зовнішньої сили. Встановлено, що за відсутності зовнішнього магнітного поля генерація ВВС і ВМП відбувається за рахунок розвитку нестійкості типу ГД і МГД α -ефекту, а за його наявності темпи зростання вихрових і магнітних великомасштабних збурень збігаються. При цьому «слабке» зовнішнє магнітне поле не перешкоджає генерації великомасштабних вихрових і магнітних збурень, а «сильне» – пригнічує їх. У температурно-стратифікованих середовищах великомасштабні нестійкості типу α -ефекту реалізуються при малих числах Релея Ra . Доведено існування великомасштабних регулярних і хаотичних вихрових і магнітних стаціонарних структур у стратифікованих середовищах під дією зовнішньої дрібномасштабної неспіральної сили. У підрозділі 2.6, у межах електронної магнітогідродинаміки (ЕМГД) з урахуванням термомагнітних явищ, виявлено нову великомасштабну нестійкість типу α -ефекту, яка забезпечує генерацію великомасштабних вихрових і магнітних полів. Ця нестійкість виникає в плоскому шарі температурно-стратифікованої плазми під дією зовнішнього однорідного магнітного поля, нахиленого відносно шару, у поєднанні з дрібномасштабною зовнішньою силою з нульовою спіральністю. Встановлено, що збільшення параметра Нернста призводить до зменшення коефіцієнта підсилення α , що, у свою чергу, перешкоджає розвитку великомасштабної нестійкості. Отримано стаціонарні розв'язки рівнянь вихрового та магнітного динамо у вигляді локалізованих структур типу нелінійних хвиль Бельтрамі.

У третьому розділі досліджено магнітної конвекції в шарі електропровідної рідини, що неоднорідно обертається. У підрозділі 3.1 розроблено лінійну теорію конвективної нестійкості тонкого шару електропровідної рідини, що неоднорідно обертається, в однорідному вертикальному магнітному полі для осесиметричних збурень. Отримано критерії стійкості течій плазми, з яких встановле-

но, що окрім дисипативних процесів, стабілізуючими факторами є однорідне магнітне поле $B_0 = \text{const}$, неоднорідне обертання з дійсною епіциклічною частотою $\kappa^2 = 4\Omega^2(1 + \text{Ro}) > 0$, а також градієнт температури $dT_0/dz > 0$, якщо він спрямований вертикально вгору. В підрозділі 3.2 встановлено, що для профілів неоднорідного обертання з від'ємними числами Россбі $\text{Ro} < 0$ порогови стаціонарної та коливальної конвективної нестійкості (мінімальні критичні числа Релея) знижуються. Побудовано слабонелінійну теорію стаціонарної конвективної нестійкості в шарі електропровідної рідини, що неоднорідно обертається у вертикальному однорідному магнітному полі. Було показано, що за час встановлення стаціонарного рівня теплопередачі інтенсивність теплоперенесення збільшується для профілів обертання середовища з позитивними числами Россбі $\text{Ro} > 0$. В підрозділі 3.3 отримано нову динамічну систему нелінійних рівнянь у 6D фазовому просторі. Чисельними методами доведено хаотичну поведінку магнітного поля та його інверсії. В підрозділі 3.4 встановлено, що в магнітній конвекції, що неоднорідно обертається, найбільший внесок у теплоперенос робить ефект модуляції обертання. Ефект модуляції сили тяжіння дещо перевищує ефект модуляції магнітного поля на теплоперенос у системі. Найменший внесок у теплоперенос цієї системи дає модуляція температури порівняно з іншими типами модуляції. Досліджено вплив гравітаційної модуляції на слабонелінійну магнітоконвекцію в шарі нанорідини, що неоднорідно обертається. Результати досліджень показують, що гравітаційна модуляція, нерівномірне обертання та відмінності у об'ємній концентрації наночастинок на межах шару можуть ефективно контролювати тепло- та масоперенос. Встановлено, що від'ємний профіль обертання дає дестабілізуючу дію, а модульована система переносить більше тепла і маси, ніж немодульована система. В підрозділі 3.5 досліджено спільний вплив струму Холла та аксіального магнітного поля на виникнення конвекції в шарі, що неоднорідно обертається, електропровідної нанорідини з урахуванням ефектів броунівської дифузії та термофорезу. За

відсутності градієнта температури отримано нові типи магнітообертової нестійкості в аксіальному магнітному полі у тонкому шарі нанорідини. При наявності градієнтів температури та концентрації наночастинок досліджено стаціонарний режим магнітоконвекції. Результати показують, що збільшення числа Льюїса, модифікованого коефіцієнта дифузії та концентраційного числа Релея прискорює початок конвекції. Збільшення параметра струму Холла може як затримати, так і підсилити розвиток конвективної нестійкості. Профілі обертання з від'ємними числами Россбі знижують поріг розвитку теплової нестійкості та стимулюють початок конвекції. Визначено умови стабілізації та дестабілізації стаціонарної конвекції в аксіальному магнітному полі.

Четвертий розділ присвячено дослідженню теплової конвекції в електропровідних середовищах, що обертаються, під впливом спірального магнітного поля. В підрозділі 4.1 встановлено, що пороги стаціонарної та коливальної нестійкості для конвекції у спіральному магнітному полі є нижчими, ніж для конвекції у постійному аксіальному магнітному полі за будь-яких профілів неоднорідного обертання (чисел Россбі Ro). У підрозділі 4.2 отримано нову 8D динамічну систему нелінійних рівнянь, яка описує слабонелінійну стадію магнітної конвекції в середовищі, що неоднорідно обертається у зовнішньому спіральному магнітному полі. Встановлено існування складної хаотичної структури – дивного атрактора. В підрозділі 4.3 досліджується магнітна конвекція в шарі нанорідини, що неоднорідно обертається в спіральному магнітному полі. За відсутності температурного градієнта, але з урахуванням градієнта концентрації наночастинок, були отримані різні типи магнітообертальних нестійкостей. Зокрема, якщо нанорідина піддається впливу лише аксіального магнітного поля ($H_{0z} \neq 0$), виникає стандартна магнітообертальна нестійкість (МОН). Якщо ж вплив здійснюється тільки з боку неоднорідного азимутального магнітного поля ($H_{0\varphi}(R) \neq 0$), розвивається азимутальна МОН. У разі дії спірального магнітного поля $\mathbf{H}_0 = H_{0\varphi}(R)\mathbf{e}_\varphi + H_{0z}\mathbf{e}_z$, збуджується спіральна МОН. Для

кожного типу МОН отримано дисперсійні співвідношення у площині (k, Ro) для різних значень параметра обертання (числа Тейлора Ta) та азимутального числа Чандрасекара Q_φ . Також визначено критичні числа Россбі (Ro_{cr}, Rb_{cr}) , що характеризують порогові значення для неоднорідних профілів обертання (Ro) та азимутальних магнітних полів (магнітні числа Россбі Rb). Виявлено, що області нестійкості у площині (k, Ro) для всіх типів магнітообертальної нестійкості в нанорідинах є значно ширшими, ніж у звичайних рідинах. Як для аксіальної, так і для спіральної магнітоконвекції отримано явні вирази для критичного числа Релея Ra_{st} і побудовано відповідні криві нейтральної стійкості. Аналіз показує, що присутність наночастинок призводить до помітного зниження порогового значення стаціонарного критичного числа Релея Ra_{st}^{min} , що свідчить про дестабілізуючий ефект в обох конфігураціях. В підрозділі 4.4 досліджується конвекція в шарі пористого середовища Дарсі-Брінкмана, насиченого електропровідною нанорідиною, у спіральному магнітному полі. За відсутності градієнта температури отримано новий тип нестійкості в спіральному магнітному полі у тонкому шарі нанорідини. Визначено темпи зростання збурень і область розвитку нестійкості залежно від профілю азимутального магнітного поля (магнітного числа Россбі Rb) та радіального хвильового числа k . За наявності температурного градієнта досліджено стаціонарний режим нерівномірно обертової магнітоконвекції. Результати показали, що обертання та аксіальна (вертикальна) складова спірального магнітного поля затримують початок конвекції, тоді як азимутальна складова спірального магнітного поля чинить дестабілізуючий вплив при додатних числах Россбі Rb . Визначено умови стабілізації та дестабілізації стаціонарної конвекції в спіральному магнітному полі для металоксидних, металевих і напівпровідникових нанорідин.

У п'ятому розділі досліджено процеси формування структур в неоднорідних середовищах з урахуванням термомагнітних (ТМ) ефектів. В підрозділі 5.1 отримано дисперсійне рівняння для малих ТМ-обурень в електропровідній

рідині, що неоднорідно обертається, у зовнішньому аксіальному магнітному полі $\mathbf{V}_0 \parallel OZ$. За відсутності зовнішнього магнітного поля $\mathbf{V}_0 = 0$ отримані критерії стійкості ТМ-збурень у слабо неоднорідному безмежному середовищі залежно від профілю неоднорідного обертання (числа Россбі Ro). У межі «плавних» градієнтів ∇T_0 і $\nabla \alpha$ (слабонеоднорідне середовище) встановлено, що для низькопровідного середовища (магнітне число Прандтля $\widetilde{Pr} = \eta/\chi \gg 1$) генерація магнітного поля не ефективна через втрати, пов'язані з теплопровідністю та в'язкістю рідини. Встановлено, що у слабонеоднорідному середовищі генерація магнітного поля ефективна для високопровідної ($\widetilde{Pr} = \eta/\chi \ll 1$) рідини, якщо ефект «замагнічування» теплопровідності (ефект Ледюка-Риги) є переважним порівняно із конвекцією тепла. Виявлено, що для збурень, що розповсюджуються в аксіальному напрямку ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k_z$), ефект Холла може як стабілізувати, так і дестабілізувати зростання збурень залежно від профілю неоднорідного обертання (Росбі Ro). Для збурень, що поширюються в радіальному напрямку ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_R k_R$) встановлено, що ефект Нернста у зовнішньому магнітному полі \mathbf{V}_0 , ефект Ледюка-Риги та неоднорідності рівноважної температури та питомої термо е.р.с. (ω_{TM}), і навіть ефект архімедової сили призводять до дестабілізації осесиметричних збурень, тобто до генерації магнітного поля. В підрозділі 5.2 показано, що наявність ТМ-ефектів призводить до зниження порога розвитку нестійкості для будь-якого профілю неоднорідного обертання, тобто має дестабілізуючий ефект. Отримано нелінійне рівняння Гінзбурга-Ландау для опису слабонелінійної конвективної нестійкості з урахуванням ТМ-ефектів. Точне рішення цього рівняння показує вихід генерованого тороїдального магнітного поля на стаціонарний рівень. В підрозділі 5.3 отримано нову 6D динамічну систему нелінійних рівнянь з урахуванням генерації збурень тороїдального магнітного поля ТМ-нестійкістю. Виявлено режими конвекції для кеплерівського ($Ro = -3/4$) профілю обертання, при яких виникають хаотичні зміни напрямку (інверсії) та амплітуди збурень генерованого магнітного поля. В підрозділі 5.4

отримано новий тип термомагнітної (ТМ) нестійкості в стратифікованому за температурою тонкому шарі електронної рідини (плазмі), що знаходиться у постійному гравітаційному полі. Доведено, що при зменшенні параметра $\xi = h/r_d$ (характеристика співвідношення масштабу конвекції до плазмового масштабу) знижується граничне число Релея Ra_{min}^{st} , тобто знижується поріг розвитку нестійкості, що призводить до спонтанної генерації магнітного поля. Отримано точне аналітичне рішення рівняння типу Гінзбурга - Ландау, яке демонструє вихід на стаціонарний рівень амплітуди магнітного поля, що генерується. В підрозділі 5.5 розглянуті механізми генерації магнітного поля в результаті термомагнітних (ТМ) ефектів у повністю іонізованій плазмі як за наявності, так і за відсутності зовнішнього постійного магнітного поля. З урахуванням залежності коефіцієнтів переносу від магнітного поля, рівняння Брагінського застосовуються для виведення основних рівнянь, що описують динаміку як магнітних, так і теплових збурень. Отримано критерії утворення нестійкостей і, відповідно, генерації магнітних полів з урахуванням конвективного теплопереносу та термомагнітних явищ. Виведено вирази для швидкостей зростання (інкрементів) збурень магнітного поля та температури у короткохвильовому діапазоні. Встановлено, що в слабо неоднорідній замагніченій плазмі з колінеарними градієнтами щільності та температури магнітне поле генерується як при високих, так і при низьких значеннях бета β плазми.

У шостому розділі досліджено біо-термальній конвекції у тонких шарах рідини. В підрозділі 6.1, при дослідженні біо-термальній конвекції в шарі високопористого середовища, насиченого ньютонівською рідиною з гіротаксичними мікроорганізмами встановлено, що збільшення швидкості мікроорганізмів (числа Пекле), гіротаксису, різниці температур між шарами (числа Релея-Дарсі) знижує поріг біо-термальній нестійкості. Навпаки збільшення ефективної в'язкості (числа Дарсі) та кутової швидкості обертання (числа Тейлора) затримують розвиток біо-термальній конвекції. В підрозділі 6.2 виявлено, що збільшення ча-

стоти модуляції Ω призводить до зменшення тепловіддачі (зменшення варіацій чисел Нуссельта $Nu(\tau)$) у біо-термальній конвекції, що обертається. Встановлено, що збільшення амплітуди модуляції δ посилює теплообмін, а сферична форма мікроорганізмів сприяє більш ефективному процесу теплопередачі. В підрозділі 6.3 вивчено вплив періодично змінних гравітаційних полів та наскрізного потоку на біо-термальну конвекцію Дарсі-Брінкмана в шарі пористого середовища, насиченого ньютонівською рідиною, що містить гіротактичні мікроорганізми. Отримані результати показують, що вертикальний наскрізний потік при біо-термальній конвекції має подвійну природу, дозволяючи як збільшувати, так і зменшувати тепло- та масоперенесення. В підрозділі 6.4 розглянута магнітна конвекція в горизонтальному шарі пористого середовища, насиченого нанорідиною та гіротактичними мікроорганізмами. Було встановлено, що вертикальне магнітне поле та число Дарсі підвищують стійкість системи. Середня пористість, число Льюїса, модифікований коефіцієнт дифузії та концентраційне число Релея мають дестабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію. Збільшення концентрації гіротактичних мікроорганізмів посилює виникнення магнітної конвекції. В підрозділі 6.5 розглянуто біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища з урахуванням модуляції гравітаційного поля та дії сили Коріоліса. Встановлено, що збільшення числа Тейлора Ta (параметра обертання) справляє стабілізуючий вплив на систему, затримуючи початок конвекції та зменшуючи інтенсивність теплопереносу. У підрозділі 6.6 досліджено тепломасоперенесення в пористому середовищі під впливом одночасної дії обертання, гравітаційної модуляції та внутрішнього джерела тепла. Побудована шестивимірною нелінійною моделлю на основі динамічних рівнянь типу Лоренца, що володіє властивостями симетрії та дисипації. Виявлено, що зростання амплітуди модуляції суттєво посилює теплові та масові потоки, тоді як зростання частоти модуляції зменшує вплив. В підрозділі 6.7 досліджено вплив теплової модуляції на біо-термальну конвекцію в шарі рідини, що містить термотактичні мікроор-

ганізми. Результати нашого дослідження показують, що повільні часові зміни мають суттєвий вплив на явища переносу, особливо в випадках протифазної модуляції (OPM) та модуляції нижньої межі (LBM). Відзначаємо, що синфазна модуляція (IPM) має відносно слабкий вплив на тепло- масоперенесення, що дуже нагадує немодульований сценарій. Було встановлено, що число Пекле (параметр, що характеризує термотаксис) може викликати як стабілізацію, так і дестабілізацію в системі.

Ключові слова: багатомасштабні асимптотичні розклади, дрібномасштабна турбулентність, сила Коріоліса, α -ефект, нелінійні хвилі, кінки, хаотичні структури, спіральне магнітне поле, магніторотаційна нестабільність, конвекція Релея-Бенара, слабонелінійна теорія, термомагнітна нестабільність, хаотична поведінка, біо-термальна конвекція, повністю іонізована плазма.

ABSTRACT

Kopp M.I. Generation of nonlinear structures in hydrodynamic mediums under the impact of external fields.– Qualification scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis submitted for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in specialty 01.04.02 - "Theoretical Physics"(Natural Sciences, E5 - Physics and Astronomy (0533)). – Institute of Single Crystals of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The dissertation developed both linear and nonlinear theories of the formation of dissipative structures in various hydrodynamic media, such as gas, liquid, and plasma, under the influence of external fields. External fields refer to the effects of macroscopic forces – such as gravitational field, Coriolis force, and Lorentz force – as well as an external small-scale force used to model turbulence. Additionally, cases are considered where liquids contain nanoparticles. The mechanisms of the generation of convection cell-like structures are studied in liquids containing a certain concentration of living (active) matter – microorganisms with different types of taxis.

The dissertation consists of an introduction, seven chapters in the main part, conclusions, and a list of references. The introduction substantiates the choice of the research topic, formulates its objectives and tasks, defines the object and subject of the study, and lists the methods used. Additionally, it provides information on the scientific novelty and practical significance of the obtained results, as well as data on their validation and application.

In the first chapter, the theory of vortex dynamo in rotating media with a constant angular velocity is developed. Using the method of multiscale asymptotic expansions, closed equations for the nonlinear vortex dynamo in rotating media under the influence of an external small-scale force are derived. It is shown that, at the linear stage, the generation of large-scale vortex structures (LVS) occurs due to the development of large-scale instability associated with the α -effect. This

instability arises from the action of the Coriolis force and the external force. In the case of a non-helical force, a necessary condition for the development of instability is the deviation of the rotation axis from the vertical direction. New stationary solutions in the form of localized vortex structures have been identified, including spiral kinks, nonlinear Beltrami waves, and kinks with a velocity profile in the form of a bend. Subsections 1.3 and 1.4 the theory of nonlinear vortex dynamo in a rotating stratified dry and moist atmosphere is developed. The regimes of linear generation of large-scale vortex perturbations are determined, and the regions (criteria) for the onset of this instability are established, depending on the rotation parameter D and the stratification parameter \tilde{R} (for both dry and moist cases). The consideration of stratification effects in the rotating medium, such as thermal heating and an additional source of condensation heat release, leads to a significant amplification of large-scale perturbations. In subsection 1.5, a theory of parametric generation of large-scale vortex structures (LVS) in a stratified nanofluid with an inclined rotation is developed. A new effect of LVS generation in nanofluids (without a temperature gradient) is discovered, which is associated with an increase in nanoparticle concentration. As the frequency of parametric external forcing increases, the efficiency of LVS generation decreases. This effect opens up possibilities for controlling the LVS generation process. At the nonlinear stage of LVS growth, localized solutions in the form of nonlinear waves and kinks are obtained.

In the second chapter, a self-consistent theory of magneto-vortex dynamo in rotating media under the influence of an external small-scale force is developed. In subsection 2.1, it is established that at the linear stage, the generation of vortex structures occurs due to the development of the hydrodynamic (HD) α -effect instability, while the generation of magnetic structures is driven by the magnetohydrodynamic (MHD) α -effect instability. Both types of instabilities are caused by the combined action of the small-scale external force and the Coriolis force. Stationary solutions describing magnetic structures in the form of periodic nonlinear waves and kinks

in a rotating medium with finite electrical conductivity are obtained. For media with very low electrical conductivity, nonlinear stationary solutions are found that describe vortex structures in the form of spiral kinks. In subsection 2.2, a system of nonlinear equations for the magneto-vortex dynamo in an inclined rotating electrically conductive fluid under the influence of an external non-helical force is derived. It is established that the generation of large-scale vortex structures (LVS) and large-scale magnetic fields (LMF) at the linear stage occurs due to α -effect-type instability, with the necessary condition for its development being the deviation of the angular velocity vector ($\boldsymbol{\Omega}$ from the vertical axis OZ . The existence of large-scale regular and chaotic vortex and magnetic fields in the stationary regime is demonstrated. In subsection 2.3, within the framework of linear theory using multi-scale asymptotic expansions, an evolution equation for large-scale perturbations in a thermally stratified electrically conductive medium with small-scale velocity and magnetic field helicity is obtained. It is shown that in the absence of small-scale magnetic field helicity, the generation of LVS and LMF occurs independently due to the development of HD and MHD α -effect instabilities. A qualitative analysis of the linear stage of large-scale instability under solar conditions is carried out, demonstrating good agreement between the characteristic scales and timescales of hydrodynamic structures and those observed experimentally. In subsection 2.4, a closed self-consistent system of nonlinear equations describing the nonlinear stage of LVS and LMF growth in a stratified electrically conductive medium is obtained. The possibility of the existence of large-scale stationary chaotic vortex and magnetic structures, as well as regular stationary magnetic structures in the form of nonlinear waves, kinks, and solitons, is demonstrated. In subsection 2.5, a closed system of nonlinear equations for vortex and magnetic large-scale perturbations in an inclined rotating stratified medium under the influence of an external small-scale non-helical force is derived. It is established that in the absence of an external magnetic field, the generation of LVS and LMF occurs due to the development of HD and MHD

α -effect instabilities, while in its presence, the growth rates of vortex and magnetic large-scale perturbations coincide. A «weak» external magnetic field does not inhibit the generation of large-scale vortex and magnetic perturbations, whereas a «strong» field suppresses them. In thermally stratified media, large-scale α -effect-type instabilities occur at low Rayleigh numbers Ra . The existence of large-scale regular and chaotic vortex and magnetic stationary structures in stratified media under the influence of an external small-scale non-helical force is demonstrated. In subsection 2.6, within the framework of electronic magnetohydrodynamics (EMHD), considering thermomagnetic effects, a new large-scale instability of the α -effect type is identified, which facilitates the generation of large-scale vortex and magnetic fields. This instability arises in a plane layer of thermally stratified plasma under the influence of an external uniform magnetic field inclined relative to the layer, combined with a small-scale external force with zero helicity. It is established that an increase in the Nernst parameter leads to a decrease in the amplification coefficient α , which, in turn, suppresses the development of large-scale instability. Stationary solutions for vortex and magnetic dynamo equations in the form of localized structures such as nonlinear Beltrami waves are obtained.

In chapter 3, magnetic convection in a non-uniformly rotating layer of conductive fluid is investigated. In subsection 3.1, a linear theory of convective instability in thin layers of non-uniformly rotating conductive fluid under a constant vertical magnetic field is developed for axisymmetric disturbances. Stability criteria for plasma flow reveal that, besides dissipative processes, stabilization is influenced by a uniform magnetic field, non-uniform rotation with negative Rossby numbers, and an upward-directed temperature gradient. Subsection 3.2 examines non-uniform rotation profiles with negative Rossby numbers, demonstrating that the thresholds for stationary and oscillatory convective instability (minimum critical Rayleigh numbers) decrease. A weakly nonlinear theory of stationary convective instability in a non-uniformly rotating layer under a vertical uniform magnetic field is constructed. It

is shown that heat transfer intensity increases with rotation for positive Rossby numbers ($Ro > 0$). In subsection 3.3, a new dynamic system of nonlinear equations in a six-dimensional phase space is derived. Numerical methods confirm chaotic behavior of the magnetic field, including field inversion. In subsection 3.4, it was established that in the case of non-uniformly rotating magnetic convection, the most significant influence on heat transfer is exerted by rotation modulation. Gravity modulation has a slightly stronger effect than magnetic field modulation, while temperature modulation contributes the least. The influence of gravity modulation on weakly nonlinear magnetoconvection in a non-uniformly rotating nanoridine layer is also investigated. Results indicate that gravity modulation, non-uniform rotation, and nanoparticle concentration variations effectively control heat and mass transfer. A negative rotation profile has a destabilizing effect, and the modulated system exhibits greater heat and mass transfer than the unmodulated system. In subsection 3.5, the combined effects of the Hall current and axial magnetic field on convection in a non-uniformly rotating layer of electrically conductive nanoridine are studied, incorporating Brownian diffusion and thermophoresis. In the absence of a temperature gradient, novel types of magneto-rotational instability are identified in an axial magnetic field within a thin nanoridine layer. When temperature and nanoparticle concentration gradients are present, a steady-state regime of non-uniformly rotating magneto-convection is analyzed. Results show that increasing the Lewis number, modified diffusion coefficient, and concentration Rayleigh number accelerates convection onset. The Hall current parameter can either delay or enhance convective instability. Rotation profiles with negative Rossby numbers lower the threshold for thermal instability, promoting convection. Stabilization and destabilization conditions for steady-state convection in an axial magnetic field are determined.

The fourth section is devoted to the study of thermal convection in rotating conductive media under the influence of a helical magnetic field. Subsection 4.1

reveals that the thresholds for stationary and oscillatory instability in a helical magnetic field are lower than those in a constant axial magnetic field for any non-uniform rotation profile (Ro). In subsection 4.2, a new eight-dimensional system of nonlinear equations is formulated to describe the weakly nonlinear stage of magnetic convection in a non-uniformly rotating medium under an external helical magnetic field. The existence of a strange attractor is established, confirming complex chaotic dynamics. Subsection 4.3 investigates magnetic convection in a layer of nanofluid undergoing non-uniform rotation in a helical magnetic field. In the absence of a temperature gradient, but accounting for the concentration gradient of nanoparticles, various types of magnetorotational instabilities (MRI) are identified. In particular, when the nanofluid is subjected only to an axial magnetic field ($H_{0z} \neq 0$), the standard magnetorotational instability (SMRI) arises. If the influence comes solely from a non-uniform azimuthal magnetic field ($H_{0\varphi}(R) \neq 0$), the azimuthal MRI (AMRI) develops. In the case of a helical magnetic field, $\mathbf{H}_0 = H_{0\varphi}(R)\mathbf{e}_\varphi + H_{0z}\mathbf{e}_z$, the helical MRI (HMRI) is excited. For each type of MRI, dispersion relations are derived in the (k, Ro) plane for various values of the rotation parameter (Taylor number Ta) and the Chandrasekhar azimuthal number Q_φ . In addition, critical Rossby numbers ($\text{Ro}_{cr}, \text{Rb}_{cr}$) are determined, characterizing the threshold values for non-uniform rotation profiles (Ro) and azimuthal magnetic fields (magnetic Rossby numbers Rb). It is found that the instability regions in the (k, Ro) plane for all types of magnetorotational instability in nanofluids are significantly wider than those in conventional (pure) fluids. For both axial and helical magnetic convection, explicit expressions for the critical Rayleigh number Ra_{st} are obtained, and the corresponding neutral stability curves are constructed. The analysis shows that the presence of nanoparticles leads to a significant reduction in the stationary critical Rayleigh number Ra_{st}^{\min} , indicating a destabilizing effect in both configurations. Subsection 4.4 investigates convection in a Darcy-Brinkman cellular medium saturated with electrically conductive nanoridine under a helical magnetic field. In the absence of

a temperature gradient, a new type of instability emerges in a helical magnetic field within a thin nanofluid layer. Disturbance growth rates and instability regions are determined based on the azimuthal magnetic field profile (magnetic Rossby number Rb) and radial wave number k . With a temperature gradient present, the stationary regime of non-uniformly rotating magnetoconvection is explored. Findings indicate that rotation and the vertical component of the helical magnetic field suppress convection onset, whereas the azimuthal component of the helical magnetic field destabilizes the system at positive magnetic Rossby numbers (Rb). Stability conditions for stationary convection in a helical magnetic field are identified for metal oxide, metallic, and semiconductor nanofluids.

In chapter 5, the processes of structure formation in inhomogeneous media were studied, taking into account thermomagnetic (TM) effects. In subsection 5.1, a dispersion equation is derived for small TM disturbances in a non-uniformly rotating electrically conductive liquid subjected to an external axial magnetic field ($\mathbf{B}_0 \parallel OZ$). In the absence of an external magnetic field ($\mathbf{B}_0 = 0$), stability criteria for TM disturbances in a weakly inhomogeneous infinite medium are determined based on the inhomogeneous rotation profile (Rossby numbers Ro). For "smooth" gradients (∇T_0 and $\nabla \alpha$) in a weakly inhomogeneous medium, magnetic field generation is ineffective in low-conductivity media ($Pm = \eta/\chi \gg 1$) due to heat conduction losses. However, in highly conductive fluids ($Pm = \eta/\chi \ll 1$), magnetic field generation is efficient when the Leduc-Righi effect dominates over heat convection. For disturbances propagating axially ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k_z$), the Hall effect can either stabilize or destabilize growth depending on the inhomogeneous rotation profile (Ro). In the radial direction ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_R k_R$), destabilization arises due to the Nernst effect in the external magnetic field \mathbf{B}_0 , the Leduc-Righi effect, inhomogeneities in equilibrium temperature and specific thermoelectric power (ω_{TM}), and the Archimedes force effect, all contributing to magnetic field generation. It is established in subsection 5.2 that TM effects lower the instability threshold for any non-uniform rotation

profile, indicating a destabilizing influence. A nonlinear Ginzburg-Landau equation describing weakly nonlinear convective instability with TM effects is derived, and its exact solution reveals that the generated toroidal magnetic field reaches a stationary level. In subsection 5.3, a new six-dimensional dynamic system of nonlinear equations is formulated, incorporating toroidal magnetic field disturbances induced by TM instability. Keplerian rotation profiles ($Ro = -3/4$) exhibit convection regimes characterized by chaotic reversals and amplitude fluctuations in the generated magnetic field. A novel type of TM instability in a temperature-stratified thin electron fluid (plasma) layer within a constant gravitational field is introduced in subsection 5.4. It is shown that as the parameter $\xi = h/r_d$ (ratio of convection scale to plasma scale) decreases, the boundary Rayleigh number (Ra_{min}^{st}) decreases, reducing the instability threshold and leading to spontaneous magnetic field generation. An exact analytical solution of the Ginzburg-Landau equation confirms that the generated magnetic field amplitude stabilizes at a stationary level. In subsection 5.5, mechanisms of magnetic field generation due to TM effects in fully ionized plasma are examined with and without an external constant magnetic field. Using the Braginsky equations, fundamental equations describing magnetic and thermal disturbances are derived while considering transfer coefficient dependencies on the magnetic field. Instability criteria and conditions for magnetic field generation, influenced by convective heat transfer and thermomagnetic effects, are established. Growth rate expressions for magnetic field disturbances and temperature fluctuations in the short-wave range are obtained. It is determined that in weakly inhomogeneous plasma with collinear density and temperature gradients, magnetic field generation occurs at both high and low plasma beta (β) values.

In chapter 6, bio-thermal convection in thin liquid layers is explored. In subsection 6.1, the bio-thermal convection in a layer of highly porous medium saturated with a Newtonian fluid containing gyrotactic microorganisms is investigated. It is established that an increase in the microorganism swimming speed (Peclet number),

gyrotactic sensitivity, and the temperature difference between the boundaries (Rayleigh–Darcy number) reduces the threshold of bioconvective instability. Conversely, increasing the effective viscosity (Darcy number) and the angular velocity of rotation (Taylor number) delays the onset of bioconvection. In subsection 6.2, it is found that an increase in the modulation frequency Ω reduces heat transfer (manifested as a decrease in the variation of the Nusselt number $\text{Nu}(\tau)$) in rotating bio-thermal convection. It is shown that an increase in the modulation amplitude δ enhances thermal transport, while a spherical shape of microorganisms contributes to a more efficient heat transfer process. Subsection 6.3 studies the influence of periodically varying gravitational fields and throughflow on Darcy–Brinkman-type bio-thermal convection in a porous medium saturated with a Newtonian fluid containing gyrotactic microorganisms. The results demonstrate that the vertical throughflow has a dual role, capable of either enhancing or suppressing both heat and mass transfer. In subsection 6.4, magnetic convection in a horizontal layer of porous medium saturated with a nanofluid and gyrotactic microorganisms is considered. It is shown that a vertical magnetic field and the Darcy number increase the system’s stability. On the other hand, average porosity, Lewis number, modified diffusivity, and concentration Rayleigh number exert a destabilizing effect on stationary convection. An increase in the concentration of gyrotactic microorganisms promotes the development of magnetic convection. Subsection 6.5 investigates bio-thermal convection in a porous layer under gravitational modulation and Coriolis force. It is found that increasing the Taylor number Ta (rotation parameter) has a stabilizing effect, delaying the onset of convection and reducing the intensity of heat transfer. In subsection 6.6, a porous layer saturated with a Newtonian fluid containing gyrotactic microorganisms is considered under the combined effects of gravitational modulation, rotation, and internal heating. A six-dimensional nonlinear model based on Lorenz-type dynamic equations is constructed, possessing symmetry and dissipative properties. It is shown that the modulation amplitude significantly enhances heat and mass

transfer, whereas the modulation frequency tends to reduce it. Subsection 6.7 examines the effect of thermal modulation on bio-thermal convection in a fluid layer containing thermotactic microorganisms. The results indicate that slow temporal variations strongly influence transport phenomena, particularly in cases of out-of-phase modulation (OPM) and lower boundary modulation (LBM). Notably, in-phase modulation (IPM) exhibits a relatively weak influence on heat and mass transfer, closely resembling the unmodulated scenario. It is also found that the Peclet number and the thermotactic parameter can act as either stabilizing or destabilizing factors in the system.

Keywords: multiscale asymptotic expansions, small-scale turbulence, Coriolis force, α -effect, nonlinear waves, kinks, chaotic structures, helical magnetic field, magnetorotational instability, Rayleigh-Benard convection, weakly nonlinear theory, thermomagnetic instability, chaotic behavior, biothermal convection, fully ionized plasma.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Список наукових праць, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. **М.І. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. The Large scale instability in rotating fluid with small scale force, Open Journal of Fluid Dynamics, 2015, v.5, p. 128-138. arXiv:1504.06953v1 [physics.flu-dyn].
2. **М.І. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Nonlinear Vortex Structures in Obliquely Rotating Fluid, Open Journal of Fluid Dynamics, 2015, v.5, p.311-321.
3. В.В. Яновський, А.В. Тур, **М.Й. Копп**. Квазідвовимірні великомасштабні вихрові та магнітні структури в магнітній гідродинаміці. Проблеми теоретичної фізики. Наукові праці. Випуск 4. Харків: ХНУ імені В.М. Каразіна, 2020, 412-506 с.
4. **М.І. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Nonlinear Dynamo in a Rotating Electrically Conducting Fluid, East European Journal of Physics, 2017, v.4(1), p. 4-27.

(SJR квартиль Q4).

5. **М.И. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Instabilities in the non-uniformly rotating medium with temperature stratification in the external uniform magnetic field, 2019, East European Journal of Physics, v.1, p. 4-33. (SJR квартиль Q4).

6. **М.И. Корп**, A.V. Tur, K.N. Kulik, V.V. Yanovsky. Nonlinear dynamo in obliquely rotating stratified electroconductive fluid in a uniform magnetic field, East European Journal of Physics, 2020, v.1, p. 5-36. arXiv:1807.01986v1 [physics.flu-dyn]. (SJR квартиль Q4).

7. **М.И. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Weakly nonlinear magnetic convection in a nonuniformly rotating electrically conductive medium under the action of modulation of external fields, East European Journal of Physics, 2020, v.2, p. 5-37. arXiv:1911.05368v1 [physics.plasm-ph]. (SJR квартиль Q4).

8. **М.И. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Magnetic convection in a nonuniformly rotating electrically conductive medium in an external spiral magnetic field, Fluid Dynamics Research, 2021, v. 53, 015509. arXiv:1905.05472v1 [physics.plasm-ph]. (SJR квартиль Q2).

9. **М.И. Корп**, K.N. Kulik, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Generation of magnetic fields by thermomagnetic effects in a nonuniformly rotating layer of an electrically conductive fluid, Journal of Physical Studies, 2021, v. 25, No. 2, 2401. arXiv:2104.11068v1 [physics.flu-dyn]. (SJR квартиль Q4).

10. **М.И. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Nonlinear Vortex Structures Driven by Small-Scale Nonhelical Forces in Obliquely Rotating Stratified Fluids, Ukrainian Journal of Physics, 2021, v. 66, No. 6, p. 478-488. arXiv:1706.00223 [physics.flu-dyn]. (SJR квартиль Q3).

11. **М.И. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Hydrodynamic α -effect in a rotating stratified moist atmosphere driven by small-scale nonhelical force, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 2021, v. 115, No. 5-6, p. 551-576. (SJR квартиль Q2).

12. **M.I. Kopp**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Vortex Dynamo in an Obliquely Rotating Stratified Nanofluid by Small-Scale Non-Helical Forces, *East European Journal of Physics*, 2021, v.2, p.51-72. (SJR квартиль Q4).
13. **M.I. Kopp**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Spontaneous generation of magnetic fields in thin layers of stratified plasma, *Physics of Plasmas*, 2022, v. 29, 042115. (SJR квартиль Q1).
14. **Michael Kopp**, Andrii Kopp. A New 6D Chaotic Generator: Computer Modelling and Circuit Design, *International Journal of Engineering and Technology Innovation*, 2022, v. 12, no. 4, p. 288-307. (SJR квартиль Q3).
15. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky. Influence of the Hall current on the convective and magnetorotational instability in a thin layer of an electrically conductive nanofluid, *Physics of Fluids*, 2022, v. 34, 064107. (SJR квартиль Q1).
16. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky. Thermal convection in a rotating porous medium layer saturated by a nanofluid under a helical magnetic field, *Journal of Applied Physics*, 2022, v. 132, 084302. (SJR квартиль Q2).
17. **M.I. Kopp**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Thermomagnetic instabilities in a nonuniformly rotating electrically conductive fluid, *Journal of Physical Studies*, 2022, v. 26, No. 4, 4401. (SJR квартиль Q4).
18. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky, U. S. Mahabaleshwar. A Bio-Thermal Convection in a Porous Medium Saturated by Nanofluid Containing Gyrotactic Microorganisms Under an External Magnetic Field, *East European Journal of Physics*, 2022, v.4, p.23-47. (SJR квартиль Q4).
19. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky. Darcy-Brinkman bio-thermal convection in a porous rotating layer saturated by Newtonian fluid containing gyrotactic microorganisms, *Ukrainian Journal of Physics*, 2023, v. 68, No. 1, p. 30-37. (SJR квартиль Q3).
20. **M.I. Kopp**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Chaotic Dynamics of Magnetic Fields Generated by Thermomagnetic Instability in a Nonuniformly Rotating Electrically Conductive Fluid, *Journal of Physical Studies*, 2023, v. 27, No. 2, 2403. (SJR квар-

ТИЛЬ Q3).

21. **М. Копп**, A. Kopp. A New 8D Lorenz-like Hyperchaotic System: Computer Modelling, Circuit Design and Arduino Uno Board Implementation, *Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering*, 2023, v. 15, No. 2, p. 37-46.
22. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Vortex dynamo in rotating media, *East European Journal of Physics*, 2023, v.2, p. 7-50. (SJR квартиль Q4).
23. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Investigating the effect of gravity modulation on weakly nonlinear magnetoconvection in a nonuniformly rotating nanofluid layer, *East European Journal of Physics*, 2023, v.3, p. 207-222. (SJR квартиль Q4).
24. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Effect of gravity modulation on weakly nonlinear bio-thermal convection in a porous medium layer. *Journal of Applied Physics*, 2023, v. 134, 104702. (SJR квартиль Q2).
25. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Gravity modulation and its impact on weakly nonlinear bio-thermal convection in a porous layer under rotation: a Ginzburg-Landau model approach, *Journal of Porous Media*, v. 27(9), 2024, p. 1-17. (SJR квартиль Q3).
26. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Weakly Nonlinear Bio-Thermal Convection in a Porous Media Layer Under Rotation, Gravity Modulation, and Heat Source, *East European Journal of Physics*, 2024, v. 1, p. 175-191. (SJR квартиль Q3).
27. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. The Effect of Throughflow and Gravitational Modulation on Weakly Nonlinear Bio-Thermal Convection in a Porous Medium Layer, *Ukrainian Journal of Physics*, 2024, v. 69(2), p. 82-95. (SJR квартиль Q4).
28. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Thermal modulation effects on weakly nonlinear bio-thermal convection with thermotactic microorganisms in a liquid layer, *Journal of Physical Studies*, 2024, v. 28(3), 3401. (SJR квартиль Q4).
29. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Generation of large-scale magnetic-vortex structures in stratified magnetized plasma by a small-scale force, *Physics of Plasmas*, 2024, v.

31, 082301. (SJR квартиль Q2).

30. **М.І. Копп**, V.V. Yanovsky. Features of generation of spontaneous magnetic fields in fully ionized plasma, Problems of Atomic Science and Technology, 2024, №6(154), p. 25-30. (SJR квартиль Q3).

31. **Michael Kopp**, Inna Samuilik. A New 6D Two-wing Hyperchaotic System: Dynamical Analysis, Circuit Design, and Synchronization, Chaos Theory and Applications, 2024, v. 6(4), p. 273-283. (SJR квартиль Q1).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

32. **М.І. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. The large scale instability and nonlinear vortex structures in obliquely rotating fluid with small scale non spiral force. XIII International Conference "PLASMA ELECTRONICS AND NEW METHODS OF ACCELERATION" August 24-28, 2015, Kharkiv, Ukraine. Problems of Atomic Science and Technology, 2015, №4(98), p. 264-269. (SJR квартиль Q3).

33. **М.І. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Chaotic magnetoconvection in non-uniformly rotating electroconductive fluids XIV International Conference "PLASMA ELECTRONICS AND NEW ACCELERATION METHODS" August 27-31, 2018, Kharkiv, Ukraine. Problems of Atomic Science and Technology, 2018, №4 (116), p. 230-234. arXiv:1805.11894v1 [astro-ph.EP]. (SJR квартиль Q3).

34. **М.І. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Large-scale magnetic and vortex structures in a helical turbulent convection. Proceedings of the VII International Conference "Modern Problems of Physics". Dushanbe: publishing house «Donish», 2020, p. 39-43.

35. **Michael Kopp**, Andrii Kopp. Computer modeling and Arduino Uno implementation of a 6D hyperchaotic system with four quadratic nonlinearities. XXXII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2024, 22-25 травня 2024р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1216.

36. **Michael Kopp**, Andrii Kopp. Adaptive control and synchronization of a 6d hyperchaotic system with application to secure communication. XXXII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2024, 22-25 травня 2024р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1217.
37. **М.І. Копп**, I. Samuilik. Analysis of a new 6D hyperchaotic system. 83rd International Scientific Conference of the University of Latvia "Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations 29 January 2025, Riga, Latvia. Book of Abstracts, p. 4.
38. **Michael Kopp**, Andrii Kopp. Modeling chaotic behavior of nonlinear dynamo equations using an artificial neural network. XXXIII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2025, 14-17 травня 2025 р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1382.
39. **М.І. Копп**, I.I Samuilik. Computer modeling and circuit implementation of a fivedimensional artificial neural network system. X International Scientific-Practical Conference Physical and Technological Problems of Transmission, Processing and Storage of Information in Infocommunication Systems, 15-17 May 2025, Chernivtsi, Ukraine. Book of Abstracts, p. 92-93.

ЗМІСТ

Анотація	2
Перелік умовних позначень та скорочень	37
Вступ	39
1 Вихрове динамо у середовищах, що обертаються	53
1.1 Великомасштабна нестійкість у рідині, що обертається, під дією спіральної дрібномасштабної сили	59
1.1.1 Основні рівняння та постановка задачі	60
1.1.2 Рівняння еволюції великомасштабних збурень	61
1.1.3 Стаціонарні нелінійні вихрові структури	64
1.2 Нелінійні великомасштабні вихрові структури в рідині, що похило обертається	65
1.2.1 Постановка задачі та рівняння для великомасштабного поля швидкості	66
1.2.2 Великомасштабна нестійкість	67
1.2.3 Стаціонарні рішення нелінійного рівняння для великомасштабного поля швидкості	68
1.3 Нелінійні великомасштабні вихрові структури в стратифікованій рідині, що похило обертається	69
1.3.1 Рівняння для великомасштабних полів	70
1.3.2 Великомасштабна нестійкість	71
1.3.3 Стаціонарні нелінійні вихрові структури	74
1.4 Нелінійне вихрове динамо в стратифікованій вологій атмосфері, що обертається	76
1.4.1 Постановка задачі та основні рівняння для великомасштабних вихрових полів	77

1.4.2	Великомасштабна нестійкість	80
1.4.3	Стаціонарні нелінійні вихрові структури	83
1.5	Вихрове динамо у вологій атмосфері, що обертається, з дрібно-масштабною неспіральною силою	85
1.5.1	Нелінійні рівняння вихрового динамо	86
1.5.2	Великомасштабна нестійкість	87
1.5.3	Стаціонарні нелінійні вихрові структури	90
1.6	Вихрове динамо в стратифікованій нанорідині, що похило обертається, з дрібномасштабною неспіральною силою	92
1.6.1	Основні рівняння та постановка задачі	94
1.6.2	Великомасштабна нестабільність	95
1.6.3	Насичення нестійкості та нелінійні структури	100
1.7	Висновки до розділу 1	101
2	Великомасштабні вихрові і магнітні структури в електропровідних середовищах	103
2.1	Магніто-вихрове динамо в електропровідній рідині, що обертається, з дрібномасштабною спіральністю	105
2.1.1	Основні рівняння магніто-вихрового динамо	106
2.1.2	Великомасштабна нестійкість	109
2.1.3	Нелінійні стаціонарні структури	112
2.2	Магніто-вихрове динамо в електропровідній рідині, що похило обертається	114
2.2.1	Постановка задачі та рівняння нелінійного магніто-вихрового динамо	115
2.2.2	Великомасштабна нестійкість	116
2.2.3	Стаціонарні хаотичні структури великомасштабних полів .	120
2.3	Генерація великомасштабних вихрових та магнітних структур у стратифікованому середовищі	123

2.3.1	Формулювання проблеми	124
2.3.2	Рівняння еволюції великомасштабних полів	126
2.3.3	Великомасштабна нестійкість	128
2.4	Нелінійне магніто-вихрове динамо у стратифікованому електро- провідному середовищі	132
2.4.1	Рівняння нелінійного динамо	133
2.4.2	Стаціонарні нелінійні магнітні структури	135
2.4.3	Стаціонарні хаотичні структури великомасштабних полів .	140
2.5	Нелінійне динамо в стратифікованій електропровідній рідині, що похило обертається, в однорідному магнітному полі	143
2.5.1	Рівняння для великомасштабних полів	144
2.5.2	Великомасштабна нестійкість без зовнішнього магнітного поля $\overline{B}_{1,2} = 0$	147
2.5.3	Великомасштабна нестійкість з урахуванням зовнішнього магнітного поля $\overline{B}_{1,2} \neq 0$	153
2.5.4	Нелінійні стаціонарні структури без зовнішнього магнітно- го поля $\overline{B} = 0$	157
2.5.5	Нелінійні стаціонарні структури за наявності зовнішнього магнітного поля $\overline{B} \neq 0$	161
2.6	Генерація великомасштабних магнітно-вихрових структур у стра- тифікованій замагніченій плазмі під впливом дрібномасштабної сили	163
2.6.1	Основні рівняння та постановка задачі	164
2.6.2	Великомасштабна нестійкість магнітно-вихрових збурень .	169
2.6.3	Стаціонарні нелінійні структури	173
2.7	Висновки до розділу 2	175
3	Теплова конвекція в електропровідних середовищах, що нео- днорідно обертаються, в аксіальному магнітному полі	178

3.1	Локальні нестійкості в замагнічуваному потоці, що обертається з температурною стратифікацією	183
3.1.1	Основні рівняння еволюції малих збурень	183
3.1.2	Асимптотичний метод ВКБ, наближення геометричної оптики та дисперсійне рівняння	185
3.2	Задача Релея-Бенара для тонкого шару замагніченої плазми, що неоднорідно обертається	187
3.2.1	Загальне дисперсійне рівняння	188
3.2.2	Монотонний та коливальний режими конвекції	190
3.2.2.1	Стационарний режим конвекції	190
3.2.2.2	Колівальний режим конвекції	193
3.2.3	Слабонелінійна теорія конвективної нестійкості	195
3.3	Хаотична динаміка магнітної конвекції, що неоднорідно обертається	200
3.3.1	Рівняння 6D нелінійної динаміки	201
3.3.2	Комп'ютерне моделювання рівнянь 6D хаотичної динаміки	203
3.4	Дослідження теплоперенесення під впливом модуляції зовнішніх полів	207
3.4.1	Постановка проблеми	208
3.4.2	Порівняння різних видів параметричного впливу на стаціонарну магнітоконвекцію, що неоднорідно обертається .	212
3.4.3	Вплив гравітаційної модуляції на слабонелінійну магнітоконвекцію в шарі нанорідини, що нерівномірно обертається	213
3.5	Магнітна конвекція в тонкому шарі електропровідної нанорідини, що неоднорідно обертається, з урахуванням впливу ефекту Холла	219
3.5.1	Дисперсійне рівняння у локальному ВКБ наближенні . . .	220
3.5.2	Магнітообертальна нестійкість (МОН) з урахуванням холлівського струму в тонкому шарі нанорідини	221

3.5.3	Стаціонарний режим конвекції з урахуванням холлівського струму в тонкому шарі нанорідини	226
3.6	Висновки до розділу 3	231
4	Теплова конвекція в електропровідних середовищах, що обертаються, в спіральному магнітному полі	234
4.1	Магнітна конвекція в електропровідному середовищі, що неоднорідно обертається, в зовнішньому спіральному магнітному полі .	235
4.1.1	Постановка задачі та загальне дисперсійне рівняння	236
4.1.1.1	Стаціонарний режим конвекції	237
4.1.1.2	Коливальний режим конвекції	239
4.2	Хаотична динаміка магнітної конвекції, що неоднорідно обертається, в спіральному магнітному полі	241
4.2.1	Рівняння 8D нелінійної динаміки	242
4.2.2	Комп'ютерне моделювання 8D лоренцеподібної хаотичної системи	246
4.3	Магнітна конвекція в шарі нанорідини, що нерівномірно обертається в спіральному магнітному полі	247
4.3.1	Постановка задачі та загальне дисперсійне рівняння	248
4.3.1.1	Стандартна МОН у тонких шарах нанорідини	249
4.3.1.2	Азимутальна МОН у тонких шарах нанорідини	252
4.3.1.3	Спіральна МОН у тонких шарах нанорідини	255
4.3.2	Стаціонарний режим конвекції в аксіальному магнітному полі	260
4.3.3	Стаціонарний режим конвекції у спіральному магнітному полі	261
4.4	Теплова конвекція в шарі пористого середовища, що обертається, насиченому нанорідиною під впливом спірального магнітного поля	264
4.4.1	Формулювання проблеми та загальне дисперсійне рівняння	265

4.4.2	Нестійкість у пористому шарі, що обертається, насиченому нанорідиною без градієнта температури	267
4.4.3	Стаціонарний режим конвекції	271
4.4.4	Аналіз стаціонарного режиму конвекції нанорідин із металевих та напівпровідникових наночастинок	277
4.5	Висновки до розділу 4	283
5	Процеси структуроутворення в неоднорідних середовищах з урахуванням термомагнітних явищ	285
5.1	Термомагнітні нестійкості в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається	290
5.1.1	Постановка задачі та рівняння еволюції малих обурень	291
5.1.2	Наближення локальної геометричної оптики та дисперсійне рівняння	293
5.1.3	Аналіз дисперсійного рівняння для випадку $\mathbf{V}_0 = 0$	294
5.1.4	Аналіз дисперсійного рівняння для випадку $\mathbf{V}_0 \neq 0$	300
5.1.4.1	Нестійкість для хвиль, що розповсюджуються в аксіальному напрямку $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k_z$	300
5.1.4.2	Нестійкість для хвиль, що розповсюджуються в радіальному напрямку $\mathbf{k} = \mathbf{e}_R k_R$	304
5.2	Генерація магнітного поля термомагнітними ефектами в тонкому шарі електропровідної рідини з неоднорідним обертанням	307
5.2.1	Рівняння еволюції малих збурень та загальне дисперсійне рівняння	308
5.2.2	Стаціонарний режим конвекції	309
5.2.3	Слабонелинейная конвективна нестійкість з урахуванням термомагнітних ефектів	315
5.3	Хаотична динаміка нелінійних рівнянь ТМ-динамо	319
5.3.1	Рівняння нелінійної динаміки для конвективного ТМ-динамо	319

5.3.2	Комп'ютерне моделювання рівнянь хаотичної динаміки (5.51)	321
5.4	Спонтанна генерація магнітних полів у тонких шарах стратифі- кованої плазми	323
5.4.1	Основні рівняння та постановка задачі	326
5.4.2	Лінійна стадія конвективної нестійкості з урахуванням спон- танної генерації магнітного поля	328
5.4.3	Квазілінійне насичення генерації магнітних полів	333
5.5	Генерація магнітних полів у неоднорідній повністю іонізований плазмі в зовнішньому постійному магнітному полі	337
5.5.1	Рівняння для амплітуд магнітного поля та температурних збурень	339
5.5.2	Збудження магнітного поля в однорідній замагніченій плазмі	341
5.5.3	Генерація магнітного поля в температурно-неоднорідній пла- змі	344
5.5.4	Генерація магнітного поля з градієнтами густини і темпе- ратури	346
5.6	Висновки до розділу 5	349
6	Біо-термальна конвекція у тонких шарах рідин	351
6.1	Біо-термальна конвекція в пористому шарі, який обертається, на- сиченому ньютонівською рідиною	354
6.1.1	Постановка задачі та основні рівняння	355
6.1.2	Обговорення результатів впливу обертання на біо-термальну конвекцію в моделі Дарсі-Брінкмана	357
6.2	Вплив гравітаційної модуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища	359
6.2.1	Опис задачі та основні рівняння	360
6.2.2	Обговорення чисельних результатів	363

6.3	Вплив наскрізного потоку та гравітаційної модуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища . . .	370
6.3.1	Постановка проблеми та нелінійне рівняння для амплітуди збурень	370
6.3.2	Обговорення чисельних результатів	373
6.4	Біо-термальна конвекція в пористому середовищі, насиченому нанорідиною, що містить гіротактичні мікроорганізми у зовнішньому магнітному полі	375
6.4.1	Постановка задачі та основні рівняння	376
6.4.2	Коливальний та стаціонарний режими конвекції	380
6.4.2.1	Коливальний режим конвекції	380
6.4.2.2	Стаціонарний режим конвекції	382
6.4.3	Аналіз слабонелінійної стійкості	384
6.4.3.1	Стаціонарна МГД-біоконвекція в нанорідині Al_2O_3 -вода	387
6.4.3.2	Стаціонарна МГД-біоконвекція у нанорідинах $Cu(Ag)$ -вода та $TiO_2(SiO_2)$ -вода	391
6.4.3.3	Чисельні результати для чисел Нуссельта $Nu(t)$ і $Sh(t)$ Шервуда	396
6.5	Біо-термальна конвекція у шарі пористого середовища з урахуванням модуляції гравітаційного поля та сили Коріоліса	399
6.5.1	Постановка проблеми та нелінійне рівняння Гінзбурга-Ландау	399
6.5.2	Обговорення чисельних результатів	401
6.6	Шестивимірна модель Лоренца для біо-термальної конвекції в шарі пористого середовища під впливом гравітаційної модуляції, обертання та внутрішнього нагріву	402
6.6.1	Опис проблеми та математичної моделі	402
6.6.2	Обговорення чисельних результатів	408

6.7	Вплив термомодуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію з термотактичними мікроорганізмами	410
6.7.1	Постановка задачі та основні рівняння	411
6.7.2	Обговорення чисельних результатів	415
6.8	Висновки до розділу 6	419
	Висновки	422
	Список використаних джерел	427
	Додаток	457

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

$6D$	шестивимірна динамічна система
$8D$	восьмивимірна динамічна система
ТМ-нестійкість	термомагнітна нестійкість
ВВС	великомасштабні вихрові структури
ВМП	великомасштабні магнітні поля
ГД	гідродинамічний
МГД	магнітогідродинамічний
Розділи 1,2,3	
е.р.с.	електрорушійная сила
АКА-ефект	анізотропний кінетичний α -ефект
F_0	зовнішня дрібномасштабна сила
f_0	амплітуда зовнішньої сили
t_0	характерний часовий масштаб зовнішньої сили
λ_0	характерний просторовий масштаб зовнішньої сили
ω_0	частота коливань зовнішньої дрібномасштабної сили
k_0	хвильове число зовнішньої дрібномасштабної сили
α	альфа-ефект у динамо-моделях
R_{ij}	напруження Рейнольдса
R	число Рейнольдса
Ω	кутова швидкість обертання
D	безрозмірний параметр обертання
\mathbf{W}	вектор великомасштабної швидкості
\mathbf{v}_0	дрібномасштабне поле швидкості

Γ	інкремент великомасштабної нестійкості
K	хвильові числа великомасштабних збурень
H	великомасштабне магнітне поле
σ	коефіцієнт електропровідності
Q	число Чандрасекара
R_{aut}	автокореляційна функція
Ra	число Релея
\bar{B}	зовнішнє постійне магнітне поле
A_T	постійний градієнт
β_T	коефіцієнт теплового розширення
Ro	число Россбі
ψ	гідродинамічна функція тока
ϕ	магнітна функція тока
ΔNu	варіації числа Нуссельта
Розділи 4,5,6	
Rb	магнітне число Россбі
МОН	магнітообертальна нестійкість
АМОН	азимутальна магнітообертальна нестійкість
СМОН	спіральна магнітообертальна нестійкість
α	коефіцієнт питомої термо е.р.с.
(δT)	різниця температур нижньої та верхньої межі шару електронної рідини
ω_g	частота гравітаційної модуляції
δ	амплітуда модуляції
α_0	ексцентриситет клітини мікроорганізму
W_c	середня швидкість плавання мікроорганізмів
Sh	число Шервуда

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Одним із провідних напрямів сучасних досліджень гідродинамічних середовищ є вивчення механізмів виникнення впорядкованих та хаотичних просторово-часових структур у середовищах, що перебувають під дією зовнішніх впливів. Формування таких структур відбувається як у класичних, так і в складних середовищах, зокрема - у нанорідинах, рідинах в пористих матрицях, середовищах з мікроскопічними саморухомими об'єктами, а також у плазмових системах. У кожному з цих випадків спостерігається широкий спектр явищ, що охоплюють нестійкості, локалізовані моди, автоколивальні процеси, турбулентні режими та самоорганізовані структури.

Теоретичні основи вивчення структуроутворення в гідродинамічних середовищах були закладені в класичних роботах Ландау [1], Лайтхілла [2] та інших піонерів у галузі гідродинамічної стійкості. Подальший розвиток отримали завдяки працям Кроса та Хохенберга [3], які запропонували універсальний підхід до опису утворення структур поблизу порогу нестійкості. Сучасне розуміння нелінійної динаміки структур значною мірою базується на роботах Ньюелла та Уїтхема [4], а також на концепціях, розвинутих у монографії Маневвілля [5].

Особливої уваги потребує аналіз нелінійних структур, які не піддаються опису в рамках лінійних теорій через складні взаємодії, що відбуваються між різними модами збурень. Такі структури суттєво впливають на ефективні властивості середовища, зокрема теплоперенесення та масообмін, і водночас самі можуть бути чутливими до змін зовнішніх впливів. Нелінійні ефекти в конвективних системах детально розглянуто в монографіях Гетлінга [6] та Буссе [7], які показали важливість врахування взаємодії між різними модами збурень для правильного опису складних конвективних режимів.

Дослідження процесів структуроутворення в різноманітних середовищах є важливим і динамічно зростаючим напрямком сучасної науки. Одними з пер-

ших та практично значущих середовищ, у яких ці дослідження почали активно розвиватися, були пов'язані з генерацією великомасштабних вихрових і магнітних полів. Фундаментальні роботи Штеенбека, Краузе та Редлера [8], а також Паркера [9] заклали основи теорії динамо [10–12] та показали можливість генерації магнітних полів турбулентними рухами електропровідного середовища.

Відомо, що в астрофізичних умовах плазма перебуває в турбулентному стані. Останнім часом отримано нові дані щодо властивостей дрібномасштабної структури турбулентності, яка тісно пов'язана з великомасштабними потоками. Зокрема, описано такі явища, як самоорганізація дрібномасштабних вихрових структур у великомасштабні утворення, а також кластеризація вихрових і магнітних структур. Ці процеси детально розглянуті в роботах Фріша [13], Моніна та Яглома [14], а також у сучасних оглядах Тобіаса та інших [15].

Дослідження генерації великомасштабних вихрових і магнітних структур спіральною турбулентністю в гідродинамічних середовищах ведуться вже кілька десятиліть. Отримано низку важливих експериментальних підтверджень реалізації магнітогідродинамічного α -ефекта в роботах Гайлітіса та співавторів [16], а також у дослідженнях групи Стіглица [17]. Теоретичні аспекти цих ефектів розглянуті в монографії Зельдовича та ін. [18], а також Краузе та Редлера [19].

Однак досі відсутня повноцінна самоузгоджена нелінійна теорія генерації вихрових та магнітних структур у плазмових середовищах, що викликає значний інтерес до цієї проблематики в контексті фундаментальних досліджень. Особливо актуальними є питання, пов'язані з нелінійним насиченням динамо-процесів та їх зворотним впливом на турбулентну структуру середовища, які розглядаються в сучасних роботах Бранденбурга [20] та Чайлдреса і Соварда [21].

З появою активної матерії та нових гідродинамічних середовищ, таких як біо- та нанорідина, природно виникає потреба у вивченні можливостей гене-

рації нелінійних структур у таких складних середовищах. Теоретичні основи поведінки нанорідин закладені в роботах Чоя [22] та Істмана і співавторів [23], які показали аномальне підвищення теплопровідності при додаванні наночастинок. Гідродинамічні властивості нанорідин детально вивчені Буонджорно [24], який запропонував модель, що враховує броунівський рух та термофорез наночастинок.

Очевидно, що в подібних середовищах можуть з'явитись нові фізичні ефекти, зумовлені їх мікроструктурою та специфічними властивостями наночастинок. Такі середовища є перспективними з точки зору широкого спектра промислових застосувань. Конвективні процеси в нанорідинах розглянуті в роботах Цоу [25], Нілда та Куцнецова [26], які показали можливість як стабілізації, так і дестабілізації конвекції залежно від властивостей наночастинок.

Особливий інтерес становлять також пористі середовища, які, завдяки своїй складній внутрішній геометрії, є ще більш привабливими як з позицій фундаментальних проблем, так і з огляду на потенціал практичного застосування. Конвективні процеси в пористих середовищах систематично розглянуті в монографіях Нільда та Бежана [27], а також Інгама та Попа [28]. Ефекти локальної термічної нерівноважності між твердою матрицею та рідиною детально вивчені в роботах Мінковича та Калурі [29].

Важливим напрямом сучасної фундаментальної науки є дослідження впливу зовнішніх змінних полів на біоконвективні процеси за участю мікроорганізмів з різною природою таксису. Піонерські роботи з біоконвекції виконані Плеттом [30] та Чайлдресом і співавторами [31], які показали можливість утворення регулярних структур за рахунок колективної поведінки мікроорганізмів. Сучасні дослідження біоконвективних процесів представлені в оглядах Педлі та Кесслера [32], а також Хілла та Педлі [33].

Додатковий інтерес до проблеми структуроутворення викликають активні середовища, що складаються з саморухомих частинок. Теоретичні основи ди-

наміки таких систем розвинуті в роботах Тонера та Ту [34], а також Шейка та ін. [35]. Колективні ефекти в активних середовищах детально розглянуті Мартіном-Гомезом і співавторами [36] та в оглядах Марчетті та ін. [37].

Знання, здобуті в ході таких досліджень, можуть сприяти прогресу в екології, біотехнологіях, медицині, геології та матеріалознавстві. Зокрема, розуміння процесів перемішування в біоконвективних системах має важливе значення для оптимізації біореакторів [38], а вивчення транспортних процесів в активних середовищах може привести до створення нових типів мікрорідинних пристроїв [39].

Окремої уваги заслуговують дослідження впливу зовнішніх полів на процеси структуроутворення. Ефекти магнітного поля на конвективні процеси в електропровідних рідинах систематично вивчені в роботах Чандрасекара [40] та Хьюза і Проктора [41]. Вплив електричного поля на конвекцію в діелектричних рідинах розглянуто в монографії Мелчера [42] та в роботах Тернбулла і Мелчера [43]. Модуляційні ефекти, пов'язані з періодичною зміною зовнішніх параметрів, детально досліджені Девісом [44] та Бхадаурія [45]. Показано, що такі впливи можуть як стабілізувати, так і дестабілізувати основний стан системи, приводячи до утворення нових типів структур. Сучасні експериментальні методи дослідження конвективних структур, включаючи техніки візуалізації потоків та вимірювання температурних полів, детально описані в роботах Кошмейдера [46] та Екхауса [47]. Ці методи дозволяють проводити детальні порівняння з теоретичними передбаченнями та виявляти нові фізичні ефекти.

Таким чином, незважаючи на значну увагу до проблеми структуроутворення, вичерпна класифікація та опис нелінійних режимів у середовищах із різною фізичною природою залишаються відкритими питаннями. Отже, **актуальність дисертаційної роботи** обумовлена потребою проведенню досліджень взаємозв'язку між зовнішніми полями (магнітними, гравітаційними, температурними градієнтами) та формуванням просторово-часових структур. У цьому

контексті науково обґрунтованим є проведення системного аналізу умов виникнення нелінійних структур у різнорідних гідродинамічних середовищах, а також вивчення їх еволюції, стійкості та чутливості до зовнішніх впливів. Такий підхід дозволить не лише поглибити фундаментальне розуміння процесів самоорганізації в складних системах, але й створити теоретичну основу для розробки нових технологічних рішень у галузях енергетики, матеріалознавства, біотехнологій та екології.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відділі конденсованого стану речовини Інституту монокристалів Національної академії наук України та є складовою частиною таких наукових проєктів:

- 1) "Визначення фундаментальних закономірностей поведінки дефектних структур у мезо-та наносистемах і встановлення електромагнітних властивостей двовимірних кристалів, гетероструктур та метаматеріалів на їх основі"(шифр "НАНОДЕФЕКТ" номер держреєстрації 0116U001182, термін виконання 2016-2018рр.);
- 2) "Оптичні властивості кристалічних наноструктурних, дефектних матеріалів"(шифр "НАНОКЛАСТЕР" номер держреєстрації 0119U100673, термін виконання 2019-2021 рр.);
- 3) "Дослідження фундаментальних властивостей наноструктурованих систем та середовищ"(шифр "НАНОСТРУКТУРА" номер держреєстрації 0122U001499, термін виконання 2022-2024 рр.).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка теорій та виявлення закономірностей генерації нелінійних структур у гідродинамічних середовищах різної природи під впливом зовнішніх полів, а також дослідження механізмів їх формування, стабілізації та динамічної еволюції. Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити такі завдання:

1. Визначити механізми генерації великомасштабних вихрових структур у се-

редовищах різної природи, що обертаються, під впливом зовнішньої дрібномасштабної сили. Встановити умови виникнення великомасштабних нестійкостей та локалізованих вихрових структур у таких середовищах:

- а) однорідних рідинах або газах;
- б) температурно-стратифікованій рідині або газі;
- в) газоподібному середовищі з наявністю водяної пари (вологій атмосфері);
- г) рідинах із концентрацією наночастинок.

2. Розробити теорію нелінійного магніто-вихрового динамо, тобто самоузгоджені нелінійні теорії генерації вихрових і магнітних структур:

- а) в електропровідних середовищах, що обертаються;
- б) в електропровідному середовищі з температурним градієнтом;
- в) в електропровідному середовищі, яке похило обертається, з температурним градієнтом у зовнішньому постійному магнітному полі;
- г) в температурно-стратифікованій замагніченій плазмі з урахуванням термомагнітних ефектів.

3. Розробити теорію слабонелінійної конвекції в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається під дією зовнішнього аксіального та спірального магнітного поля, а також провести комп'ютерне моделювання хаотичної динаміки магнітних полів у такій рідині.

4. Розвинути слабонелінійну теорію конвективної нестійкості в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається, з урахуванням модуляції зовнішніх полів.

5. Визначити умови реалізації гідромагнітних нестійкостей у тонких шарах нанорідини, що неоднорідно обертається у спіральному магнітному полі.

6. Виявити вплив зовнішнього спірального магнітного поля на конвективну нестійкість у шарі пористого середовища, що обертається і насичене електропровідною нанорідиною, що містить металеві, металооксидні, напівпровідникові наночастинок.

7. Виявити нові типи термомагнітних нестійкостей в тонких шарах електропровідної рідини, що неоднорідно обертається.
8. Розробити теорію слабонелінійної конвекції в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається з урахуванням термомагнітних ефектів.
9. Розробити теорію процесів структуроутворення внаслідок спонтанної генерації магнітних полів у стратифікованій плазмі.
10. Отримати умови реалізації термомагнітних нестійкостей у повністю іонізованій плазмі у зовнішньому постійному магнітному полі.
11. Розробити теорію процесів біо-термальної нестійкості в пористому шарі, що обертається та насиченому ньютонівською рідиною.
12. Дослідити вплив зовнішнього магнітного поля на процеси біо-термальної конвекції в пористому середовищі, насиченому нанорідиною та з наявністю гіротактичних мікроорганізмів.
13. Побудувати теорію слабонелінійної біо-термальної конвекції в шарі пористого середовища з урахуванням ефектів обертання, скрізного потоку, внутрішнього нагріву та гравітаційної модуляції.
14. Дослідити ефекти термомодуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію з термотактичними мікроорганізмами в шарі рідини.

Об'єктом дослідження є процеси самоорганізації в гідродинамічних середовищах під впливом зовнішніх полів.

Предметом дослідження є процеси формування нелінійних когерентних структур, що виникають унаслідок гідродинамічної нестійкості в різних типах середовищ із мікро- та наноструктурованими властивостями, зокрема в нанорідинах, рідинах у пористих середовищах, активних середовищах з мікроорганізмами, а також у плазмі.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених наукових завдань було використано аналітичні методи, зокрема метод багатомасштабних асимптотичних розкладів, методи теорії збурень, математичної фізики, теорію детермі-

нованого хаосу, якісний аналіз динамічної поведінки диференціальних систем рівнянь. Крім того, застосовувалося чисельне моделювання із використанням сучасного математичного і фізичного програмного забезпечення, зокрема: *Maple*, *Mathematica*, *Matlab-Simulink*, *LabVIEW*, *Multisim*, *Proteus*.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації встановлено механізми формування нових класів нелінійних структур у різноманітних гідродинамічних середовищах з урахуванням комплексного впливу зовнішніх полів. Вперше запропоновано строгий теоретичний підхід до опису процесів структуроутворення в турбулентних середовищах різної фізичної природи, який базується на методі багатомасштабних асимптотичних розкладів. Вперше проблему теплової конвекції розглянуто з урахуванням впливу важливих факторів неоднорідного обертання середовища та спірального магнітного поля. Вплив цих полів на процеси структуроутворення в середовищах з пасивною (наночастинки) та активною матерією (саморухливі мікроорганізми) раніше в літературі не розглядалося. Основні результати, що мають наукову новизну, формулюються у вигляді таких положень:

1. Вперше аналітично отримано критерії для виникнення нелінійного гідродинамічного та магнітогідродинамічного α -ефектів у рамках розробленої в дисертації самоузгодженої теорії нелінійного динамо.
2. Чисельним методом знайдено нові типи локалізованих великомасштабних вихрових та магнітних структур у вигляді нелінійних хвиль і спіральних кінків, які виникають у середовищі під дією зовнішньої дрібномасштабної сили.
3. Вперше аналітично отримано критерії для критичних чисел Релея в задачі магнітної конвекції електропровідної рідини, що неоднорідно обертається у постійному вертикальному (аксіальному) та спіральному магнітному полі з нетривіальною топологією. Показано, що поріг виникнення магнітної конвекції в аксіальному полі залежить від профілю обертання (числа Россбі, Ro); у спіральному полі - від профілю азимутального магнітного поля (магнітного числа

Россбі, Rb).

4. Встановлено, що при $Ro > 0$ обертання стабілізує конвекцію, а при $Ro < 0$ – дестабілізує її. Зворотна ситуація спостерігається для спіральної магнітної конвекції: при $Rb > 0$ – дестабілізація, при $Rb < 0$ – стабілізація.

5. Вперше встановлено, що наявність наночастинок у середовищі знижує граничне значення стаціонарного критичного числа Релея Ra_{min} як в аксіальній, так і в спіральній магнітоконвекції, що вказує на суттєвий вплив дисперсної фази на процеси втрати стійкості.

6. Розроблено слабонелінійну теорію аксіальної та спіральної магнітної конвекції в електропровідному середовищі, що неоднорідно обертається, яка описується новими 6D та 8D динамічними системами типу Лоренца. Чисельним аналізом виявлено режими регулярної та хаотичної поведінки, зокрема встановлено умови виникнення інверсій збурених (хаотичних) магнітних полів. Розроблено електронні схеми генераторів хаотичних коливань на основі нових 6-мірних (6D) та 8-мірних (8D) динамічних систем типу Лоренца, які були апробовані в середовищі Multisim та експериментально реалізовані на мікроконтролері Arduino.

7. Розроблено теорію магнітної конвекції в електропровідному середовищі, що неоднорідно обертається з урахуванням термомагнітних ефектів, у межах якої отримано 6D динамічну систему рівнянь, що описує механізм генерації магнітного поля. Зазначена система є альтернативною до моделі Рікітаке, що використовується в теорії геомагнетизму. З неї виведено нелінійне рівняння типу Гінзбурга-Ландау, розв'язки якого демонструють вихід на стаціонарний рівень магнітного поля за рахунок конвективного механізму генерації. Чисельний аналіз показав, що ефекти неоднорідності коефіцієнта питомої термо е.р.с. і Ледюка-Рігі істотно впливає на генерацію магнітного поля, змінюючи характер перехідних процесів і умови виникнення хаосу. Крім того, встановлено наявність хаотичних режимів у 6D моделі термомагнітного динамо, на основі якої розроблено та протестовано електронну схему генератора хаотичних коли-

вань, успішно реалізовано на мікроконтролері Arduino.

8. Вперше отримано аналітичні вирази для інкрементів термомагнітної нестійкості (ТМ-нестійкості) у повністю іонізованій плазмі, що перебуває у зовнішньому магнітному полі, з урахуванням плавних градієнтів густини та температури. Визначено, що за відсутності зовнішнього магнітного поля така нестійкість є неефективною, оскільки магнітотеплові збурення згасають. Натомість у замагніченій плазмі виявлено область параметрів, у якій розвивається ТМ-нестійкість.

9. У рамках розробленої теорії слабонелінійної біо-термальної конвекції встановлено, що процеси тепло- та масопереносу в середовищах з активною матерією можуть ефективно керуватися шляхом гравітаційної модуляції (для рідин із гіротактичними мікроорганізмами) та теплової модуляції (для рідин із термотактичними мікроорганізмами). Встановлено, що гіротактичні мікроорганізми сферичної форми істотно посилюють розвиток біотермальної конвекції за наявності модуляції гравітаційного поля.

Обґрунтованість та достовірність наукових положень, висновків та рекомендацій. Обґрунтованість та достовірність основних положень, отриманих у дисертаційній роботі результатів, підтверджується:

1. Використанням сучасних аналітичних та чисельних методів дослідження, зокрема методу багатомасштабного розкладу, теорії слабонелінійної конвекції, асимптотичних методів, а також методів нелінійної динаміки і теорії стійкості.
2. Побудовою нових динамічних моделей, які є узагальненням класичних моделей типу Лоренца, Гінзбурга-Ландау, та описують складні процеси у гідродинамічних середовищах з урахуванням впливу зовнішніх полів, просторової неоднорідності та властивостей середовища.
3. Коректним математичним виведенням аналітичних виразів для критичних параметрів нестійкості, інкрементів збурень, ефективних транспортних коефіцієнтів (теплопровідність, масоперенос тощо) в умовах впливу аксіальних і спіральних магнітних полів, обертання та модуляцій.

4. Результатами чисельного моделювання, виконаного для широкого діапазону параметрів, що підтверджують існування нелінійних структур, хаотичних режимів та генерації магнітних полів. Обчислювальні експерименти проводились із використанням широкого спектру засобів комп'ютерних методів.
5. Порівнянням отриманих результатів із відомими частковими випадками, що надає узагальнення класичних результатів і підтверджує коректність запропонованих моделей.
6. Фізичною інтерпретацією та узгодженістю результатів із експериментальними і природними спостереженнями, зокрема щодо впливу обертання, магнітних полів та наночастинок на тепломасообмін і нестійкості.
7. Реалізацією розроблених моделей у вигляді фізичних електронних схем, апробованих у середовищах моделювання (Multisim) та на апаратному рівні з використанням мікроконтролерів Arduino, що підтверджує прикладну значущість теоретичних моделей.

Практичне значення отриманих результатів.

Отримані в дисертаційній роботі результати мають широкі перспективи практичного застосування в різних галузях науки та техніки. Зокрема, вони можуть бути використані для:

1. Пояснення походження великомасштабних вихрових структур у природних гідродинамічних середовищах, таких як тайфуни, спіральні солітоноподібні структури в фотосфері Сонця, а також спіральні структури галактик.
2. Інтерпретації явища спонтанної генерації магнітних полів у масивних зорях та у тонкій оболонці нейтронних зір, де спостерігаються високі температури.
3. Аналізу формування конвективних структур у гарячих акреційних дисках, що супроводжують компактні астрофізичні об'єкти (нейтронні зорі, чорні діри).
4. Моделювання процесів генерації магнітних полів в електропровідних середовищах та плазмі на основі нових багатовимірних (6D та 8D) динамічних систем

типу Лоренца, з урахуванням впливу обертання, градієнтів температури та зовнішніх полів.

5. Розробки компактних пристроїв генерації хаотичних сигналів, які можуть бути застосовані в системах захищеного зв'язку, генерації випадкових чисел, а також у навчальних цілях для демонстрації властивостей нелінійної динаміки.

6. Оптимізації теплообміну в нанорідинних середовищах, що може бути використано при проектуванні ефективних теплообмінників, систем транспортування і виробництва теплової енергії, а також у сучасних біомедичних технологіях — зокрема для діагностики та лікування онкологічних захворювань із використанням локального нагріву наночастинками.

7. Контролю самоструктуризації у біологічних середовищах, включаючи біореактори, системи очищення води, моделі росту колоній бактерій і клітинних культур.

8. Розробки автономних мікроскопічних саморухомих пристроїв, які можуть використовуватися для адресної доставки ліків, хіміотерапії, внутрішньої діагностики, а також моніторингу навколишнього середовища на мікро- та нанорівнях.

Особистий внесок здобувача. Здобувач зробив вагомий внесок на всіх етапах виконання дослідження. В роботах [1]-[2], [4]-[13] де дисертант є першим автором, ним самостійно або у співпраці було сформульовано постановку задач, виконано аналітичні та чисельні обчислення, проведено аналіз отриманих результатів, здійснено написання та підготовку статей до публікації, а також підготовлено відповіді на зауваження рецензентів. В роботах [3], [14], [21] здобувачу належать постановка задачі, проведення чисельного моделювання, написання та оформлення статей для публікації. В роботах [15]-[20], [22]-[31] автору належать формулювання наукових задач, аналітичне та чисельне опрацювання, аналіз результатів, написання текстів статей, їх підготовка до публікації, а також підготовка відповідей на зауваження рецензентів. Тези доповідей [32]-[36],

[38] виконані здобувачем самостійно; [37], [39] у співпраці.

Апробація результатів дисертаційної роботи. Основні результати дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на наукових семінарах Інституту монокристалів Національної академії наук України, а також на низці вітчизняних і міжнародних наукових конференцій, зокрема:

- XIII International Conference "PLASMA ELECTRONICS AND NEW METHODS OF ACCELERATION"(Kharkiv, Ukraine, 24-28 August, 2015);

- XIV International Conference "PLASMA ELECTRONICS AND NEW ACCELERATION METHODS"(Kharkiv, Ukraine, 27-31 August, 2018);

- VII International Conference "Modern Problems of Physics"(Dushanbe, 9-10 October, 2020);

- XXXII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я.

MicroCAD-2024 (Kharkiv, Ukraine, 22-25 May, 2024)- 2 доповіді;

- 83rd International Scientific Conference of the University of Latvia "Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations"(Riga, Latvia, 29 January, 2025);

- XXXIII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я.

MicroCAD-2025 (Kharkiv, Ukraine, 14-17 May, 2025);

- X International Scientific-Practical Conference Physical and Technological Problems of Transmission, Processing and Storage of Information in Infocommunication Systems (Chernivtsi, Ukraine, 15-17 May, 2025).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 30 статтях у міжнародних та вітчизняних наукових виданнях, 8 тезах доповідей на наукових конференціях, а також в одному розділі збірника наукових праць. Серед опублікованих робіт: 3 статті надруковано в наукових журналах першого квартилю (Q1), 5 — у журналах другого квартилю (Q2), 9 — у виданнях третього квартилю (Q3) та 12 — у виданнях четвертого квартилю (Q4) відповідно до

класифікації SJR (SCImago Journal Rank). Усього за матеріалами дисертації опубліковано 39 наукових праць.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг роботи становить 462 сторінки, з яких основна частина викладена на 388 сторінках. Дисертація містить 143 рисунка, з яких 2 на 1 сторінці, 8 таблиць і список використаних джерел, що налічує 290 найменувань на 30 сторінках.

РОЗДІЛ 1

ВИХРОВЕ ДИНАМО У СЕРЕДОВИЩАХ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ

Ефекти обертання рідинних середовищ відіграють важливу роль для багатьох практичних застосувань та природних явищ [48]. Особливо важливе значення вони набувають в геофізиці та астрофізиці [49–52], де доводиться мати справу з об'єктами, які обертаються, наприклад, такими як Земля, Юпітер, Сонце, галактики та інші. У рухомих рідинах можуть бути збуджені різноманітні хвильові і вихрові рухи. Наприклад, гіроскопічні хвилі, хвилі Россбі, внутрішні хвилі, локалізовані вихори та когерентні вихрові структури. Великомасштабні вихрові структури викликають найбільший інтерес, оскільки вони забезпечують ефективний перенос енергії, імпульсу та моменту імпульсу. Під великомасштабними структурами розуміють структури, чиї характерні масштаби значно перевищує масштаби турбулентності або масштаби зовнішньої сили, яка збуджує турбулентність. Вивчення проблеми генерації великомасштабних вихрових структур (ВВС) є дуже важливим для численних геофізичних та астрофізичних проблем, таких як проблема походження Великої Червоної Плями Юпітера, суперротація Венери, вихрові структури на Сонці, спіральна структура галактик тощо [53, 54]. До геофізичних проблем належать дослідження генерації ВВС, таких як тропічні циклони (тайфуни), торнадо, тощо. Ці ВВС відіграють важливу роль у глобальній циркуляції атмосфери, що є дуже важливим для прогнозу погоди та клімату на нашій планеті [55, 56]. Ефект генерації ВВС в турбулентності називається вихровим динамо.

Згідно з локальною теорією турбулентності Колмогорова-Обухова, великомасштабні порушення однорідності та ізотропії відновлюються на малих масштабах турбулентного потоку. У зв'язку з цим виникає важливе питання: чи може така турбулентність підсилювати великомасштабні збурення? В магнітогідродинаміці на це питання відповідь була отримана раніше. У роботі [8] було доведено, що початково однорідна, ізотропна та дзеркально-симетрична турбу-

лентність не може підсилювати великомасштабні магнітні поля. Однак, якщо дзеркальна симетрія турбулентності порушена, таке середовище може підсилити великомасштабне магнітне поле $\overline{\mathbf{H}}$. Процес посилення великомасштабного поля відбувається через виникнення турбулентної електрорушійної сили (е.р.с.), пропорційної середньому магнітному полю $\mathcal{E} = \alpha \overline{\mathbf{H}}$, а коефіцієнт α пропорційний середньої спіральності векторного поля швидкості: $\alpha \sim \overline{\mathbf{v}^T \text{rot} \mathbf{v}^T}$. Явище генерації великомасштабних магнітних полів однорідною, ізотропною, але дзеркально-асиметричною (спіральною) турбулентністю, відкрите у роботі [8], отримало назву α -ефект. На основі цього ефекту була розроблена теорія динамо [11, 12] завдяки зусиллям багатьох дослідників, яка пояснює виникнення магнітних полів у різних астрофізичних об'єктах: Земля, планети, Сонце, галактики тощо. Спіральна турбулентність характеризується порушенням дзеркальної симетрії вихрового поля, для якої $\overline{\mathbf{v}^T \text{rot} \mathbf{v}^T} \neq 0$ є ненульовою. Таке турбулентне вихрове поле характеризується тим, що правообертальні та лівообертальні вихори спостерігаються з різною ймовірністю, тобто є більше вихорів одного типу, ніж іншого.

Концепція вихрового динамо була розроблена вперше в роботах [57], де була запропонована гіпотеза, що спіральна турбулентність може генерувати великомасштабні вихори. Ця гіпотеза базувалась на подібності рівнянь індукції магнітного поля та вихору в гідродинаміці. У роботі [57] була сформульована гіпотеза, що спіральна турбулентність може генерувати вихори, подібно до великомасштабного магнітного поля в магнітогідродинаміці. Фізична сутність цього явища полягає у зворотньому каскаді передачі енергії від малих вихорів до більших. Однак у роботі [58] було доведено, що однорідна ізотропна спіральна турбулентність у нестислій рідині не може генерувати великомасштабні вихори. Причина негативного ефекту полягає в певній симетрії тензора напружень Рейнольдса в осередненому рівнянні Нав'є-Стокса. Тензор напружень Рейнольдса є лінійним функціоналом середнього вектору швидкості (для слабких полів),

який може бути представлений у вигляді ряду

$$\overline{v_k^t \nabla_k v_i^t} = \nabla_k \left(\overline{v_k^t v_i^t} \right) = T_i^{(0)} + T_{ik}^{(1)} V_k + T_{ikl}^{(2)} \nabla_k V_l + \dots,$$

де коефіцієнти розкладу тензорів $T^{(n)}$ залежать від моментів турбулентних полів. Якщо тензор $\overline{v_k^t v_i^t}$ симетричний за індексами, то тензор $T_{ikl}^{(2)}$ також повинен бути симетричним за індексами i, k і не виражається через антисиметричний тензор ε_{ikl} . Тензор третього рангу не може бути побудований лише з тензорів Кронекера δ_{ik} тому гідродинамічний α -ефект відсутній в однорідній ізотропній турбулентності нестислої рідини. Однак, зворотний каскад енергії в спіральній турбулентності є можливим. Це вимагає додаткового порушення симетрії напружень Рейнольдса. Ефект генерації великомасштабних вихорів пов'язаний з появою додатка $\alpha\Omega$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \alpha \operatorname{rot} \Omega = \nu \Delta \Omega,$$

де $\alpha \sim \overline{\mathbf{v}^T \operatorname{rot} \mathbf{v}^T}$ виражається через спіральність турбулентності, $\Omega = \operatorname{rot} \mathbf{V}$, \mathbf{V} - великомасштабне поле швидкості рідини, ν - кінематична в'язкість турбулентності. Цей ефект називається гідродинамічним альфа-ефектом. Далі розвиток теорії вихрового динамо базувався на пошуку додаткових факторів, які порушують симетрію рівнянь. Цими факторами, крім стисливості середовища, є, наприклад, неоднорідний потік [59], градієнт температури в полі тяжіння [52].

Слід зауважити, що вільна конвекція або тепломасоперенос речовини в полі сили тяжіння відіграє особливу роль у процесах генерації ВВС в атмосфері Землі та інших планет. Турбулентна теорія вихрового динамо [59, 60] демонструє існування великомасштабної нестійкості в конвективних системах із дрібномасштабною спіральною турбулентністю, що призводить до формування єдиної конвективної комірки, яку інтерпретують як великий вихор на кшталт тропічного циклону. Ця теорія знайшла підтвердження у низці числових та аналітичних розрахунках [61]. Великомасштабна нестійкість вихорів у турбулентних потоках, що обертаються була досліджена в багатьох роботах [62–64].

Таким чином, при вивченні турбулентних систем, що обертаються здійснювалися спроби застосувати отримані результати до теорії виникнення тропічних циклонів. Лінійна теорія вихрового динамо [58–64] найкраще розвинута в рамках статистичного підходу, який також використовує наближення кореляцій другого порядку. Таким чином, виникло питання про механізми насичення великомасштабної нестійкості та появи стаціонарних вихрових структур. Однак побудова нелінійної теорії вихрового динамо в рамках статистичної теорії має великі труднощі, які пов'язані із проблемою замикання осереднених рівнянь.

Так з'явилася перша нелінійна теорія вихрового динамо в рамках динамічного підходу, заснованого на методі багатомасштабних асимптотичних розкладань. В роботі [65] вперше метод багатомасштабних асимптотичних розкладів застосовувався для опису генерації ВВС у нестислій, інваріантній турбулентності. У цій роботі було показано, що порушення парності на малих масштабах турбулентності призводить до великомасштабної нестійкості, так званого анізотропного кінетичного α -ефекту (АКА ефекту). В іншій роботі [66] досліджувалися зворотний каскад енергії та нелінійна насиченість нестійкості. Нестійкість гідродинамічного альфа-ефекту, отриманого в рамках динамічного підходу, можна інтерпретувати як новий тип параметричної нестійкості, що виникає внаслідок спеціального типу накачування (зовнішньої сили). Під впливом зовнішньої періодичної сили \mathbf{F}_0 на малих масштабах виникають флуктуації вектора швидкості \mathbf{v}_0 , нелінійна взаємодія яких впливає на великомасштабні збурення швидкості W . Напруження Рейнольдса $R_{ij} = \overline{v_i v_j}$ змінюються внаслідок великомасштабних збурень, і в лінійному наближенні можна розкласти у ряд Тейлора по градієнтам великомасштабної швидкості [67]:

$$R_{ij} = -\alpha_{ijl} W_l - \nu_{ijlm} \nabla_l W_m + \dots$$

Перший доданок відомий як анізотропний кінетичний α -ефект (АКА) [65], який описує генерацію ВВС. Таким чином, зовнішня сила, яка порушує парність на

малих масштабах, може призводити до нетривіальних змін у великомасштабному потоці. На відміну від [65], в [67] розглядається зовнішня сила малих масштабів, яка створює турбулентний потік з збереженням парності. У цьому випадку АКА-ефект відсутній, і динаміка малих великомасштабних збурень W визначається турбулентною в'язкістю. Хоча порушення парності є більш загальним поняттям, ніж спіральність, саме спіральність є поширеним механізмом порушення парності в гідродинамічному потоці. У роботах [68, 69] була розроблена нелінійна теорія конвективного вихрового динамо, де застосовувався метод багатомасштабних асимптотичних розкладів. Робота [68] є більш повною версією [69], в якій детальніше представлена лінійна теорія генерації ВВС. Число Рейнольдса дрібномасштабних рухів є параметром асимптотичного розкладу.

Цей метод дозволяє виділити головний порядок виникнення нестійкості зі всієї ієрархії збурень. Нелінійна стабілізація великомасштабної конвективної нестійкості, розглянута в [68, 69], призводить до утворення спіральних вихрових солітонів або кінків нового типу в рідині, навіть у випадку стійкої стратифікації. Структура рівнянь у [68, 69], що описують нестійкість в лінійному наближенні, подібна до рівняння АКА-ефекту. Але, на відміну від АКА-ефекту, α є функцією числа Релея Ra . Це означає, що в нестратифікованій рідині $Ra = 0$ нестійкість зникає. Крім того, в [68, 69] передбачалося наявність спіральної турбулентності, на відміну від [65, 66].

За допомогою методу багатомасштабних асимптотичних розкладів, в [70] була отримана нестійкість великомасштабного вихора у в'язкій рідині, що обертається під дією зовнішньої спіральної сили малих масштабів. У цій роботі також досліджувалася нелінійна стадія нестійкості та генерація вихрових кінків нового типу. Робота [70] була узагальнена на випадок вологої атмосфери в [71], що обертається, де було показано, що врахування ефектів стратифікації, таких як нагрівання температури та додаткове джерело випромінювання тепла конденсації, підсилює великомасштабні вихрові збурення. В [71] було до-

ведено, що спіральність малих масштабів поля швидкості вологої атмосфери, що обертається пояснюється не тільки дією сили Коріоліса, як в однорідному середовищі [71], але й стратифікацією вологої атмосфери. Ця обставина призводить до появи нової нестійкості типу α -ефекту, в результаті якої генеруються великомасштабні вихрові структури. Дослідження вихрового динамо з використанням методу багатомасштабних асимптотичних розкладів та динамічного підходу відкриває нові можливості для розуміння процесів генерації великомасштабних вихрових структур у різних середовищах. Ці дослідження поглиблюють наше розуміння ролі обертання, стратифікації та спіральності у формуванні складних гідродинамічних процесів у природних системах, зокрема в атмосфері, океанах, планетах та інших астрофізичних об'єктах. Виникнення спіральної турбулентності в природних умовах, зазвичай, пов'язують з впливом сили Коріоліса на турбулентний рух середовища [8], який спочатку був однорідним, ізотропним і неспіральним. Таким чином, виникає проблема появи самої спіральності. Природною гіпотезою є те, що сама спіральність виникає в результаті впливу сили Коріоліса на конвективну турбулентність. У цьому випадку великомасштабні нестійкості в атмосфері повинні виникати самоузгоджено, без додаткових припущень. Вперше питання про генерацію великомасштабних вихрових полів під дією дрібномасштабної сили з нульовою спіральністю $\mathbf{F}_0 \text{rot} \mathbf{F}_0 = 0$ у однорідному середовищі, що обертається, тобто без урахування конвективних явищ, розглядалося в роботі [72, 73], а з урахуванням конвективних явищ в [74–76]. Там було показано, що внаслідок розвитку великомасштабної нестійкості в середовищах з похилою віссю обертання виникають нелінійні хвилі Бельтрамі та локалізовані вихрові структури - кінки. Генерація ВВС через порогову великомасштабну нестійкість гідродинамічного α -ефекту має залежність від рівня спіральності. У зв'язку з цим, у роботі [77] було розпочато пошук великомасштабної вихрової нестійкості за атмосферними даними. У роботі [77] наведені результати числового моделювання самоорганізації спіраль-

ної волого-конвективної атмосферної турбулентності при формуванні тропічних циклонів. Особлива увага приділяється впливу початкових умов на генерацію спіральності в перші години експериментів. Ці дослідження сприяли застосуванню теорії вихрового динамо для діагностики моменту початку циклогенезу в сприятливому тропічному середовищі.

Питання про появу спіральності, що призводить до виникнення КВС, є центральним у будь-якому формалізмі. Важливою відмінністю цих формалізмів є те, що у статистичній турбулентності складно коректно відокремити дрібномасштабні рухи від великомасштабних, що призводить до проблеми впливу одних масштабів на інші та потребує використання додаткових гіпотез. Однак це можна зробити послідовно у багатомасштабному формалізмі. Усереднення за дрібномасштабними турбулентними пульсаціями (у статистичній теорії) та за дрібномасштабними рухами (у багатомасштабному методі) вказує на близькість цих теорій. Тому природно припустити, що середня спіральність, що виникає у статистичній теорії, є аналогічною середній спіральності у багатомасштабному методі.

1.1 Великомасштабна нестійкість у рідині, що обертається, під дією спіральної дрібномасштабної сили

Почнемо з обговорення великомасштабної нестійкості у рухомій в'язкій рідині під впливом малих зовнішніх сил, яка вперше була розглянута в роботі [70]. Малі зовнішні сили імітують дію дрібномасштабної турбулентності та підтримують турбулентні коливання на певному стаціонарному рівні. У роботі [70] доведено, що внаслідок розвитку великомасштабної нестійкості у рухомій рідині утворюються нелінійні великомасштабні спіральні вихрові структури, такі як вихрі Бельтрамі або локалізовані кинки з внутрішньою спіральною структурою.

1.1.1 Основні рівняння та постановка задачі

Розгляньмо рівняння руху нестисної рідини, що обертається, з зовнішньою силою \mathbf{F}_0 такого виду

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + 2[\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}] + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}_0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1.2)$$

де $\boldsymbol{\Omega}$ - постійна кутова швидкість обертання рідини, ν - в'язкість, ρ_0 - постійна щільність рідини. Вектор кутової швидкості обертання $\boldsymbol{\Omega}$ спрямований вздовж вісі z , а зовнішня сила \mathbf{F}_0 знаходиться в площині (x, y) , яка перпендикулярна до вісі обертання. Позначимо характерну амплітуду сили f_0 , а її характерний просторовий і часовий масштаби відповідно як λ_0 і t_0 . Зовнішня сила має такі властивості:

$$\mathbf{F}_0 = f_0 \mathbf{F}_0 \left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right), \operatorname{div} \mathbf{F}_0 = 0, \mathbf{F}_0 \operatorname{rot} \mathbf{F}_0 \neq 0. \quad (1.3)$$

Основна роль цієї сили полягає у створенні малих спіральних флуктуацій швидкості v_0 з низьким числом Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$. Іншими словами, ця сила підтримує стаціонарну дрібномасштабну спіральну турбулентність. Очевидно, що характерна швидкість v_0 , створена зовнішньою силою, має такі ж характерні масштаби:

$$v_0 = v_0 \left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right).$$

В безрозмірних змінних рівняння (1.1)–(1.2) набувають такого вигляду:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + R(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + [\mathbf{V} \times \mathbf{D}] + \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}_0, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1.5)$$

де $R = \frac{\lambda_0 v_0}{\nu}$ - число Рейнольдса, $D = \frac{2\Omega \lambda_0^2}{\nu}$ - безрозмірний параметр обертання на масштабі λ_0 , пов'язаний з числом Тейлора $Ta = D^2$, і є характеристикою ступеня впливу сил Кориоліса над в'язкими силами. Далі число Рейнольдса вва-

жатимемо малим $R \ll 1$ і будуватимемо за цим малим параметром асимптотичне розкладання. Параметр D вважаємо незалежним від схеми асимптотичного розкладання. Розглянемо таке формулювання проблеми. Будемо вважати зовнішню силу дрібномасштабною і високочастотною. Ця сила призводить до дрібномасштабних флуктуацій швидкості. Після усереднення швидкі осцилюючі флуктуації зникають. Однак, через малі нелінійні взаємодії у деяких порядках теорії збурень після усереднення можуть виникати ненульові члени. Це означає, що ці члени не є коливальними, а є великомасштабними та повільними. З формальної точки зору ці секулярними члени, будуть приводити до руйнування теорії збурень і тому для її існування потрібно занулення секулярних вкладів. Ці умови і є умовами коректності великомасштабного асимптотичного розкладання та дають рівняння для великомасштабних рухів. Подальшою нашою метою є знаходження та дослідження таких секулярних рівнянь, тобто рівнянь для великомасштабних збурень.

1.1.2 Рівняння еволюції великомасштабних збурень

Застосовуючи методику багатомасштабного асимптотичного розкладу [65] за малим числом Рейнольдса, у порядку R^3 отримуємо основне секулярне рівняння:

$$\partial_T W_{-1}^i - \Delta W_{-1}^i + \nabla_k \left(\overline{v_0^k v_0^i} \right) = -\nabla_i \overline{P}_1, \quad i = (1, 2, 3), \quad k = (1, 2, 3). \quad (1.6)$$

Рівняння (1.8) описує еволюцію великомасштабного вихрового поля \mathbf{W} , проте остаточне замикання цього рівняння відбудеться після розрахунку напруг Рейнольдса $\nabla_k \left(\overline{v_0^k v_0^i} \right)$. Для цього необхідно знайти розв'язки для дрібномасштабного поля швидкостей, використовуючи рівняння нульового наближення. У цьому наближенні поле швидкості знаходиться під впливом зовнішньої дрібномасштабної сили та сили Коріоліса. З урахуванням умов (1.3), виберемо

зовнішню силу в системі координат, що обертається, у наступному вигляді:

$$\mathbf{F}_0 = f_0 (\mathbf{i} \cos \phi_2 + \mathbf{j} \cos \phi_1), \quad F_0^z = 0, \quad (1.7)$$

де f_0 – амплітуда зовнішньої сили, $\phi_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{x} - \omega_0 t$, $\phi_2 = \mathbf{k}_2 \mathbf{x} - \omega_0 t$, $\mathbf{k}_1 = k_0 (1, 0, 1)$, $\mathbf{k}_2 = k_0 (0, 1, 1)$. Таким чином, зовнішня сила задається в площині (X, Y) , ортогональній осі обертання, і має нульову дивергенцію.

У рамках «квазідвовимірної» моделі, коли великомасштабні поля задовольняють геометрії задачі

$$\vec{W}_{-1} = (W_{-1}^x(Z), W_{-1}^y(Z), 0), \quad P_{-1} = \text{const} \quad (1.8)$$

і мають перевагу у великомасштабних похідних щодо Z

$$\nabla_Z \gg \nabla_X, \nabla_Y \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y},$$

рівняння (1.6) можна записати в координатному вигляді:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \frac{\partial}{\partial Z} \overline{w_0 u_0} = 0, \quad \partial_T W_2 - \Delta W_2 - \frac{\partial}{\partial Z} \overline{w_0 v_0} = 0. \quad (1.9)$$

де

$$\begin{aligned} \overline{w_0 u_0} &= -\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2}{16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2} + \\ &+ \frac{f_0^2}{2} \frac{D}{16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2}, \\ \overline{w_0 v_0} &= -\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2}{16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2} - \\ &- \frac{f_0^2}{2} \frac{D}{16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2}. \end{aligned}$$

При малих значеннях $W_{1,2}$ напруги Рейнольдса $\overline{w_0 u_0}, \overline{w_0 v_0}$ можна розкласти в ряд за параметром $W_{1,2}$. В результаті отримуємо лінеаризовані рівняння у

наступному вигляді:

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 = \alpha_1 \nabla_Z W_1 - \alpha_2 \nabla_Z W_2, \quad (1.10)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 = \alpha_1 \nabla_Z W_2 + \alpha_2 \nabla_Z W_1, \quad (1.11)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{f_0^2}{8} D^2 \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{f_0^2}{2} D \alpha, \quad \alpha = \frac{32 D^2 (10 - D^2)}{\left((D^2 + 6)^2 + 64 \right)^2}.$$

Рішення лінійної системи рівнянь (1.10)-(1.11) шукатимемо у вигляді плоских хвиль з хвильовим вектором \mathbf{K} , паралельним вісі OZ , тобто у вигляді:

$$W_{1,2} = A_{W_{1,2}} \exp(-i\omega T + iKZ). \quad (1.12)$$

Підставляючи (1.12) у систему рівнянь (1.10)-(1.11), отримуємо дисперсійне рівняння:

$$(-i\omega + K^2 - i\alpha_1 K)^2 - \alpha_2^2 K^2 = 0. \quad (1.13)$$

Дисперсійне рівняння (1.13) показує існування нестійких коливальних рішень з частотою коливань ω_K :

$$\omega_K = \frac{f_0^2}{8} D^2 \alpha K$$

та інкрементом нестійкості

$$\Gamma = \frac{f_0^2}{2} D \alpha K - K^2.$$

Нестабільність є великомасштабною, оскільки нестійкий член, відображений у нерівності $\frac{f_0^2}{2} D \alpha > K$, домінує над затуханням у великих масштабах. Максимальний приріст нестійкості $\gamma_{\max} = \alpha^2 f_0^4 D^2 / 16$ досягається на хвильовому векторі $K_{\max} = \alpha f_0^2 D / 4$. Таким чином, у розглянутому «турбулентному» середовищі з'являються і зростають експоненціально великомасштабні вихори. Можна очікувати, що стабілізація цієї нестійкості відбудеться на нелінійній стадії.

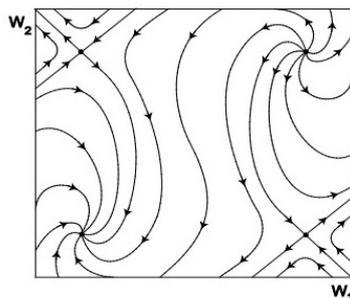


Рис. 1.1: Фазовий портрет динамічної системи (1.9) з параметрами $D = 1, C_1 = -0.01, C_2 = 0.01$ показує наявність двох особливих гіперболічних точок, а також стійкого і нестійкого фокусів.

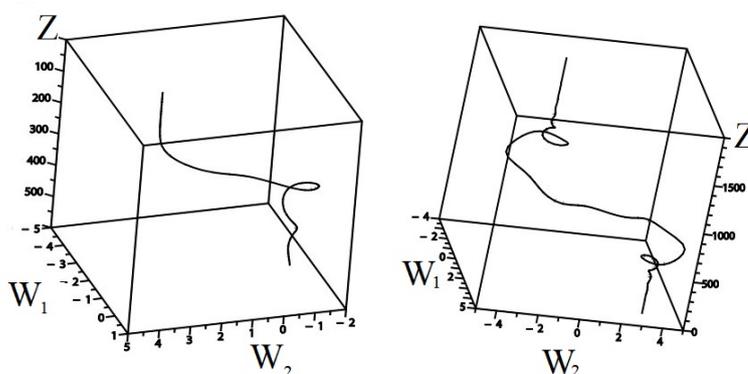


Рис. 1.2: *Зліва*: кінк, що з'єднує гіперболічну точку зі стійким фокусом при параметрах $D = 1, C_1 = -0.01, C_2 = 0.01$. При наближенні до стійкого фокуса спостерігається обертання поля швидкості. *Справа*: кінк, що з'єднує нестійкий і стійкий фокус. Тут можна побачити внутрішню спіральну структуру кінка.

1.1.3 Стаціонарні нелінійні вихрові структури

Очевидно, що зі збільшенням амплітуди нелінійні члени зменшуються, а нестійкість насичується. В результаті утворюються стаціонарні, нелінійні вихрові структури. Для їх знаходження покладемо в рівняннях (1.9) $\partial_T = 0$ і проінтегруємо рівняння один раз по Z . Отримані рівняння легко вирішуються чисельно за допомогою стандартних програм комп'ютерної математики. Використання цих програм дозволяє побудувати фазовий портрет отриманою динамічної системи (див. рис. 1.1) і вивчити найцікавіші рішення, пов'язані з особливими точками на фазовій площині. На лівому зображенні Рис. 1.2 видно, що особлива гіперболічна точка пов'язана зі стійким фокусом. На правому зображенні

Рис. 1.2 показано рішення, яке пов'язує нестійкий та стійкий фокуси. Усі ці рішення відповідають великомасштабним локалізованим вихровим структурам типу кінків з обертанням, які породжуються розглянутою нестійкістю. Кінк, що зв'язує гіперболічну точку зі стійким фокусом, містить обертання навколо стійкого фокуса, як показано на лівій частині Рис. 1.2. У кінку, який пов'язує нестійкий і стійкий фокуси, векторне поле швидкості \mathbf{W} обертається навколо обох особливих точок, як видно з правої частини Рис. 1.2. Варто зазначити, що на відміну від попередніх робіт з гідродинамічного α -ефекту в рідині, що обертається, метод асимптотичного розкладання дозволяє природним чином побудувати нелінійну теорію і вивчити стаціонарні нелінійні вихрові кінки.

1.2 Нелінійні великомасштабні вихрові структури в рідині, що похило обертається

У цьому розділі представлені результати робіт [72, 73], в яких досліджувалася великомасштабна нестійкість в'язкої рідини, що похило обертається, з дрібномасштабною турбулентністю. У [72, 73] турбулентність моделюється зовнішньою дрібномасштабною та високочастотною неспіральною силою при малих числах Рейнольдса. Таким чином, головна відмінність від результатів роботи [70], які були представлені у попередньому розділі, полягає в тому, що зовнішня сила не має спіральності. Тому нестійкість, яка була обговорена раніше, повинна бути відсутня. Математичні аспекти теорії [72, 73] ґрунтуються на строгому багатомасштабному асимптотичному методі розкладання. У третьому порядку теорії збурень отримано нелінійні рівняння для великомасштабного поля швидкостей. Крім того, проводилися дослідження лінійної та нелінійної стадій нестійкості, а в стаціонарному режимі були виявлені нелінійні періодичні хвилі та вихрові перегини [72, 73].

1.2.1 Постановка задачі та рівняння для великомасштабного поля швидкості

Розглянемо турбулентний потік в'язкої рідини, що обертається, де вісь обертання не співпадає з віссю z . Для моделювання турбулентності використовується зовнішня дрібномасштабна та високочастотна сила \mathbf{F}_0 , яка діє в площині (x, y) . Ця сила має детермінований характер і задається наступним способом:

$$F_0^z = 0, \quad \mathbf{F}_{0\perp} = f_0 (\mathbf{i} \cos \phi_2 + \mathbf{j} \cos \phi_1),$$

$$\phi_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{x} - \omega_0 t, \quad \phi_2 = \mathbf{k}_2 \mathbf{x} - \omega_0 t, \quad \mathbf{k}_1 = k_0 (1, 0, 0), \quad \mathbf{k}_2 = k_0 (0, 1, 0). \quad (1.14)$$

Неспіральна зовнішня сила (1.14) задовольняє наступним властивостям:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_0 = 0, \quad \mathbf{F}_0 \operatorname{rot} \mathbf{F}_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F}_0 \neq 0, \quad \mathbf{F}_0 = f_0 \mathbf{F}_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0} \right). \quad (1.15)$$

Крім того, зовнішня сила (1.14) є інваріантною щодо перетворення парності $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_0(-\mathbf{x}, -t)$. За відсутності обертання ($\boldsymbol{\Omega} = 0$), зовнішня сила \mathbf{F}_0 стимулює дрібномасштабний потік \mathbf{v}_0 з малим числом Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ та нульовою спіральністю $\overline{\mathbf{v}_0 \operatorname{rot} \mathbf{v}_0} = 0$. Для опису турбулентного потоку в'язкої нестисливої рідини, що обертається з похилою віссю, використовуються рівняння Нав'є-Стокса в обертовій системі координат (1.1)-(1.2), які у безрозмірному вигляді мають вид (1.4)-(1.5). Крім того, проблема полягає в пошуку рівнянь для великомасштабного повільного поля швидкості. Для цього також застосовується метод багатомасштабного асимптотичного розкладу з малим параметром. Таким чином, вже на третьому порядку теорії збурень отримуємо нелінійні рівняння для великомасштабних компонент полів швидкості в рамках «квазідвовимірної» моделі (1.8):

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 + \nabla_Z (\overline{v_0^z v_0^x}) = 0, \quad W_1 \equiv W_{-1}^x, \quad (1.16)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \nabla_Z (\overline{v_0^z v_0^y}) = 0, \quad W_2 \equiv W_{-1}^y. \quad (1.17)$$

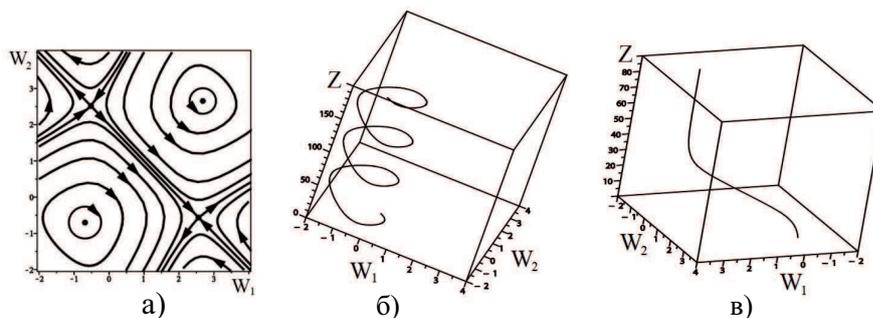


Рис. 1.3: а) Фазова площина для динамічної системи (1.22); б) нелінійна хвиля Бельтрамі, яка відповідає замкнутій траєкторії на фазовій площині; в) локалізоване рішення (кінк), яке відповідає сепаратрисі на фазовій площині. Рішення отримані за параметрами ($C_1 = 0.1, C_2 = 0.1$).

Для замикання рівнянь (1.16)–(1.17) необхідно знайти рішення для дрібномасштабного поля швидкості \mathbf{v}_0 . Згідно з результатами робіт [72, 73], рівняння (1.16)–(1.17) у замкненому вигляді мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \partial_T W_1 - \Delta W_1 + \frac{\partial}{\partial Z} \frac{1}{2} \frac{D_2}{|A_2^2 + D_2^2|^2} &= 0, \\ \partial_T W_2 - \Delta W_2 - \frac{\partial}{\partial Z} \frac{1}{2} \frac{D_1}{|A_1^2 + D_1^2|^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

де

$$\hat{A}_1^* = 1 - i(1 - W_1), \quad \hat{A}_2^* = 1 - i(1 - W_2).$$

Зазначимо, що вирази (1.18) не містять складової кутової швидкості D_3 , що є наслідком вибору зовнішньої сили.

1.2.2 Великомасштабна нестійкість

При малих значеннях W_1, W_2 рівняння (1.18) можна лінеаризувати, що веде до такого виразу:

$$\begin{aligned} \partial_T W_1 - \Delta W_1 - \alpha_2 \frac{\partial W_2}{\partial Z} &= 0, \\ \partial_T W_2 - \Delta W_2 + \alpha_1 \frac{\partial W_1}{\partial Z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Система (1.19) встановлює позитивний зворотний зв'язок між компонентами

швидкості W_1, W_2 , який здійснюється шляхом проекції сили Кориоліса за допомогою коефіцієнтів $\alpha_{1,2}$.

$$\alpha_1 = \frac{2D_1(D_1^2 - 2)}{(4 + D_1^2)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2D_2(D_2^2 - 2)}{(4 + D_2^2)^2}.$$

Рішення лінійної системи (1.19) будемо шукати у вигляді:

$$W_{1,2} \sim \exp(\gamma T + iKZ). \quad (1.20)$$

Підставляючи (1.20) у рівняння (1.19), отримуємо дисперсійне рівняння:

$$\gamma = \pm \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} K - K^2. \quad (1.21)$$

Дисперсійне рівняння (1.21) показує існування великомасштабної нестійкості з максимальним інкрементом $\gamma_{\max} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4}$ при $\alpha_1 \alpha_2 > 0$, при хвильовому векторі $K_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$. Внаслідок розвитку нестійкості в системі генеруються великомасштабні спіральні вихори Бельтрамівського типу. При $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ замість нестійкості виникають загасаючі коливання з частотою $\omega_0 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} K$. Як видно з (1.21), інкремент великомасштабної нестійкості γ залежить від значень D_1, D_2 , тобто від того, як орієнтовані зовнішні сили F_0^x, F_0^y по відношенню до перпендикулярної проекції кутової швидкості обертання. Якщо один із компонентів D_1, D_2 збігається з нулем або дорівнює $\sqrt{2}$, то нестійкість відсутня.

1.2.3 Стаціонарні рішення нелінійного рівняння для великомасштабного поля швидкості

Зі зростанням амплітуди збурень W_1, W_2 нелінійні члени в (1.18) зменшуються і нестійкість насичується. В результаті утворюються стаціонарні нелінійні вихрові структури. Для їх знаходження в рівняннях (1.18) вважаємо $\frac{\partial}{\partial T} = 0$ і проінтегруємо рівняння один раз за Z . В результаті отримуємо таку систему

рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dW_1}{dZ} &= \frac{1}{24} \frac{D_2}{(1 - W_2)^2 + [D_2^2 + W_2(2 - W_2)]^2} + C_1, \\ \frac{dW_2}{dZ} &= -\frac{1}{24} \frac{D_1}{(1 - W_1)^2 + [D_1^2 + W_1(2 - W_1)]^2} + C_2.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Для (1.22) неважко побудувати фазовий портрет (Рис. 1.3а), де для постійних параметрів $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.1$. На фазовому портреті видно наявність замкнутих траєкторій на фазовій площині навколо еліптичних точок та сепаратриси, які з'єднують гіперболічні точки. Зрозуміло, що замкненим траєкторіям відповідають нелінійні періодичні рішення (Рис. 1.3б), а сепаратрисі відповідають локалізовані рішення, типу кінків (Рис. 1.3в).

1.3 Нелінійні великомасштабні вихрові структури в стратифікованій рідині, що похило обертається

Врахування температурної стратифікації в стратифікованій рідині призводить до суттєвих відмінностей в порівнянні з результатами без стратифікації, які були представлені у роботах [72, 73]. Температурна стратифікація стимулює виникнення вихрових конвективних осередків, що змінює фізичний стан системи. Крім того, у системі з температурною стратифікацією виникає інший механізм генерації спіральності. Сила Кориоліса порушує дзеркальну симетрію турбулентності, організовуючи конвективні осередки таким чином, що середня спіральність дрібномасштабних рухів стає ненульовою. Це може бути наслідком α -ефекту, який виникає у присутності конвекції. Також важливо відзначити, що режим великомасштабної нестійкості суттєво змінюється при наявності конвекції. Інкремент нестійкості стає значно більшим, що може бути зумовлено взаємодією між великими та дрібними масштабами руху в присутності конвекції. В цьому розділі обговоримо нелінійну теорію генерації великомасштабних вихрових структур (ВВС) в стратифікованому середовищі, що похило обертається, з дрібномасштабною неспіральною турбулентністю. Ця теорія була розвинена в

роботі [74].

1.3.1 Рівняння для великомасштабних полів

Запишемо систему рівнянь для збурень швидкості \mathbf{V} , температури T та тиску P в наближенні Буссинеска з урахуванням постійного градієнта температури $\nabla\bar{T}$ в системі координат, що обертається:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \nu \Delta V_i - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} V_j \Omega_k + g e_i \beta T + F_0^i, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_k \frac{\partial T}{\partial x_k} - A e_k V_k = \chi \Delta T, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.25)$$

Система рівнянь (1.23)-(1.25) описує еволюцію збурень на тлі головного рівноважного стану, що визначається постійним градієнтом температури (нагрівання знизу) і гідростатичним тиском: $\nabla\bar{P} = \bar{\rho}\mathbf{g} - \bar{\rho}[\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]]$, де \mathbf{r} радіус-вектор елемента рідини позначений як \mathbf{r} . Вектор кутової швидкості обертання $\boldsymbol{\Omega}$ вважається постійним і нахиленим відносно площини (x, y) . У декартовій геометрії задачі \mathbf{e}_z – одиничний вектор у напрямку осі z , $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ – сила тяжіння спрямована вертикально вниз, а β – коефіцієнт теплового розширення. Рівняння (1.23) містить зовнішню силу \mathbf{F}_0 , яка імітує джерело збудження в середовищі дрібномасштабних і високочастотних коливань поля швидкості з малим числом Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$. В рівнянні (1.23) використовується зовнішня неспіральна сила \mathbf{F}_0 задана у вигляді (1.14) та має властивості, визначені у (1.15). Детальний виклад алгебраїчної структури асимптотичного розкладання рівнянь (1.23)-(1.25) у різних порядках по R можна знайти у роботі [74]. Основні секулярні рівняння, або рівняння для великомасштабних полів, як і в попередніх розділах, виникають у третьому порядку за R :

$$(\partial_T - \nabla_Z^2) \widetilde{W}_1 =$$

$$= \frac{f_0^2}{2} D_2 \nabla_Z \left[\frac{1 + \widetilde{W}_2^2 - Ra}{(1 + \widetilde{W}_2^2)((1 + \widetilde{W}_2^2)^2 + 2(D_2^2 - Ra)(1 - \widetilde{W}_2^2) + (D_2^2 - Ra)^2)} \right], \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} & (\partial_T - \nabla_Z^2) \widetilde{W}_2 = \\ & = -\frac{f_0^2}{2} D_1 \nabla_Z \left[\frac{1 + \widetilde{W}_1^2 - Ra}{(1 + \widetilde{W}_1^2)((1 + \widetilde{W}_1^2)^2 + 2(D_1^2 - Ra)(1 - \widetilde{W}_1^2) + (D_1^2 - Ra)^2)} \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Замкнуті рівняння (1.26)-(1.27) можна розглядати як рівняння нелінійного вихрового динамо в стратифікованій рідині, що обертається похило з неспіральною силою, що діє на дрібному масштабі. Якщо обертання зникне ($\mathbf{\Omega} = 0$) або вісь обертання збігається з віссю z , то виникне звичайне дифузійне розпливання великомасштабних полів. У межах однорідної рідини рівняння (1.26)-(1.27) повністю еквівалентні рівнянням (1.18) при $f_0 = 1$.

1.3.2 Великомасштабна нестійкість

Рівняння (1.26)-(1.27) описують нелінійну динаміку великомасштабних збурень вихрового поля $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$. Тому важливо з'ясувати питання про стійкість малих збурень поля \mathbf{W} . При малих значеннях величин (W_1, W_2) , рівняння (1.26)-(1.27) можна лінеалізувати та отримати системи лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} \partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_2 \nabla_Z W_2 &= 0, \\ \partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \alpha_1 \nabla_Z W_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

де введені такі позначення для коефіцієнтів:

$$\alpha_1 = f_0^2 D_1 \left[\frac{(D_1^2 - Ra - 2)(2 - Ra) + Ra(4 + (D_1^2 - Ra)^2)}{(4 + (D_1^2 - Ra)^2)^2} \right], \quad (1.29)$$

$$\alpha_2 = f_0^2 D_2 \left[\frac{(D_2^2 - Ra - 2)(2 - Ra) + Ra(4 + (D_2^2 - Ra)^2)}{(4 + (D_2^2 - Ra)^2)^2} \right].$$

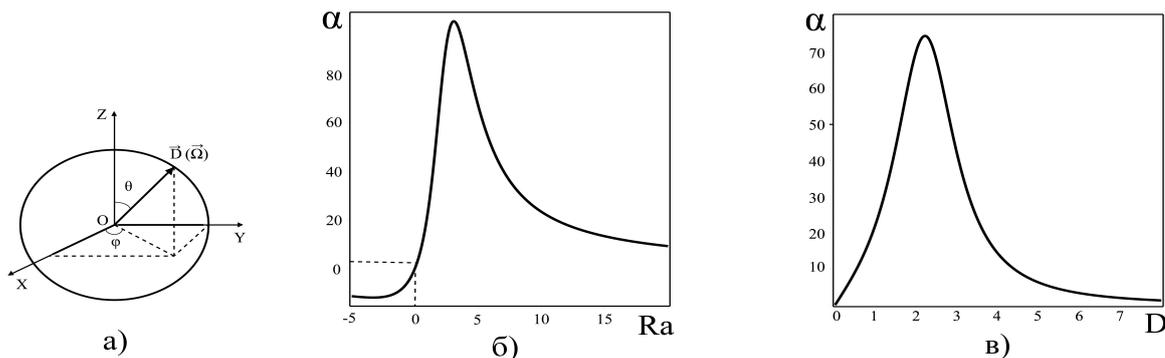


Рис. 1.4: а) Показано зв'язок між декартовими проекціями параметра обертання \mathbf{D} (або вектора кутової швидкості обертання $\mathbf{\Omega}$) та їх проекціями у сферичній системі координат; б) Графік залежності α -ефекту від параметра стратифікації середовища Ra (числа Релея); в) Графік залежності α -ефекту від параметра обертання середовища D .

Видно, що рівняння (1.28) подібні до рівнянь для вихрового динамо або гідродинамічного α -ефекту. Для дослідження великомасштабної нестійкості, що описується рівняннями (1.28), виберемо збурення у вигляді плоских хвиль з хвильовим вектором $\mathbf{K} \parallel OZ$. У результаті знаходимо дисперсійне рівняння:

$$(-i\omega + K^2)^2 - \alpha_1\alpha_2 K^2 = 0. \quad (1.30)$$

Представивши $\omega = \omega_0 + i\Gamma$ з рівнянь (1.30), знаходимо:

$$\Gamma = \text{Im}(\omega) = \pm \sqrt{\alpha_1\alpha_2}K - K^2. \quad (1.31)$$

Рішення (1.31) свідчать про існування нестійкості при $\alpha_1\alpha_2 > 0$ для великомасштабних вихрових збурень. Якщо $\alpha_1\alpha_2 < 0$, то замість нестійкостей виникають загасаючі коливання відповідно до частоти $\omega_0 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}K$. За допомогою коефіцієнтів α_1, α_2 встановлюється позитивний зворотний зв'язок між компонентами швидкості, що здійснюється проекціями сили Коріоліса. Зауважимо, що в лінійній теорії, що розглядається, коефіцієнти α_1, α_2 не залежать від амплітуд полів, а залежать тільки від параметрів обертання $D_{1,2}$, числа Релея Ra та амплітуди зовнішньої сили f_0 . Проаналізуємо залежність цих коефіцієнтів від

безрозмірних параметрів, вважаючи безрозмірну амплітуду зовнішньої сили f_0 рівною $f_0 = 10$. Фіксація рівня безрозмірної сили означає вибір певного рівня стаціонарного фону дрібномасштабних і швидких коливань. У коефіцієнтах α_1 та α_2 , замість декартових проекцій D_1 та D_2 , зручно переходити до їх проекцій у сферичній системі координат (див. Рис. 1.4а). Координатна поверхня $D = \text{const}$ утворює сферу, де θ позначає широту ($\theta \in [0, \pi]$), а ϕ позначає довготу ($\phi \in [0, 2\pi]$). Щоб дослідити вплив обертання та стратифікації на приріст α_1 , α_2 , припускаємо, що $D_1 = D_2$ і відповідає фіксованому значенню довготи $\phi = \pi/4 + \pi n$, де $n = 0, 1, 2, \dots, k$, k – ціле число. Згідно з цим припущенням, коефіцієнти посилення для вихрових збурень визначаються як:

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = f_0^2 \sqrt{2} D \sin \theta \times \left[\frac{4(D^2 \sin^2 \theta - 2Ra - 4)(2 - Ra) + 2Ra(16 + (D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2)}{(16 + (D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2)^2} \right].$$

Звідси видно, що на полюсах ($\theta = 0, \theta = \pi$) генерація вихрових збурень не ефективна, оскільки $\alpha \rightarrow 0$. Залежність коефіцієнта α від параметра стратифікації рідини (числа Релея Ra) при фіксованому значенні широти $\theta = \pi/2$ і числі $D = 2$ зображена на Рис. 1.4б. Тут також показаний випадок однорідного середовища $Ra = 0$, де генерація великомасштабних вихрових збурень зумовлена дією зовнішньої дрібномасштабної неспіральної сили та сили Коріоліса. З Рис. 1.4б видно, що наявність температурної стратифікації ($Ra \neq 0$) може призвести до істотного збільшення коефіцієнта α , і як наслідок, швидшої генерації великомасштабних вихрових збурень, ніж у однорідному середовищі. Особливо цей ефект виявляється при числах $Ra \rightarrow 2$. Далі зі збільшенням чисел Релея спостерігається зниження значень коефіцієнта α .

Цікаво також з'ясувати вплив ефекту обертання середовища на коефіцієнт посилення α або процес генерації великомасштабних збурень. Для цих цілей зафіксуємо значення числа Релея $Ra = 2$ при $\theta = \pi/2$. У цьому випадку функціональна залежність $\alpha(D)$ зображена в правій частині Рис. 1.4в. Звідси

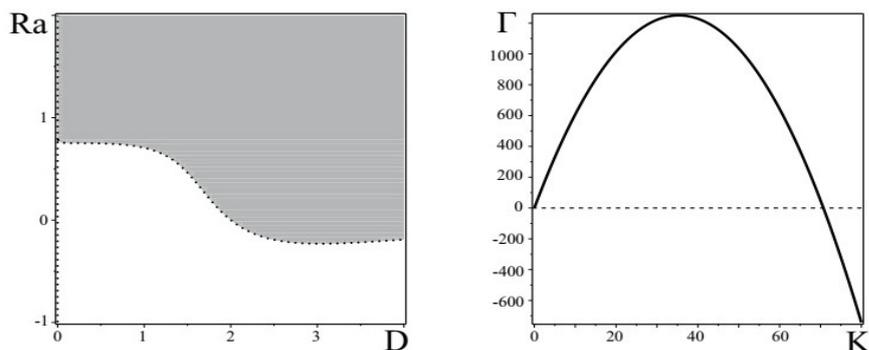


Рис. 1.5: На зображенні зліва показано графік площини (D, Ra) . Область, яка відображає позитивні значення α (що вказує на нестабільні розчини), заштрихована сірим кольором, а область, яка відображає від'ємні значення α , показана білим кольором. Зображення справа показує залежність між приростом нестабільності та хвильовими числами K при заданих параметрах $D = 2$ та $Ra = 2$.

видно, що при певному значенні параметра обертання D , коефіцієнт α досягає свого максимального значення α_{\max} . Далі зі збільшенням числа D , коефіцієнт α плавно прямує до нуля, тобто відбувається пригнічення α -ефекту. Подібне явище спостерігалось в магнітогідродинамічному α -ефекті [78]. У лівій частині малюнку Рис. 1.5 наведено графік, що зображує спільний вплив ефекту обертання та стратифікації у площині (D, Ra) . Тут область нестійкості $\alpha > 0$ виділена сірим кольором. Максимальний інкремент нестійкості $\Gamma_{\max} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4}$ досягається на хвильових числах $K_{\max} = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{2}$. Графік залежності (див. праву частину Рис. 1.5) інкремента нестійкості Γ від хвильових чисел K має стандартний вигляд, характерний для α -ефекту.

1.3.3 Стаціонарні нелінійні вихрові структури

Враховуючи у рівняннях (1.26)-(1.27) $\partial_T = 0$, можемо проінтегрувати ці рівняння один раз по Z . Після інтегрування, припустимо, що проекції D_1 і D_2 дорівнюють одна одній, а широтний кут, для спрощення обчислень, приймемо рівним $\theta = \frac{\pi}{2}$. В результаті отримаємо систему нелінійних рівнянь наступного

виду:

$$\frac{d\widetilde{W}_1}{dZ} = -f_0^2 D \sqrt{2} \frac{1 + \widetilde{W}_2^2 - Ra}{(1 + \widetilde{W}_2^2)(4(1 + \widetilde{W}_2^2)^2 + 4(D^2 - 2Ra)(1 - \widetilde{W}_2^2) + (D^2 - 2Ra)^2)} + C_1, \quad (1.32)$$

$$\frac{d\widetilde{W}_2}{dZ} = f_0^2 D \sqrt{2} \frac{1 + \widetilde{W}_1^2 - Ra}{(1 + \widetilde{W}_1^2)(4(1 + \widetilde{W}_1^2)^2 + 4(D^2 - 2Ra)(1 - \widetilde{W}_1^2) + (D^2 - 2Ra)^2)} + C_2. \quad (1.33)$$

Тут C_1 і C_2 є довільними постійними, які виникають під час інтегрування. Зверніть увагу, що динамічна система рівнянь (1.32)-(1.33) є консервативною. Гамільтоновість рівнянь (1.32)-(1.33) означає, що у фазовому просторі можуть бути присутні два типи нерухомих точок: еліптичні та гіперболічні нерухомі точки. Це можна підтвердити, проводячи якісний аналіз системи рівнянь (1.32)-(1.33). Лінеаризуючи праві частини рівнянь (1.32)-(1.33) навколо нерухомих точок, визначаємо їх тип та будуємо фазовий портрет. В результаті проведеного аналізу виявляється наявність чотирьох нерухомих точок: дві гіперболічні та дві еліптичні точки. Фазовий портрет динамічної системи рівнянь (1.32)-(1.33) для параметрів $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $D = Ra = 2$ та $f_0 = 10$ зображено на Рис. 1.6а. Фазовий портрет надає якісний опис можливих стаціонарних рішень. Найбільш цікаві локалізовані рішення відповідають траєкторіям фазового портрета, які з'єднують нерухомі (особливі) точки на фазовій площині. На Рис. 1.6а видно наявність замкнутих траєкторій навколо еліптичних точок та сепаратриси, які з'єднують гіперболічні точки. Замкненим траєкторіям відповідають нелінійні періодичні рішення - нелінійні хвилі (див. Рис. 1.6б), а сепаратрисам відповідають локалізовані вихрові структури типу кінків (див. Рис. 1.6в).

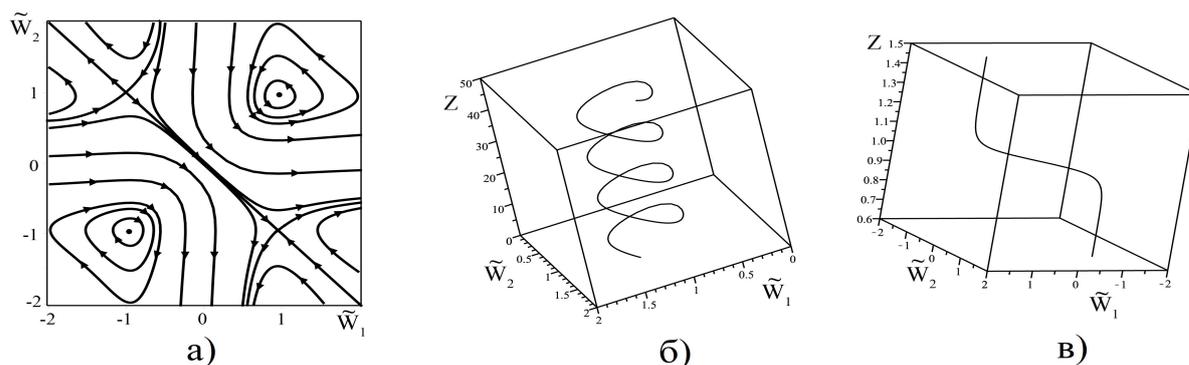


Рис. 1.6: а) Фазова площина для динамічної системи рівнянь (1.32)-(1.33); б) зображено нелінійну спіральну хвилю, яка відповідає замкнутій траєкторії на фазовій площині; в) локалізована нелінійна вихрова структура (кінк), що відповідає сепаратрисі на фазовій площині ($C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $D = Ra = 2$).

1.4 Нелінійне вихрове динамо в стратифікованій вологій атмосфері, що обертається

Волога атмосфера складається з сухого повітря, водяної пари та рідких крапель води. Коли значення питомої вологості менше насичення, атмосфера поводить себе як бінарна суміш сухого повітря та водяної пари, підкоряючись звичайним гідродинамічним рівнянням. Але коли питома вологість досягає насичення, зайвий водяний пар конденсується і утворює нову речовину, яка називається водністю. Цей процес випромінює велику кількість енергії. У даному випадку розглянемо лише енергетичний ефект цього процесу, оскільки опис фазового переходу є складним завданням. У цьому розділі наведемо результати дослідження великомасштабної нестійкості в стратифікованій вологій атмосфері, що обертається, з дрібномасштабною спіральністю при малих числах Рейнольдса [71]. Дрібномасштабна спіральність виникає внаслідок зовнішньої сили, а також враховується вплив сили Коріоліса та стратифікації вологої атмосфери. В роботі [71] також застосовується метод багатомасштабних асимптотичних розкладів, що дозволяє отримати усереднені нелінійні рівняння для великомасштабних полів вологої атмосфери, що обертається. Була встановлена нестійкість гідродинамічного ефекту при малих амплітудах великомасштабних збу-

рень швидкості та визначені критерії розвитку цієї нестійкості, засновані на обертанні та стратифікації середовища. Чисельні оцінки характерних часів та масштабів нестійкості, наведені у [71], можуть пояснити виникнення великомасштабних спіральних структур хмарних мезовихрів та тайфунів на початкових етапах їх розвитку. Крім того, у [71] було проведено чисельний аналіз нелінійних рівнянь у стаціонарному режимі та доведено існування локалізованих спіральних вихрових структур типу кінків.

1.4.1 Постановка задачі та основні рівняння для великомасштабних вихрових полів

Розглянемо шар атмосфери, в якому питома вологість дорівнює насиченій вологості. Негативний градієнт насиченого значення питомої вологості атмосфери визначається вертикальними градієнтами температури та тиску, які є стаціонарними. Під час висхідних потоків повітря, що обертається під впливом сили Коріоліса, відбувається конденсація водяної пари та виділення прихованої теплової енергії. У цьому середовищі присутня дрібномасштабна неспіральна турбулентність, яка моделюється зовнішньою дрібномасштабною силою. Основною метою цього розділу є розуміння впливу фазових переходів вологи на динаміку великомасштабних або усереднених полів. Для опису процесу вологої конвекції використовується відоме наближення Бусінеска, що дозволяє записати гідродинамічні рівняння для збурень швидкості \mathbf{V} , температури T , тиску P та питомої вологості m у системі координат, що обертається.

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \nu \Delta V_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} V_j \Omega_k + g e_i (\beta T + \beta_1 m) + F_0^i, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_k \frac{\partial T}{\partial x_k} - A e_k V_k = \chi \Delta T + \frac{L}{c_p} K, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + V_k \frac{\partial m}{\partial x_k} - B e_k V_k = d \Delta m + K, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.37)$$

Система рівнянь (1.34)-(1.37) описує еволюцію збурень на фоні основного рівноважного стану $\bar{T}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{m}(z)$, який характеризується постійним градієнтом температури $\nabla \bar{T} = -A\mathbf{e}$ ($A > 0$), рівноважним градієнтом питомої вологості $\nabla \bar{m} = -B\mathbf{e}$ ($B < 0$) і гідростатичним тиском $\nabla \bar{P} = \bar{\rho}\mathbf{g} - [\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]]$, де \mathbf{r} - радіус-вектор елемента рідини, \mathbf{g} - вектор прискорення вільного падіння, спрямований вниз по осі z ($\mathbf{g} = (0, 0, -g)$), $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор кутової швидкості обертання, спрямований вздовж осі z ($\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$). У рівнянні теплового балансу (1.35) враховано виділення прихованої теплоти конденсації насиченого повітря [60]:

$$Q = \frac{L}{c_p}K = \frac{L}{c_p}cAe_kv_k, \quad c = \frac{dq_n}{dT}, \quad (1.38)$$

де L - питома теплота конденсації водяної пари, c_p - теплоємність сухого повітря при постійному тиску, K - швидкість конденсації, q_n - питома насичена вологість або масова частка насиченого пару. Вектор $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ - одиничний вектор, спрямований вертикально вгору вздовж осі Z . Коефіцієнт теплового розширення позначений як β , а β_1 визначається як $-\frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T}\right)_{T,P}$. Коефіцієнт дифузії позначений як d . У рівнянні Нав'є-Стокса (1.34) враховано зовнішню дрібномасштабну силу \mathbf{F}_0 , яка моделює збудження в полі швидкості \mathbf{v}_0 з малим числом Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$. Зокрема, розглядаємо спіральну дрібномасштабну зовнішню силу \mathbf{F}_0 згідно з (1.9) та властивостями (1.3).

Вологе повітря в певних частинах атмосфери складається із сухого повітря, водяної пари та рідких крапель води. Це середовище виконує невеликі високочастотні рухи, які підтримуються зовнішньою силою. Сила Коріоліса закручує висхідні повітряні потоки, що призводить до конденсації водяної пари у воду та виділення прихованої теплової енергії. Від'ємний градієнт насиченого значення питомої вологості атмосфери визначається стаціонарними вертикальними градієнтами температури і тиску. Вплив фазових переходів вологи може

істотно вплинути на динаміку великомасштабних або усереднених полів. Для отримання рівнянь для великомасштабних полів використовується метод багатомасштабного асимптотичного розкладу. Цей метод ідентифікує рівняння для великомасштабних збурень, відокремлюючи їх від ієрархії збурень.

У рамках «квазідвовимірної» задачі, коли переважають великомасштабні похідні по Z , система рівнянь для великомасштабних полів у вологій атмосфері має такий вигляд [71]:

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 + \nabla_Z T^{31} = 0, \quad (1.39)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \nabla_Z T^{32} = 0, \quad (1.40)$$

де напруги Рейнольдса за умови $Pr = S = 1$ відповідно дорівнюють:

$$T^{31} = -\frac{f_0^2 D^2 (4 + \widetilde{W}_1^2)}{8 \Lambda_1} + \frac{f_0^2 D (4 + \widetilde{W}_2^2 - \frac{\widetilde{R}}{2})}{2 \Lambda_2}, \quad (1.41)$$

$$T^{32} = -\frac{f_0^2 D^2 (4 + \widetilde{W}_2^2)}{8 \Lambda_2} - \frac{f_0^2 D (4 + \widetilde{W}_1^2 - \frac{\widetilde{R}}{2})}{2 \Lambda_1}, \quad (1.42)$$

де

$$\Lambda_{1,2} = (4 + \widetilde{W}_{1,2}^2) \left[16\widetilde{W}_{1,2}^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - \widetilde{W}_{1,2}^2 \right]^2 + \frac{\widetilde{R}^2}{4} \right] - \widetilde{R} (16 - \widetilde{W}_{1,2}^4) - D^2 \frac{\widetilde{R}}{2} (4 - \widetilde{W}_{1,2}^2).$$

У формулах (1.41)-(1.42) прийнято позначення: $\widetilde{R} = aRa + bR_m$. Як правило в атмосферній конвекції рівноважний градієнт питомої водності малий: $|B| \ll c|A|$ і враховуючи, що $\left| \frac{L}{c_p} \right| \gg \left| \frac{\beta_1}{\beta} \right|$ вираз для \widetilde{R} можна представити у вигляді суми:

$$\widetilde{R} = \left(1 + L \frac{c}{c_p} \right) Ra = Ra + R_q,$$

де $Ra = \frac{g\beta A \lambda_0^4}{\nu^2}$ – число Релея для «сухої» конвекції при $\nu = \chi = d$, $R_q = \frac{g\beta(\gamma_m - \gamma_a)}{\nu^2}$ – число, що характеризує інтенсивність конденсаційного тепловиділення, γ_m –

влажноадиабатический і $\gamma_a = \frac{g}{c_p}$ – сухоадиабатичний градієнти, пов’язані співвідношенням [60]:

$$\gamma_m = \gamma_a + \frac{L}{c_p} \frac{dq_n}{dz}. \quad (1.43)$$

Рівняння (1.39)-(1.40) відповідають рівнянням нелінійного вихрового динамо в вологій атмосфері, що обертається, з дрібномасштабною зовнішньою силою. Якщо обертання зникне ($\Omega = 0$) або амплітуда зовнішньої сили дорівнює нулю ($f_0 = 0$), відбувається перехід до звичайного дифузійного розпливання великомасштабних полів.

1.4.2 Великомасштабна нестійкість

Розгляньмо стійкість малих збурень, коли при малих значеннях $W_{1,2}$ напруги Рейнольдса (1.41)-(1.42) можна розкласти в ряд Тейлора за $W_{1,2}$. В результаті отримаємо лінеаризовані рівняння (1.39)-(1.40):

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 = \alpha_1 \nabla_Z W_1 - \alpha_2 \nabla_Z W_2, \quad (1.44)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 = \alpha_1 \nabla_Z W_2 + \alpha_2 \nabla_Z W_1, \quad (1.45)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{f_0^2}{8} D^2 \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{f_0^2}{2} D \left(\alpha \left(1 - \frac{\tilde{R}}{10} \right) - \alpha_0 \frac{\tilde{R}}{25} \right). \quad (1.46)$$

Рішення лінійної системи рівнянь (1.44)-(1.45) також шукатимемо у вигляді плоских хвиль з хвильовим вектором $\mathbf{K} \parallel OZ$ (1.12). В результаті отримаємо дисперсійне рівняння виду (1.13). Розв’язування цього рівняння свідчить про існування нестійких коливальних розв’язків для великомасштабних вихрових збурень. Зауважимо, що при малих амплітудах великомасштабних збурень коефіцієнт посилення α_2 залежить від амплітуди зовнішньої сили f_0 (інтенсивності турбулентності), параметра обертання D і параметра стратифікації \tilde{R} , що включає характеристики «сухої» конвекції Ra і «вологої» конвекції R_q . Спочатку розглянемо зміну значень α_2 від параметра \tilde{R} при фіксованих значеннях

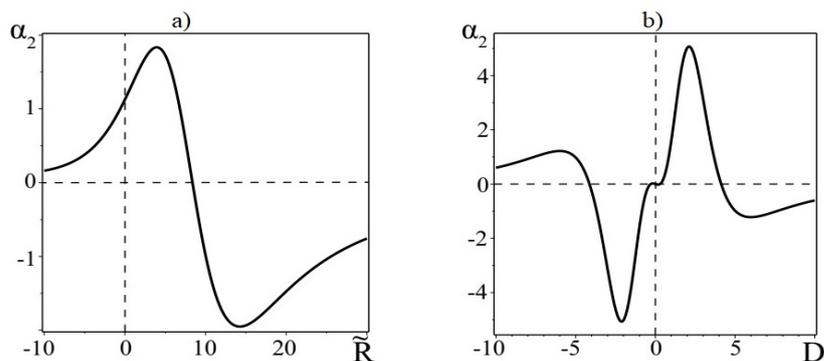


Рис. 1.7: а) Графік залежності α – ефекту від параметра стратифікації середовища \tilde{R} ; б) графік залежності α - ефекту від параметра обертання середовища D .

параметрів обертання $D = 1$ і амплітуди зовнішньої сили $f_0 = 10$. Функціональна залежність $\alpha_2(\tilde{R})$ зображена на Рис. 1.7а. Значення коефіцієнта α_2 при $\tilde{R} = 0$ відповідає однорідному середовищу. З Рис. 1.7а видно, що наявність температурної стратифікації ($Ra \neq 0$) та додаткового джерела конденсаційного тепловиділення ($R_q \neq 0$) може призвести до збільшення коефіцієнта α_2 і, в результаті, до швидшої генерації великомасштабних вихрових збурень порівняно з однорідним середовищем. При певному критичному значенні параметра стратифікації $\tilde{R} = \tilde{R}_0$ генерація збурень припиняється, оскільки $\alpha_2 = 0$. При значеннях $\tilde{R} > \tilde{R}_0$ коефіцієнт посилення α_2 змінює знак, що означає затухання зростаючого режиму, і навпаки.

Далі, для вивчення впливу ефекту обертання середовища на коефіцієнт посилення α_2 або процес генерації великомасштабних збурень, фіксуємо значення параметра $\tilde{R} = 2$ і амплітуди зовнішньої сили $f_0 = 10$. У цьому випадку функціональна залежність $\alpha_2(D)$ зображена на Рис. 1.7 (права частина). Аналіз залежності $\alpha_2(D)$ від параметра обертання D показує, що при «швидкому» обертанні ($D \rightarrow \infty$) коефіцієнт $\alpha_2 \rightarrow 0$, що вказує на пригнічення ефекту α . З графіка залежності $\alpha_2(D)$ видно, що існують значення параметра D , при яких генерація вихрових збурень припиняється ($\alpha_2 = 0$). Графічне зображення спільного впливу ефекту обертання та стратифікації у площині (D, \tilde{R}) пред-

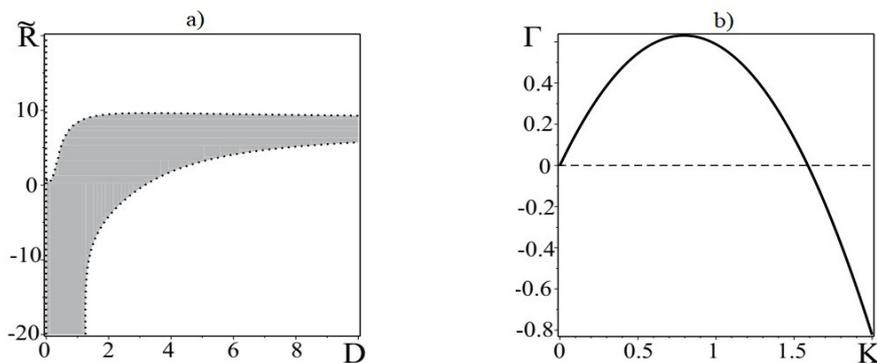


Рис. 1.8: а) Графік для α_2 у площині (D, \tilde{R}) , де сірим кольором показана область, що відповідає позитивним значенням α_2 (нестійкі рішення), а білим кольором - негативним значенням α_2 ; б) графік залежності інкременту нестійкості від хвильових чисел K для параметрів $D = 1$, $\tilde{R} = 2$ та $f_0 = 10$.

ставлено на Рис. 1.8а. Область нестійкості, де $\alpha_2 > 0$, виділена сірим кольором. Максимальний інкремент нестійкості $\Gamma_{max} = \frac{\alpha_2^2}{4}$ досягається при хвильових числах $K_{max} = \frac{\alpha_2}{2}$. Графік залежності інкременту нестійкості Γ від хвильових чисел K має стандартний вигляд, що характерний для ефекту α . Даний графік представлено на Рис. 1.8б.

Наприкінці цього розділу оцінимо характерний просторовий масштаб нестійкої моди $L_{max} \sim 1/\alpha_2$ та характерний часовий масштаб її наростання $T_{max} \sim 1/\alpha_2^2$ в умовах виникнення гідродинамічного ефекту α в вологій атмосфері, що обертається. Для цього розрахуємо коефіцієнт α_2 , використовуючи типові характеристики атмосферної турбулентності. Зокрема, згідно з роботою [71], виберемо характерну швидкість $v_0 \approx 0.1$ м/с, масштаб пульсацій $\lambda_0 \approx 10^3$ м та турбулентну в'язкість $\nu \approx 10^5$ м²/с, що відповідають типовим значенням [52, 60]. Тоді характерний час турбулентних пульсацій $t_0 = \lambda_0^2/\nu \approx 10$ с, а значення параметра обертання $D = 2\Omega\lambda_0^2/\nu \approx 1.4 \times 10^{-3}$ (де Ω - кутова швидкість обертання Землі, $\Omega \approx 7 \times 10^{-5}$ с⁻¹). Крім того, число Рейнольдса $R = v_0\lambda_0/\nu \approx 10^{-3}$. Порівняємо безрозмірні параметри D, Ra, R_m відносно числа Рейнольдса R :

$$D/R > 1, Ra/R = \beta A \cdot 10^6 > 1, R_m/R = \beta_1 B \cdot 10^6 > 1,$$

що узгоджується зі схемою асимптотичного розкладання, що використовується тут. Невелике значення параметра обертання D дозволяє знехтувати членами порядку D^2 у оцінці коефіцієнта α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{f_0^2}{2} D \kappa, \quad (1.47)$$

де величина $\kappa \approx 4.5 \cdot 10^{-2}$ обчислена згідно з формулами (1.46) для параметра стратифікації $\tilde{R} = 5$. Виразимо гідродинамічну спіральність $\alpha_v = (t_0/3) \overline{\mathbf{v}_0 \text{rot} \mathbf{v}_0}$ (див. наприклад [?]) через безрозмірну амплітуду джерела:

$$\alpha_v = \frac{t_0 v_0^2}{3 \lambda_0} f_0^2. \quad (1.48)$$

Тут f_0 - безрозмірна амплітуда зовнішньої сили, яка входить у формулу (1.47). Підставляючи (1.48) в (1.47), знаходимо вирази для характерних просторового та часового масштабів:

$$L_{\max} \approx \frac{2 \alpha_v D \kappa}{3 v_0 R} = 106 \text{ км}, \quad T_{\max} \approx \frac{4 t_0 v_0^2 R^2}{9 \alpha_v^2 D^2 \kappa^2} = 1.3 \text{ доба}. \quad (1.49)$$

Тут коефіцієнт гідродинамічної спіральності вважався рівним $\alpha_v \approx 10^{-2}$ м/с [52]. Таким чином, отримали цілком прийнятні оцінки (1.49) характерних масштабів нестійкості, які можуть пояснити походження великомасштабної спіральної структури хмарних мезовихрів і тайфунів на початковій стадії розвитку.

1.4.3 Стаціонарні нелінійні вихрові структури

У стаціонарному режимі $\partial_T = 0$ проінтегруємо рівняння (1.39)-(1.40) по Z , і в результаті отримаємо систему нелінійних рівнянь такого вигляду:

$$\frac{d\tilde{W}_1}{dZ} = -\frac{D^2 \frac{f_0^2}{8} (4 + \tilde{W}_1^2)}{\tilde{\Lambda}_1} + \frac{D \frac{f_0^2}{2} (4 + \tilde{W}_2^2 - \frac{\tilde{R}}{2})}{\tilde{\Lambda}_2} + C_1, \quad (1.50)$$

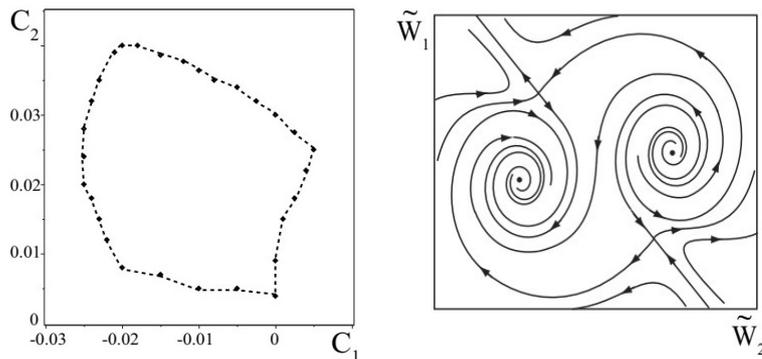


Рис. 1.9: На рисунку зліва штрихованою лінією позначено межу області параметрів (C_1, C_2) , за якої на фазовому портреті існують дві нерухомі точки. У середині цієї області з'являються чотири нерухомі точки: дві гіперболічні, стійкий фокус і нестійкий фокус. За межами зазначеної області нерухомі точки відсутні. Зазначену область побудовано чисельно для параметрів $f_0 = D = 1$ та $\tilde{R} = 2$. На рисунку справа представлено фазовий портрет системи рівнянь (1.50)–(1.51) за значень $f_0 = D = 1$, $\tilde{R} = 2$, $C_1 = -0.01$, $C_2 = 0.01$.

$$\frac{d\tilde{W}_2}{dZ} = -\frac{D^2 \frac{f_0^2}{8} (4 + \tilde{W}_2^2)}{\tilde{\Lambda}_2} - \frac{D \frac{f_0^2}{2} (4 + \tilde{W}_1^2 - \frac{\tilde{R}}{2})}{\tilde{\Lambda}_1} + C_2. \quad (1.51)$$

Тут C_1 , C_2 - довільні постійні інтегрування. Для фіксованих значень параметрів турбулентності f_0 , обертання D і стратифікації \tilde{R} ($f_0 = D = 1$, $\tilde{R} = 2$), можна провести якісний аналіз системи рівнянь (1.50)–(1.51) та визначити типи стаціонарних вихрових структур. За допомогою стандартних методів було доведено, що система рівнянь (1.50)–(1.51) має чотири нерухомі точки у відповідній області, яка показана на Рис. 1.9. За межами цієї області нерухомі точки відсутні. На кордоні спостерігаються вироджені випадки - дві нерухомі точки. При незначних змінах значень параметра, наприклад, D , область існування чотирьох нерухомих точок деформується і змінює свою форму і розміри. При заданих значеннях постійних C_1 і C_2 , коли присутні 4 нерухомі точки, лінеаризуючи векторне поле (1.50)–(1.51) в околиці нерухомих точок, можна встановити тип нерухомих точок. У випадку чотирьох нерухомих точок дві з них є гіперболічними, а решта дві - стійким і нестійким фокусом. Розташування та тип нерухомих точок дозволяють побудувати фазовий портрет системи (1.50)–

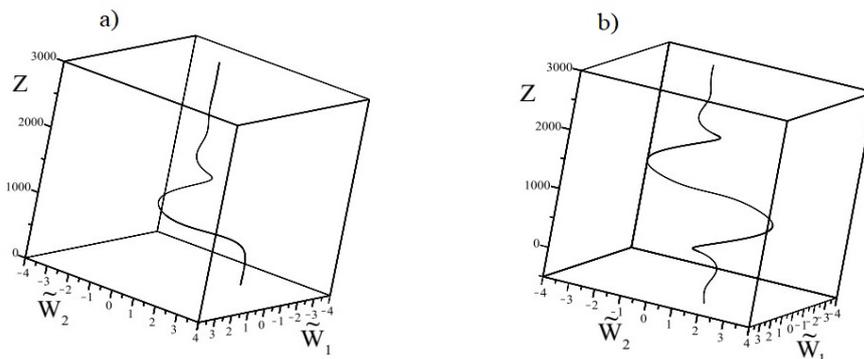


Рис. 1.10: а) Зображено кінк, що зв'язує гіперболічну точку зі стійким фокусом; б) зображено кінк, що зв'язує нестійкий та стійкий фокус. Звідси видно внутрішню спіральну структуру кінку. Рішення отримані за параметрами: $f_0 = D = 1$, $\tilde{R} = 2$ і $C_1 = -0.01$, $C_2 = 0.01$.

(1.51). Знання фазового портрета дозволяє якісно описати всі можливі типи стаціонарних вихрових рішень. Фазовий портрет системи рівнянь (1.50)-(1.51) показаний на Рис. 1.9 (права частина). Найбільш цікавими локалізованими рішеннями є ті, що відповідають траєкторіям фазового портрету, які з'єднують нерухомі точки на фазовій площині. Зокрема, сепаратриса, що з'єднує особливу гіперболічну точку зі стійким фокусом, відповідає рішення для локалізованої вихрової структури типу кінка з обертанням. Це рішення, зображене на Рис. 1.10а, було отримане чисельним інтегруванням. Інший тип спірального кінка відповідає рішення, для якого на фазовій площині сепаратриса з'єднує нестійкий і стійкий фокус (див. Рис. 1.10б). Усі ці рішення відповідають великомасштабним локалізованим вихровим структурам типу кінків з обертанням, які породжуються нестійкістю α -ефекту.

1.5 Вихрове динамо у вологій атмосфері, що обертається, з дрібномасштабною неспіральною силою

У цьому розділі наведено результати роботи [75], в якій досліджувалася великомасштабна нестійкість у стратифікованій вологій атмосфері, що обертається, та знаходиться під дією дрібномасштабної неспіральної сили. На відміну

від попереднього розділу де розглядалась спіральна турбулентність. Спіральну турбулентність у природних умовах зазвичай пов'язують із впливом сили Коріоліса на раніше однорідний, ізотропний та дзеркально-симетричний турбулентний рух середовища. Це породжує питання про походження самої спіральності. У цьому розділі буде показано, що спіральність виникає завдяки силі Коріоліса, що діє на конвективну турбулентність. У такому сценарії великомасштабні нестійкості в атмосфері мають виникати самоузгоджено, без додаткових припущень.

1.5.1 Нелінійні рівняння вихрового динамо

Для опису генерації великомасштабних вихрових структур, таких як тропічні циклони, використовується рівняння вологої конвекції в наближенні Буссінеска за наявності зовнішньої неспіральної сили \mathbf{F}_0 , які мають вигляд рівнянь (1.34)-(1.37). Ця постановка проблеми відрізняється від розглянутої у розділі 1.4 [71], де спіральна сила $\mathbf{F}_0 \text{rot} \mathbf{F}_0 \neq 0$ була обрана як джерело турбулентності. Іншою відмінністю є геометрія задачі, де вектор кутової швидкості обертання $\mathbf{\Omega}$ відхиляється від вертикального напрямку або від осі z .

Для вивчення впливу дрібномасштабних рухів, що породжуються цією неспіральною силою, визначеною як (1.14) з властивостями (1.15), на динаміку великомасштабних збурень, знову застосовуємо метод багатомасштабного асимптотичного розкладання. Алгебраїчну структуру асимптотичного розкладання рівнянь (1.34)-(1.37) в різних порядках за R можна знайти у роботі [75]. Там було показано, що на третьому порядку асимптотичного розкладання за числом Рейнольдса R отримуються основні рівняння еволюції вихрового поля:

$$(\partial_T - \nabla_Z^2) \widetilde{W}_1 = \frac{f_0^2}{2} D_2 \times \times \nabla_Z \left[\frac{1 + \widetilde{W}_2^2 - \widetilde{R}}{(1 + \widetilde{W}_2^2)((1 + \widetilde{W}_2^2)^2 + 2(D_2^2 - \widetilde{R})(1 - \widetilde{W}_2^2) + (D_2^2 - \widetilde{R})^2)} \right], \quad (1.52)$$

$$(\partial_T - \nabla_Z^2)\widetilde{W}_2 = -\frac{f_0^2}{2}D_1 \times \times \nabla_Z \left[\frac{1 + \widetilde{W}_1^2 - \widetilde{R}}{(1 + \widetilde{W}_1^2)((1 + \widetilde{W}_1^2)^2 + 2(D_1^2 - \widetilde{R})(1 - \widetilde{W}_1^2) + (D_1^2 - \widetilde{R})^2)} \right]. \quad (1.53)$$

де $\widetilde{R} = aRa + bR_m$, $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$. Рівняння (1.52)-(1.53) представляють нелінійні рівняння вихрового динамо в стратифікованій вологій атмосфері, що обертається з дрібномасштабною неспіральною силою. Важливо зазначити, що цей ефект вихрового динамо виникає лише у турбулентному середовищі, яке обертається. Рівняння (1.52)-(1.53) мають схожу форму з рівняннями (1.26)-(1.27), за винятком того, що параметр стратифікації \widetilde{R} у рівняннях (1.52)-(1.53) включає як параметри сухої, так і вологій конвекції: $\widetilde{R} = \left(1 + L\frac{c}{c_p}\right)Ra = Ra + R_q$. Коли немає обертання ($\mathbf{\Omega} = 0$) або зовнішньої сили ($\mathbf{F}_0 = 0$), великомасштабні поля послаблюються в'язкою дисипацією. У сухій атмосфері $R_q = 0$, рівняння (1.52)-(1.53) є ідентичними до рівнянь (1.26)-(1.27), а у однорідній рідині $\widetilde{R} = 0$, рівняння (1.52)-(1.53) є ідентичними до рівнянь (1.18), коли $f_0 = 1$.

1.5.2 Великомасштабна нестійкість

Розглянемо початкову стадію еволюції вихрових збурень $W_{1,2}$. Тоді для малих збурень (W_1, W_2) рівняння (1.52)-(1.53) лінеаризуються і зводяться до наступної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_2 \nabla_Z W_2 = 0, \\ \partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \alpha_1 \nabla_Z W_1 = 0. \end{cases} \quad (1.54)$$

де введені такі позначення для коефіцієнтів:

$$\alpha_1 = -2H_{01} \left[\frac{(D_1^2 - \widetilde{R} - 2)(2 - \widetilde{R}) + \frac{\widetilde{R}}{4}(4 + (D_1^2 - \widetilde{R})^2)}{(\widetilde{R} + 2)(4 + (D_1^2 - \widetilde{R})^2)} \right], \quad (1.55)$$

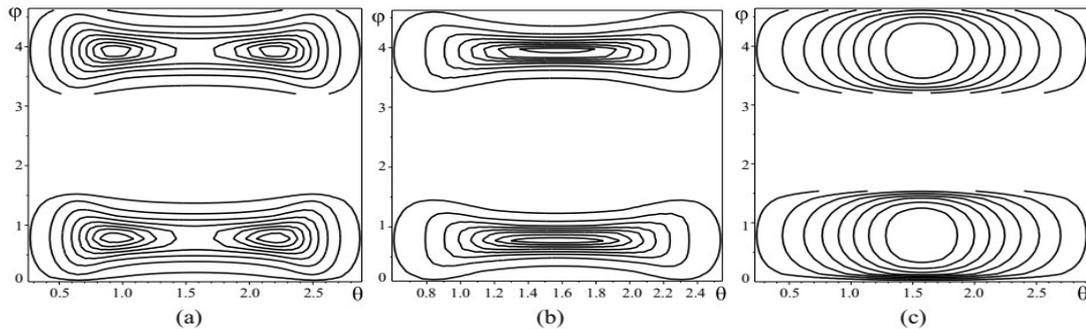


Рис. 1.11: Контурний графік для коефіцієнта α залежно від довготи φ і широти θ зі збільшенням параметра стратифікації: а) $\tilde{R} = 3$; б) $\tilde{R} = 5$; в) $\tilde{R} = 15$. Обчислення проведено для $D = 2$ і $f_0 = 10$.

$$\alpha_2 = -2H_{02} \left[\frac{(D_2^2 - \tilde{R} - 2)(2 - \tilde{R}) + \frac{\tilde{R}}{4}(4 + (D_2^2 - \tilde{R})^2)}{(\tilde{R} + 2)(4 + (D_2^2 - \tilde{R})^2)} \right].$$

$$H_{01} + H_{02} = -\frac{f_0^2}{2} \left(D_1 \cdot \frac{\tilde{R} + 2}{4 + (D_1^2 - \tilde{R})^2} + D_2 \cdot \frac{\tilde{R} + 2}{4 + (D_2^2 - \tilde{R})^2} \right).$$

Звідси видно, що коефіцієнти посилення $\alpha_{1,2}$ включають постійну середню спіральність $H_{01,02}$. Рівняння (1.54) подібні до рівнянь для вихрового динамо в середовищах зі спіральною турбулентністю [52]. Для дослідження великомасштабної нестійкості, що описується системою рівнянь (1.54), виберемо збурення у вигляді плоских хвиль з хвильовим вектором $\mathbf{K} \parallel OZ$. В результаті, із системи рівнянь (1.54) отримаємо дисперсійне рівняння:

$$(-i\omega + K^2)^2 - \alpha_1\alpha_2K^2 = 0. \quad (1.56)$$

Представляючи $\omega = \omega_0 + i\Gamma$, з рівняння (1.56) отримуємо:

$$\Gamma = \text{Im}(\omega) = \pm\sqrt{\alpha_1\alpha_2}K - K^2. \quad (1.57)$$

Рішення (1.57) свідчать про існування нестійкості при $\alpha_1\alpha_2 > 0$ для великомасштабних вихрових збурень. Якщо $\alpha_1\alpha_2 < 0$, то замість нестійкостей виникають загасаючі коливання з частотою $\omega_0 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}K$. За допомогою коефіцієнтів α_1 , α_2 встановлюється позитивний зворотний зв'язок між компонентами швидко-

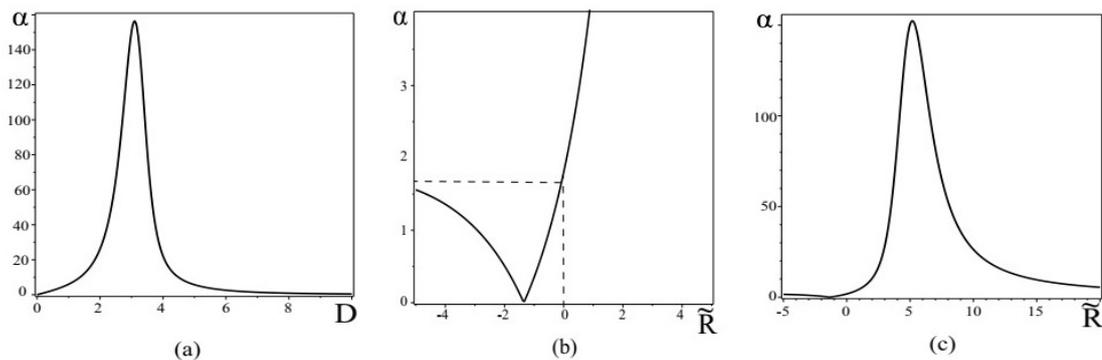


Рис. 1.12: а) графік залежності α -ефекту від параметра обертання середовища D ; б) на графіку показано значення α у разі однорідного середовища $\tilde{R} = 0$; с) графік залежності α -ефекту від параметра стратифікації середовища \tilde{R} . Обчислення проведено $f_0 = 10$.

сті, який реалізується проєкціями сили Коріоліса. Зауважимо, що в лінійній теорії, що розглядається тут, коефіцієнти α_1 , α_2 не залежать від амплітуд полів, а залежать тільки від параметрів обертання $D_{1,2}$, загального числа Релея \tilde{R} і амплітуди зовнішньої сили f_0 . У коефіцієнтах α_1 , α_2 замість декартових проєкцій D_1 і D_2 зручно перейти до їх проєкцій у сферичній системі координат (D, φ, θ) (див. Рис. 1.4). Координатна поверхня $D = \text{const}$ є сферою, де θ є широтою ($\theta \in [0, \pi]$), а φ є довготою ($\varphi \in [0, 2\pi]$). У такому випадку, параметри обертання $D_{1,2}$ в коефіцієнтах посилення вихрових збурень α_1 та α_2 відповідають:

$$D_1 = D \sin \theta \cos \varphi, \quad D_2 = D \sin \theta \sin \varphi.$$

Фіксуючи значення параметра обертання D , стратифікації \tilde{R} та амплітуди зовнішньої сили f_0 , можемо встановити залежність коефіцієнта посилення від широти θ та довготи φ (див. Рис. 1.11). Як видно з Рис. 1.11, при збільшенні параметра стратифікації \tilde{R} спостерігається зсув максимуму коефіцієнта посилення α до широти $\theta = \pi/2$ (екватор) та довготи $\varphi = \pi/4$. На полюсах ($\theta = 0, \theta = \pi$) генерація великомасштабних вихрових збурень не ефективна, оскільки $\alpha \rightarrow 0$. Цей факт підтверджується метеорологічними спостереженнями [51, 55], включаючи відсутність великомасштабних циклонів на полюсах Землі. Далі будемо

проводити обчислення для широти $\theta = \pi/2$ та довготи $\varphi = \pi/4$. Далі розглянемо вплив ефекту обертання середовища D на коефіцієнт посилення α або процес генерації великомасштабних збурень. Для цього зафіксуємо значення числа $\tilde{R} = 5$. У лівій частині Рис. 1.12а показано, що при певному значенні параметра обертання D , коефіцієнт α досягає свого максимального значення α_{\max} . При подальшому збільшенні значення параметра D , коефіцієнт α плавно зменшується, що свідчить про пригнічення ефекту α . Залежність коефіцієнта α від параметра стратифікації середовища \tilde{R} при фіксованому значенні числа $D = 3$ також показано на Рис. 1.12. Випадок однорідного середовища $\tilde{R} = 0$ зображений на Рис. 1.12b, де генерація великомасштабних вихрових збурень спричинена дією зовнішньої дрібномасштабної неспіральної сили та сили Коріоліса [72]. З Рис. 1.12с видно, що наявність стратифікації для «сухої» та «вологої конвекції» ($\tilde{R} \neq 0$) може призвести до значного збільшення коефіцієнта α та, як наслідок, швидшої генерації великомасштабних вихрових збурень порівняно з однорідним середовищем. Зі збільшенням числа Релея \tilde{R} спостерігається зниження значень коефіцієнта α . У лівій частині Рис. 1.13 представлений графік, що показує спільний вплив ефекту обертання та стратифікації у площині (D, \tilde{R}) . Область нестійкості $\alpha > 0$ показана сірим кольором. Графік залежності (див. праву частину Рис. 1.13) інкремента нестійкості Γ від хвильових чисел K має типовий вигляд, що характерний для ефекту α .

1.5.3 Стаціонарні нелінійні вихрові структури

Для пошуку стаціонарних структур в системі (1.52)-(1.53) потрібно покласти $\partial_T = 0$ і проінтегрувати ці рівняння один раз по Z . При цьому розглядати-мо випадок максимального значення α_{\max} , коли $\theta = \pi/2$ (широта) і $\varphi = \pi/4$ (довгота). В результаті отримаємо систему нелінійних рівнянь, яка має насту-

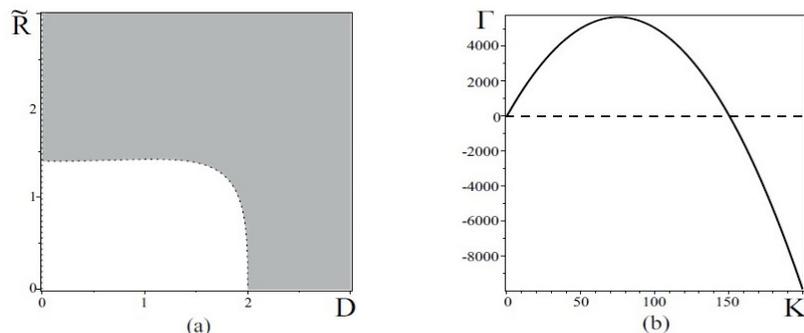


Рис. 1.13: *Зліва*: графік для α у площині (D, \tilde{R}) , де сірим кольором показана область, що відповідає позитивним значенням α (нестійкі рішення), а білим кольором - негативним значенням α . *Справа*: графік залежності інкременту Γ нестійкості від хвильових чисел K для параметрів $D = 3, \tilde{R} = 5$.

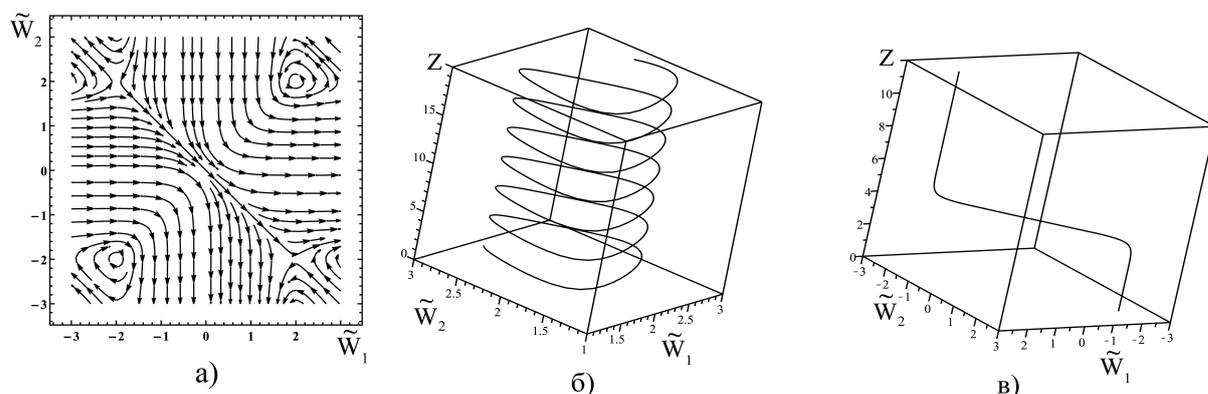


Рис. 1.14: а) Фазова площина для динамічної системи рівнянь (1.58)-(1.59) за умови $C_1 = -0.05$ і $C_2 = 0.05$; б) нелінійна спіральна хвиля, яка відповідає замкнутій траєкторії на фазовій площині; в) локалізована нелінійна вихрова структура (кінк), що відповідає сепаратрисі на фазовій площині.

пний вигляд:

$$\frac{d\tilde{W}_1}{dZ} = -f_0^2 D \sqrt{2} \frac{1 + \tilde{W}_2^2 - \tilde{R}}{(1 + \tilde{W}_2^2)(4(1 + \tilde{W}_2^2)^2 + 4(D^2 - 2\tilde{R})(1 - \tilde{W}_2^2) + (D^2 - 2\tilde{R})^2)} + C_1, \quad (1.58)$$

$$\frac{d\tilde{W}_2}{dZ} = f_0^2 D \sqrt{2} \frac{1 + \tilde{W}_1^2 - \tilde{R}}{(1 + \tilde{W}_1^2)(4(1 + \tilde{W}_1^2)^2 + 4(D^2 - 2\tilde{R})(1 - \tilde{W}_1^2) + (D^2 - 2\tilde{R})^2)} + C_2. \quad (1.59)$$

Тут C_1, C_2 - довільні постійні інтегрування. Здійснений аналіз системи рівнянь (1.58)-(1.59) показав, що в фазовому просторі можуть існувати стаціонарні то-

чки двох типів: еліптичні та гіперболічні. Лінеаризуючи праві частини рівнянь (1.58)-(1.59) навколо стаціонарних точок, можна визначити їх тип і побудувати фазовий портрет. В результаті аналізу було встановлено існування чотирьох стаціонарних точок, дві з яких є гіперболічного типу, а дві - еліптичного типу. Фазовий портрет динамічної системи (1.58)-(1.59) для фіксованих значень $C_1 = -0.05$, $C_2 = 0.05$, параметрів $D = \sqrt{10}$, $\tilde{R} = 5$ та $f_0 = 10$ показаний на Рис. 1.14. На цьому малюнку видно наявність замкнутих траєкторій навколо еліптичних точок і сепаратриси, яка з'єднує гіперболічні точки. Замкнені траєкторії відповідають нелінійним періодичним розв'язкам - нелінійним хвилям, а сепаратрисам відповідають локалізовані вихрові структури типу кінків (див. Рис. 1.14).

1.6 Вихрове динамо в стратифікованій нанорідини, що похило обертається, з дрібномасштабною неспіральною силою

Останнім часом велика увага приділяється дослідженню процесів перенесення в нанорідинах, які є двофазною системою, складеною з базового (або несучого) середовища середовища (рідини або газу) і наночастинок з характерними розмірами від 1 до 100 нм [79]. Типовими несучими (базовими) рідинами є вода, або будь-які органічні рідини, полімерні розчини і т.д., а в якості наночастинок, як правило, виступають частинки металів, оксидів металів. Завдяки малим розмірам, наночастинок практично не седиментують та не піддаються ерозії у каналах, по яких рухаються. Вивчення фізики нанорідин важливе значення у зв'язку з їх поширеністю як у технологічних, так і в природних середовищах.

Очевидно, що ефективне застосування нанорідин стане можливим лише після проведення теоретичних досліджень процесів переносу. Особливу увагу слід приділити процесам формування та еволюції великомасштабних структур та пов'язаним з ними явищам теплопереносу в нанорідинах. Знання механізмів,

що викликають нестійкість нанорідини та особливості нелінійної динаміки структур, дозволяють ефективно управляти процесами теплопереносу, наприклад, при конструюванні «теплових клапанів», сенсорних пристроїв на основі нанодротів і нанотрубок [80].

Перспективним напрямом вивчення нанорідини є опис цього об'єкта як бінарного середовища, частинки якого схильні до дифузійного/термодифузійного транспорту, дії зовнішніх сил гравітації та обертання. Наночастинки, щільність яких перевищує щільність середовища носія в кілька разів, схильні до гравітаційної сегрегації, що впливає на характер конвективних течій [81, 82]. При підігріванні шару нанорідини знизу, наночастинки в стані механічної рівноваги мігрують до верхньої холодної межі, посилюючи нестійку стратифікацію. Якщо термодифузійний потік перевищує гравітаційне осідання, то встановлюється стаціонарна конвекція, у випадку коли переважає гравітаційне осідання, в інтервалі чисел Релея існують хвильові режими [82]. У роботах [83, 84] досліджувалися умови утворення конвективних структур (конвективних осередків) в шарах нанорідин, що обертаються, з урахуванням ефектів термофорезу і броунівського руху частинок. У роботі [83] було показано, що градієнт температури та обертання надають стабілізуючий вплив, у той час як об'ємна частка наночастинок та відношення щільності наночастинок до базової рідини надають дестабілізуючий вплив на систему. Параметри концентрації, такі як число Релея R_n і число Льюїса L_e , збільшують швидкість нагрівання та масопереносу. Збільшення параметра обертання (числа Тейлора) призводить до зменшення швидкості передачі тепла та маси [84].

Однією з важливих проблем є генерація великомасштабних вихрових структур в нанорідинах. У цьому розділі наведено результати роботи [76], де вперше побудована теорія нелінійного вихрового динамо в стратифікованій нанорідині, що похило обертається, зі зовнішньою дрібномасштабною неспіральною силою.

1.6.1 Основні рівняння та постановка задачі

Розглянемо нескінченний горизонтальний шар нанорідини, яка не стискується та обертається з постійною кутовою швидкістю, нахиленою щодо площини (X, Y) . Нанорідина розташована між двома паралельними площинами $Z = 0$ і $Z = h$, де температура та об'ємна частка наночастинок залишаються постійними:

$$\begin{aligned} T &= T_d, \quad \phi = \phi_d \quad \text{при} \quad Z = 0, \\ T &= T_u, \quad \phi = \phi_u \quad \text{при} \quad Z = h, \end{aligned} \quad (1.60)$$

причому $T_d > T_u$, $\phi_u > \phi_d$. Припустимо, що обидві граничні поверхні є вільними. Рівняння гідродинаміки в'язкої нанорідини, що не стискується та обертається, у наближенні Буссінеска мають наступний вигляд (див. наприклад [83, 84]):

$$\begin{aligned} \rho_{00} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) &= -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + [\phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_{00} (1 - \beta(T - T_u))] \mathbf{g} + \\ &+ 2\rho_{00} \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F}_0, \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$(\rho c)_f \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = k_f \nabla^2 T + (\rho c)_p \left(D_B \nabla \phi \cdot \nabla T + D_T \frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T_u} \right), \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = D_B \nabla^2 \phi + \frac{D_T}{T_u} \nabla^2 T, \quad (1.63)$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0. \quad (1.64)$$

Рівняння (1.61)-(1.64) доповнюються граничними умовами для швидкості руху нанорідини. Умова непротікання на границях шару у вертикальному напрямку та відсутність дотичних напруг на межах шару призводять до наступних граничних умов для швидкості:

$$V_z = 0, \quad \frac{\partial^2 V_z}{dZ^2} = 0, \quad \text{при} \quad Z = (0, h). \quad (1.65)$$

У рівняннях (1.61)-(1.63), ρ_{00} представляє собою щільність нанорідини при контрольній температурі T_u , і вона обчислюється як $\rho_{00} = \phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_f$. Тут ρ_p -

щільність наночастинок, ρ_f - щільність базової рідини при температурі T_u , ϕ - об'ємна частка наночастинок, β - коефіцієнт теплового розширення. Одиничний вектор $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ спрямований у бік позитивної осі Z . Сила тяжіння спрямована вертикально вниз $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. $(\rho c)_f$ та $(\rho c)_p$ позначають ефективну теплоємність базової рідини та наночастинок відповідно. D_B - коефіцієнт Броунівської дифузії, D_T - коефіцієнт термофоретичної дифузії. Знаки коефіцієнтів D_B і D_T позитивні, тобто

$$D_B = \frac{k_B T}{3\pi\mu d_p} > 0, \quad D_T = \left(\frac{\mu_f}{\rho_f}\right) \left(\frac{0.26k_f}{2k_f + k_p}\right) > 0,$$

де d_p - діаметр наночастинок, k_B - постійна Больцмана, k_f та k_p - коефіцієнти теплопровідності базової рідини та наночастинок, а μ_f - в'язкість базової рідини. Рівняння (1.61) включає зовнішню силу, яка моделює джерело збудження в середовищі дрібномасштабних і високочастотних коливань поля швидкості з малим числом Рейнольдса $R \ll 1$. Середні значення таких коливань дорівнюють нулю, але через нелінійну взаємодію в деяких порядках теорії збурень з'являються додаткові члени, які не зникають при усередненні.

1.6.2 Великомасштабна нестабільність

Застосовуючи метод багатомасштабних асимптотичних розкладів у контексті «квазідвовимірної» задачі, отримаємо замкнуту систему рівнянь для великомасштабного поля швидкостей \mathbf{W} [76]. Коли амплітуда $W_{1,2}$ мала, нелінійні рівняння для $W_{1,2}$ можна апроксимувати лінійними рівняннями вихрового динамо, подібними до системи (1.28). Розв'язки цієї лінійної системи описують плоскі хвилі з круговою поляризацією, відомі як хвилі Бельтрамі. Амплітуда цих хвиль експоненціально зростає з часом. Великомасштабне поле швидкостей Бельтрамі задовольняє умові: $\mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{W} = 0$. Дисперсійне рівняння для хвиль Бельтрамі описується рівнянням, яке має схожий вигляд з рівнянням (1.30) і має нестійкі рішення з інкрементом (1.31): $\Gamma = \pm \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} K - K^2$. Коефіцієнти

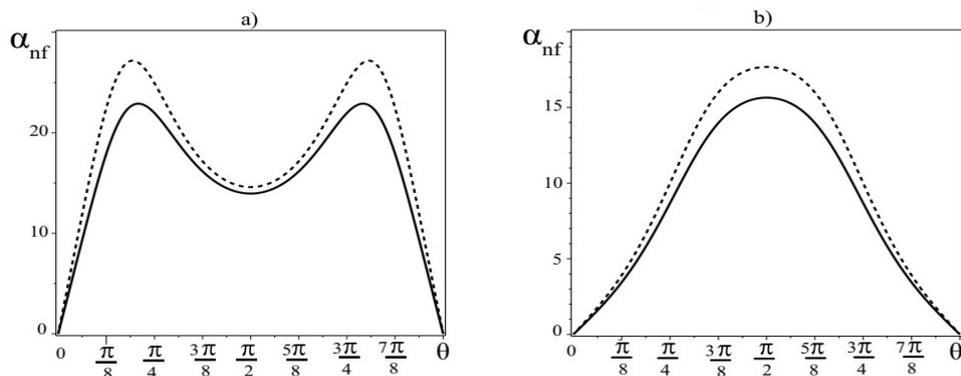


Рис. 1.15: Суцільною лінією показана залежність коефіцієнта посилення α_{nf} для нанорідини від кута нахилу θ , а штриховою лінією - залежність коефіцієнта посилення α_b для чистої рідини від кута нахилу θ . Графіки а) побудовані числа Прандтля $Pr = 5$, а графіки б) для $Pr = 1$.

посилення α_1 і α_2 для розглянутої задачі мають складний вигляд, який можна знайти у джерелі [76].

Щоб визначити умови, за яких виникає великомасштабна вихрова нестійкість, спочатку досліджують залежність коефіцієнту посилення від кута нахилу осі обертання нанорідини. Суцільна лінія на Рис. 1.15 представляє цю залежність для фіксованих значень: $D = 2$, $\tilde{Ra} = 2$, $k_0 = \omega_0 = 1$, $Pr = 5$, $\tilde{R}_n = 0.122$, $N_A = 5$, $L_e = 5000$. Значення параметрів нанорідини Pr , \tilde{R}_n , N_A , L_e (Al_2O_3 – вода) взяті з робіт [?, 83]. Як видно з Рис. 1.15а, максимальне значення α_{nf} для нанорідини відповідає куту нахилу $\theta_{max} \approx \pi/5 + \pi n$, а мінімальне - $\theta_{min} \approx \pi/2 + \pi n$. Рис. 1.15а відображає залежність $\alpha_b(\theta)$ для випадку «чистої» рідини з числом Прандтля $Pr = 5$. З графіків Рис. 1.15а видно, що максимальний коефіцієнт посилення $\alpha_b = (\alpha_{nf})_{\tilde{R}_n=0}$ для «чистої» рідини більший, ніж для нанорідини. Той самий висновок залишається справедливим і для числа Прандтля $Pr = 1$. У цьому випадку максимальні коефіцієнти посилення в нанорідині і «чистій» рідині досягаються при кутах відхилення $\theta \approx \pi/2 + \pi n$ (див. Рис. 1.15б). Звідси випливає, що характерний час T_{nf} і характерний масштаб L_{nf} генерованих великомасштабних вихорів у нанорідині перевищують відповідні масштаби T_b, L_b у «чистій» рідині: $T_{nf} \gg T_b$, $L_{nf} \gg L_b$, $T_{nf} \approx$

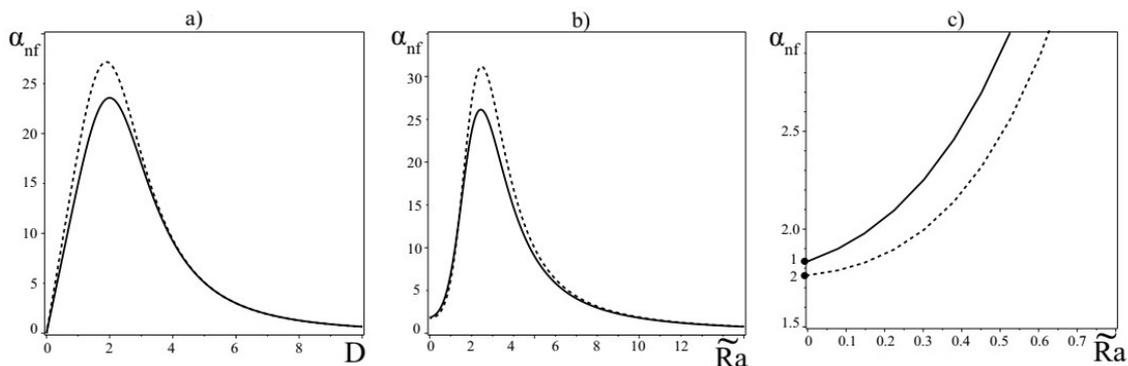


Рис. 1.16: а) Залежність коефіцієнта посилення α_{nf} для нанорідини (суцільна лінія) та коефіцієнта посилення α_b для чистої рідини (штрихова лінія) від параметра обертання D ; б) залежність коефіцієнта посилення α_{nf} для нанорідини (суцільна лінія) та коефіцієнта посилення α_b для «чистої» рідини (штрихова лінія) від числа Релея \widetilde{Ra} ; в) Точка 1 відповідає значенню α_{nf} для нанорідини при $\widetilde{Ra} = 0$, а точка 2 відповідає значенню α_b для «чистої» рідини при $\widetilde{Ra} = 0$.

$(\alpha_{nf}^2/4)^{-1}$, $L_{nf} \approx (\alpha_{nf}/2)^{-1}$, $T_b \approx (\alpha_b^2/4)^{-1}$, $L_b \approx (\alpha_b/2)^{-1}$. Розглянемо вплив ефекту обертання нанорідини на коефіцієнт посилення α_{nf} або процес генерації великомасштабних вихорів. Зафіксуємо параметри нанорідини $Pr, \widetilde{R}_n, N_A, L_e$ і число Релея $\widetilde{Ra} = 2$. Виберемо кут нахилу $\theta_{max} \approx 0.645 \approx \pi/5$, який відповідає максимальним значенням коефіцієнта посилення α_{nf} (див. Рис. 1.15а). Як видно з Рис. 1.16а, при певному значенні параметра обертання D коефіцієнт α_{nf} досягає свого максимального значення $\alpha_{max}^{(nf)}$. Зі збільшенням числа D коефіцієнт посилення плавно спадає до нуля, що означає пригнічення α -ефекту.

Далі, фіксуючи параметри нанорідини $Pr, \widetilde{R}_n, N_A, L_e$, обертання $D = 2$ і кута нахилу $\theta_{max} \approx 0.645$, визначимо залежність коефіцієнта α_{nf} від числа Релея \widetilde{Ra} . На Рис. 1.16б видно, що максимальна величина коефіцієнта посилення $\alpha_{nf}(\alpha_b)$ відповідає невеликим числам Релея \widetilde{Ra} . Великомасштабні вихори ефективно генеруються в інтервалі чисел Релея $\widetilde{Ra} \in [0, 3]$, потім зі збільшенням \widetilde{Ra} спостерігається спад $\alpha_{nf}(\alpha_b)$ (Рис. 1.16б) і генерація ВВС стає неефективною. Це означає, що при великих числах Релея \widetilde{Ra} великомасштабна нестійкість нано- і звичайної рідини не реалізується, а виникає звичайна конвективна нестійкість. За умови, коли немає підігріву ($\widetilde{Ra} = 0$), коефіцієнт посилення в

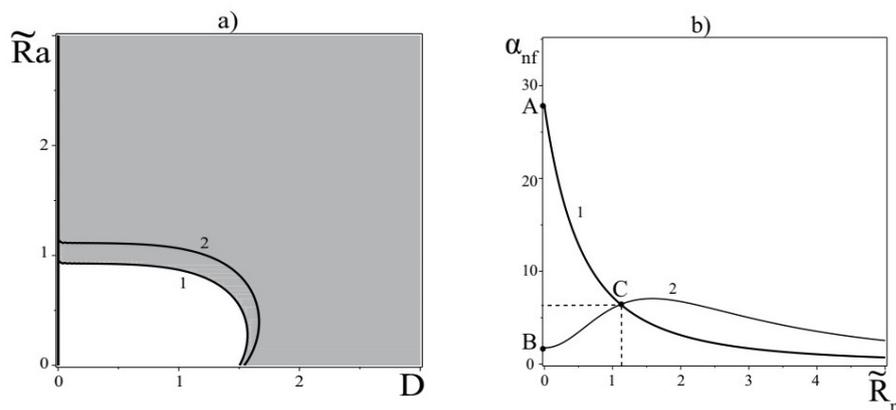


Рис. 1.17: а) Графік для α_{nf} у площині (D, \tilde{Ra}) , де сірим кольором показана область, що відповідає позитивним значенням α_{nf} (нестійкі рішення), а білим кольором - негативним значенням α_{nf} . Крива 1 відповідає межі нестійкості для нанорідини ($\tilde{R}_n = 0.122$), а крива 2 відповідає межі нестійкості для чистої рідини ($\tilde{R}_n = 0$); б) графік залежності α_{nf} -ефекту від концентраційного числа Релея \tilde{R}_n .

чистій рідині α_b (точка 2 на Рис. 1.16с) менший, ніж у нанорідині α_{nf} (точка 1 на Рис. 1.16с): $\alpha_{nf} > \alpha_b$. Рис. 1.16а-1.16б також спостерігається, що максимальний коефіцієнт посилення $\alpha_b = (\alpha_{nf})_{\tilde{R}_n=0}$ для «чистої» рідини більший, ніж для нанорідини. Рис. 1.17а представлений графік, що зображує спільний вплив ефекту обертання та температурної стратифікації в площині (D, \tilde{Ra}) . Тут область нестійкості $\alpha_{nf} > 0$ виділена сірим кольором. Крива 1 відповідає межі нестійкості для нанорідини ($\tilde{R}_n = 0.122$), а крива 2 відповідає межі нестійкості для чистої рідини ($\tilde{R}_n = 0$).

Тепер проведемо аналіз впливу концентраційного числа Релея \tilde{R}_n на коефіцієнт посилення α_{nf} або генерацію КВС для наступних фіксованих параметрів: $D = 2, \tilde{Ra} = 3, k_0 = \omega_0 = 1, Pr = 5, N_A = 5, L_e = 5000, \theta \approx 0.645$. На Рис. 1.17б показано перетин графіків (крива 1 і крива 2) у точці $C(\tilde{R}_n^{(0)}, \alpha_{nf}^{(0)})$. Крива 1 побудована для випадку, коли є градієнт температури $\tilde{Ra} = 3$. При $\tilde{R}_n = 0$ на кривій 1 показано максимальне значення α_b^{st} (точка А), відповідне «чистій» стратифікованій рідині. Подальше збільшення концентрації наночастинок призводить до спаду α_{nf} . Крива 2 побудована для випадку, коли граді-

ент температури відсутній $\widetilde{Ra} = 0$. З поведінки кривої 2 видно, що збільшення концентрації наночастинок спочатку призводить до зростання α_{nf} , а потім до спаду. При $\widetilde{R}_n = 0$ на кривій 2 показано максимальне значення α_b^h (точка B), що відповідає коефіцієнту посилення α для однорідної рідини [72]. Тут бачимо, що в «чистій» стратифікованій рідині генерація ВВС найефективніша, ніж в однорідній рідині, що узгоджується з висновками роботи [74]. Таким чином, при певному значенні числа $\widetilde{R}_n^{(0)}$ (концентрації наночастинок) отримуємо рівні темпи генерації КВС (точка C на Рис. 1.17b) в нанорідині як при наявності градієнта температури $\widetilde{Ra} \neq 0$, так і при його відсутності $\widetilde{Ra} = 0$. Фізично цей процес можна пояснити так: підвищення концентрації наночастинок на верхній шарі поверхні призводить до появи потоку через гравітаційну сегрегацію наночастинок на нижню поверхню. У свою чергу, за наявності градієнта температури виникає тепловий потік $\mathbf{q} \sim \mathbf{e}(T_d - T_u)/h$, що перешкоджає осіданню наночастинок на нижньому шарі поверхні. Зі збільшенням концентрації наночастинок \widetilde{R}_n відбувається зменшення частки теплового потоку, і, як наслідок, зменшення коефіцієнту посилення α_{nf} .

Рис. 1.18 показує залежність інкременту нестійкості Γ від хвильових чисел K для гідродинамічного α_{nf} -ефекту в нанорідині при постійних параметрах: $D = 2$, $\widetilde{Ra} = 2$, $Pr = 5$, $\widetilde{R}_n = 0.122$, $N_A = 5$, $L_e = 5000$, $\theta \approx 0.645$. Як видно з Рис. 1.18a, зі збільшенням частоти ω_0 зовнішньої сили \mathbf{F}_0 при $k_0 = 1$ відбувається зменшення максимальної швидкості зростання Γ_{max} великомасштабних вихрових збурень. Фіксуючи частоту зовнішньої сили \mathbf{F}_0 на $\omega_0 = 1$, побудуємо графік інкременту $\Gamma(K)$ (див. Рис. 1.18b) при зміні дрібномасштабного хвильового числа k_0 . Для чисел $k_0 < 1$ може спостерігатись як підвищення максимальної швидкості зростання Γ_{max} великомасштабних вихрових збурень ($k_0 = 0.8$) порівняно з рівнем Γ_{max} при $k_0 = 1$, так і зниження максимальної швидкості зростання великомасштабних вихрових збурень при $k_0 = 0.5$. Така поведінка обумовлена структурною залежністю коефіцієнту α_{nf} від дрібномас-

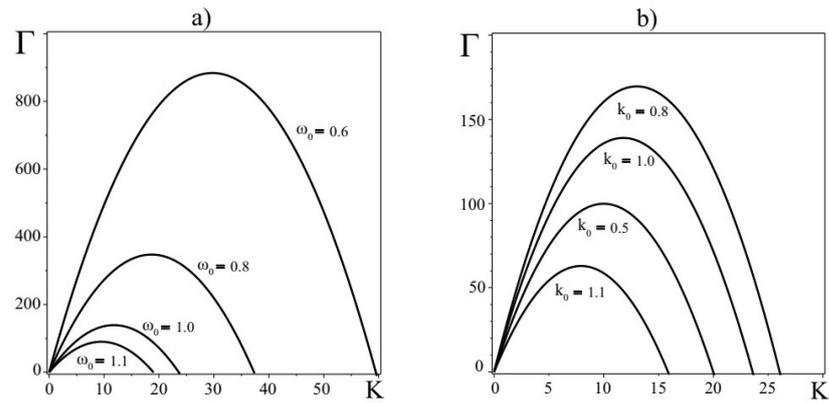


Рис. 1.18: а) Графік залежності інкременту нестійкості Γ від хвильових чисел K для різних частот ω_0 зовнішньої сили \mathbf{F}_0 при $k_0 = 1$; б) графік залежності інкременту нестійкості Γ від хвильових чисел K для різних хвильових чисел k_0 зовнішньої сили \mathbf{F}_0 за $\omega_0 = 1$.

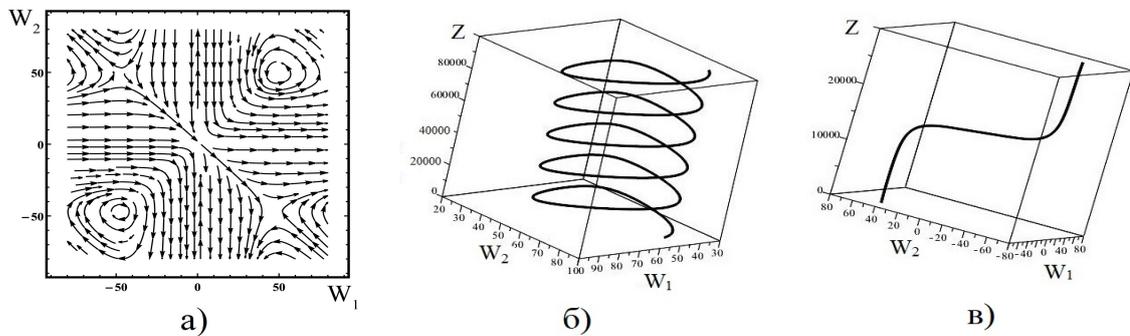


Рис. 1.19: а) Фазова площина для змінних $(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2)$; б) нелінійна спіральна хвиля, що відповідає замкненій траєкторії на фазовій площині; в) локалізована нелінійна вихрова структура (кінк), що відповідає сепаратрисі на фазовій площині.

штабних параметрів зовнішньої сили (ω_0, k_0) .

1.6.3 Насичення нестійкості та нелінійні структури

Збільшення W_1 і W_2 призводить до насичення нестабільності. В результаті розвитку і стабілізації нестійкості виникають нелінійні структури. У стаціонарному випадку ці структури описуються нелінійними рівняннями у гамільтоновій формі [76]. Використовуємо значення параметрів нанорідини $\text{Pr} = 1$, $\widetilde{R}_n = 0.122$, $N_A = 5$, $L_e = 5000$ (для Al_2O_3 -вода) з роботи [83]. Гамільтоновість рівнянь означає, що у фазовому просторі можуть спостерігатися непорушні то-

чки лише двох типів: еліптичні та гіперболічні непорушні точки. В результаті проведеного аналізу виявлено появу чотирьох непорушних точок, дві з яких є гіперболічними, а дві - еліптичними. На Рис. 1.19 видно наявність замкнутих траєкторій на фазовій площині навколо еліптичних точок та сепаратрис, які з'єднують гіперболічні точки. Замкненим траєкторіям відповідають нелінійні періодичні рішення - нелінійні хвилі, а сепаратрисам відповідають локалізовані вихрові структури типу кінків (див. Рис. 1.19).

1.7 Висновки до розділу 1

Наведемо основні результати, отримані у розділі 1.

1. Отримано замкнуті рівняння нелінійного вихрового динамо в однорідній в'язкій рідині, що обертається, з дрібномасштабною спіральною і неспіральною зовнішньою силою. Показано, що на лінійній стадії генерації КВС відбувається через розвиток великомасштабної нестійкості α -ефекту. Ця нестійкість виникає внаслідок дії сили Коріоліса та зовнішньої сили. Причому у разі неспіральної сили (1.14) необхідною умовою для розвитку нестійкості є відхилення осі обертання від вертикального напрямку. З цієї умови випливає, що генерація на полюсах неможлива, і найімовірніша в екваторіальній зоні. Знайдено нові стаціонарні рішення у вигляді локалізованих вихрових структур: спіральних кінків, нелінійних хвиль Бельтрамі та кінків з профілем швидкості у вигляді кінку.

2. Отримано замкнуті рівняння нелінійного вихрового динамо в стратифікованій сухій і вологій атмосфері, яка обертається. Визначено режими лінійної генерації великомасштабних вихрових збурень та визначено області (критерії) виникнення цієї нестійкості залежно від параметрів обертання D та стратифікації \tilde{R} (сухої та вологої). Облік ефектів стратифікації в середовищі, що обертається (температурний підігрів і додаткове джерело конденсаційного тепловиділення), призводить до істотного посилення великомасштабних збурень. Отримано ста-

ціонарні рішення у вигляді локалізованих вихрових структур, які аналогічні вихровим структурам, виявленим у однорідній рідині, що обертається.

3. Побудована теорія параметричної генерації великомасштабних вихрових структур (ВВС) в стратифікованій нанорідкості, що похило обертається. Генерація ВВС викликана розвитком нестійкості типу α -ефекту. Нестійкість виникає тільки у випадку, коли вектор кутової швидкості обертання відхилений від вертикальної осі OZ . Отримано новий ефект генерації ВВС у нанорідині (без градієнта температури), пов'язаний зі збільшенням концентрації наночастинок. Зі збільшенням частоти параметричного впливу зовнішньої сили, генерація ВВС стає менш ефективною. Цей ефект дає можливість контролю над процесом генерації ВВС. На нелінійній стадії зростання ВВС отримано локалізовані рішення у вигляді нелінійних хвиль та кінку.

Отримані в цьому розділі результати опубліковані у роботах [70–76].

РОЗДІЛ 2

ВЕЛИКОМАШТАБНІ ВИХРОВІ І МАГНІТНІ СТРУКТУРИ В
ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Здатність дрібномасштабної спіральної турбулентності генерувати великомасштабні магнітні поля є основою теорії динамо [10, 19, 85]. У спіральній турбулентності кореляція $\overline{\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{v}} \neq 0$ відмінна від нуля, і кількість вихорів одного знака більше, ніж вихорів іншого знака. Інтеграл $J_s = \int \overline{\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{v}} d\mathbf{r}$ є топологічним інваріантом (за відсутності в'язкості та зовнішніх сил), який є мірою зачепленості силових ліній вихрового поля обсягом, зайнятим турбулентним середовищем [10]. Генерація середнього (великомасштабного) поля в електропровідному середовищі викликана турбулентною електрорушійною силою (е.р.с.): $\mathcal{E} = \alpha \overline{\mathbf{H}}$, де коефіцієнт α пропорційний до середньої спіральності поля швидкості $\alpha \sim \overline{\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{v}}$, і отримав у літературі назву α -ефекту. На основі уявлень про α -ефект пояснювалося виникнення великомасштабних магнітних полів ряду космічних об'єктів (див. [18, 86]). В оглядах [11, 12] викладені математичні основи теорії динамо, представлені прості рішення динамо. В огляді [12] обговорюється феноменологічна модель нелінійного динамо, відома як «catastrophic quenching». Фізичний зміст цієї моделі заснований на енергетичних співвідношеннях. Передбачається, що сила Лоренца істотно впливає на течію рідини лише після того, як енергія магнітного поля стане порівнянною з кінетичною енергією турбулентного потоку. Отже, проста феноменологічна модель, яка враховує нелінійну залежність коефіцієнтів посилення α та турбулентної магнітної в'язкості η_T :

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + B_0^2/\mathcal{B}^2}, \quad \eta_T = \frac{\eta_0}{1 + B_0^2/\mathcal{B}^2},$$

де α_0 і η_0 – значення коефіцієнтів, які отримані в кінематичному наближенні, $B_0^2 = \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$ – енергія середнього поля, \mathcal{B}^2 – кінетична енергія потоку. В огляді [11] обговорюються результати численного моделювання гео- і сонячного динамо, а також описується магнітоврацательне динамо, в якому турбулен-

тність пов'язана з розвитком МГД-нестійкості. В [11] розглядаються проблеми нової, все більш популярної області генерації магнітних полів у плазмі з малою кількістю зіткнень між частинками.

Генерація великомасштабних полів, яка викликана конвекцією у електропровідному середовищі, для опису недр планети розглядалася в роботах [87–90]. Питання конвективної нестійкості рідини з температурною стратифікацією детально викладено, наприклад, у [6, 40, 91]. У цих роботах основна увага приділена стійкості руху рідини під впливом зовнішніх факторів: вращательного руху, зовнішнього однородного магнітного поля та інших. Під впливом цих факторів в рідині виникають нестійкості, у результаті чого утворюються когерентні структури - конвективні осередки. На нелінійній стадії розвитку нестійкості у рідині можуть виникати різні структури комірок і навіть хаотичність комірок.

У роботах [87–90] теорія динамо побудована без урахування турбулентного руху, хоча в об'єктах, що обертаються, в результаті розвитку різних нестійкостей (наприклад, магнітообертальна нестійкість [92], термомагнітна нестійкість [93] тощо) можуть цілком генеруватися дрібномасштабні спіральні течії. Облік цих течій у теоріях конвективного динамо міг би більш адекватно відобразити процеси виникнення солітоноподібних структур у фотосфері Сонця, рідкому ядрі Землі та планет, акреційних дисках тощо. Аналіз експериментальних даних і теоретичних гіпотез [94, 95] свідчить, що турбулентні рухи в міжзоряній плазмі демонструють механізм зворотного зв'язку між дрібномасштабною турбулентністю і формуванням великомасштабних упорядкованих когерентних структур. Природним поясненням такого спонтанного формування великомасштабних структур є розвиток великомасштабної нестійкості у повністю розвиненій дрібномасштабній турбулентності.

Генерація ВВС і великомасштабних магнітних полів в дрібномасштабній спіральній турбулентності у МГД, що стискується, була розглянута в роботі [96]. Стисливість середовища та спіральна турбулентність забезпечують ефективний

механізм позитивного зворотного зв'язку між дрібномасштабною фоновною турбулентністю та великомасштабними впорядкованими структурами. Така нестійкість пов'язана з енергією, яка передається з енергонесучих масштабів дрібномасштабної турбулентності до великомасштабних когерентних структур. Причина появи великомасштабної нестійкості пов'язана з урахуванням стисливості середовища, що є основним чинником порушення симетрії в напругах Рейнольдса.

Дійсно, застосовність кінематичних теорій магнітного [10, 18, 19, 85, 86] та вихрового динамо [57], [59, 60], [62] обмежена. Якщо магнітні та вихрові поля посилюються протягом достатнього часу, вони починають впливати на течії, і їх поведінку слід розглядати узгоджено, в межах нелінійної теорії. Мабуть, магнітні поля реальних об'єктів, які спостерігаються, знаходяться саме в нелінійному режимі, що визначає значимість нелінійної теорії. Недоліком теорії середнього поля є те, що не можна коректно виділити головний порядок з усієї ієрархії збурень, у якому виникає нестійкість. Тому іншою альтернативою для побудови нелінійної теорії динамо є метод багатомасштабних асимптотичних розкладів [65].

2.1 Магніто-вихрове динамо в електропровідній рідині, що обертається, з дрібномасштабною спіральністю

В даному розділі розглянута генерація великомасштабних вихрових і магнітних структур в електропровідній рідині, що обертається під дією зовнішньої дрібномасштабної спіральної сили. Застосовуючи метод багатомасштабних асимптотичних розкладів, отримані середні рівняння МГД у рідині, що обертається, для великомасштабних полів. Ці рівняння є самоузгодженою системою нелінійних рівнянь для великомасштабних магнітних і гідродинамічних полів. На відміну від кінематичного динамо, вихрові та магнітні поля взаємодіють одне з одним. Система рівнянь, що описує взаємодію полів, називається рів-

няннями нелінійного магніто-вихрового динамо. Проведений чисельний аналіз нелінійних рівнянь у стаціонарному режимі показав існування локалізованих вихрових та магнітних структур [97].

2.1.1 Основні рівняння магніто-вихрового динамо

Головними рівняннями для опису динаміки електропровідної рідини, яка не стискується та обертається, є добре відомі рівняння однорідної МГД:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + 2[\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}] + \frac{1}{4\pi\rho_{00}} [\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}_0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.3)$$

Тут \mathbf{V} , P , \mathbf{B} – обурення швидкості, тиску та індукції магнітного поля щодо рівноважного стану:

$$\nabla P_{00} = -\rho_{00} \nabla \Phi_{00} - \rho_{00} [\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]], \quad (2.4)$$

де \mathbf{r} – радіус-вектор елемента середовища, Φ_{00} – рівноважний потенціал, що описує зовнішню силу тяжіння, ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини, $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma_c}$ – коефіцієнт магнітної в'язкості, σ_c – коефіцієнт електропровідності середовища. Припустимо, що вектор кутової швидкості обертання $\boldsymbol{\Omega}$ є постійним і має одну компоненту в декартовій системі координат: $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega_3)$. Середовище вважається безмежним, і впливом зовнішнього магнітного поля знехтуємо. Проте, припускається, що дрібномасштабні магнітні поля, відомі як затравні (або початкові) магнітні поля, присутні. Ці поля можуть бути збуджені не турбулентними механізмами [92]. У рівнянні (2.1) включено зовнішню спіральну силу \mathbf{F}_0 , яка моделює джерело збудження в середовищі дрібномасштабних і високочастотних флуктуацій поля швидкості $\tilde{\mathbf{v}}_0$ з малим числом Рейнольдса $R = \frac{\tilde{v}_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$, і має властивості (1.3). Алгебраїчна структура асимптотичного

розкладання рівнянь (2.1)-(2.4) в різних порядках по R наведена в [97]. В цій роботі показано, що у порядку R^3 виходять головні секулярні рівняння.

У деяких астрофізичних і геофізичних задачах для опису великомасштабних вихрових і магнітних полів використовується «квазідвумірне» наближення (1.8). В рамках цього наближення ми припускаємо, що великомасштабна похідна по координаті Z є головною. В результаті ми отримали замкнуті рівняння для великомасштабних полів швидкості (W_1, W_2) та магнітного поля (H_1, H_2) [97]:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_Z (\alpha_{(1)} \cdot (1 - W_2)) = 0, \quad (2.5)$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 - \nabla_Z (\alpha_{(2)} \cdot (1 - W_1)) = 0, \quad (2.6)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \Delta H_1 + \nabla_Z (\alpha_H^{(2)} H_2) = 0, \quad (2.7)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \Delta H_2 - \nabla_Z (\alpha_H^{(1)} H_1) = 0, \quad (2.8)$$

де $Pm = \nu/\nu_m$ – магнітне число Прандтля, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ – коефіцієнт магнітної в'язкості. Коефіцієнти нелінійного гідродинамічного α -ефекту мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_{(1)} &= \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_2 (1 + Pm (1 - q_2)) (1 - W_2)^{-1}}{\left[16 (1 - W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1 - W_2)^2 \right]^2 + h_2 \right]} - \\ &\quad - \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2 (1 + Pm (1 - q_1)) (1 - W_2)^{-1}}{\left[16 (1 - W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1 - W_1)^2 \right]^2 + h_1 \right]}, \\ \alpha_{(2)} &= \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_1 (1 + Pm (1 - q_1)) (1 - W_1)^{-1}}{\left[16 (1 - W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1 - W_1)^2 \right]^2 + h_1 \right]} + \\ &\quad + \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2 (1 + Pm (1 - q_2)) (1 - W_1)^{-1}}{\left[16 (1 - W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1 - W_2)^2 \right]^2 + h_2 \right]}, \\ q_{1,2} &= 1 + \frac{QH_{1,2}^2}{4 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{1,2} &= 2f_{1,2}(4 + (1 - W_{1,2})^2)^2 + f_{1,2}^2 \left(4 + (1 - W_{1,2})^2\right)^2 + D^2 g_{1,2}, \\
f_{1,2} &= \frac{QH_{1,2}^2}{\left(4 + (1 - W_{1,2})^2\right) \left(4 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2\right)} \times \\
&\times \left[2 \left(4 + Pm (1 - W_{1,2})^2\right) + QH_{1,2}^2\right], \quad g_{1,2} = \frac{QH_{1,2}^2}{\left(4 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2\right)} \times \\
&\times \left[2 \left(4 + Pm (1 - W_{1,2})^2\right) + \frac{QH_{1,2}^2 \left(4 - Pm^2 (1 - W_{1,2})^2\right)}{4 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2}\right].
\end{aligned}$$

$\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ відповідають коефіцієнтам нелінійного магнітогідродинамічного ефекту:

$$\begin{aligned}
\alpha_H^{(1,2)} &= \\
&= \frac{f_0^2 D (1 - W_{1,2}) Pm (1 + Pm (1 - q_{1,2}))}{\left(4 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2\right) \left[16 (1 - W_{1,2})^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1 - W_{1,2})^2\right]^2 + h_{1,2}\right]}.
\end{aligned}$$

Рівняння (2.5)-(2.8) визначають нелінійну динаміку великомасштабних полів у електропровідному середовищі, що обертається. Зв'язок між компонентами великомасштабного вихрового та магнітного поля здійснюється за допомогою коефіцієнтів нелінійного гідродинамічного (ГД) $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$ і магнітогідродинамічного (МГД) $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ α -ефекту. Ці коефіцієнти є функціями великомасштабних полів швидкості \mathbf{W} і магнітного поля \mathbf{H} . Рівняння (2.5)–(2.8) описують основну систему самоузгодженого нелінійного магнітно-вихрового динамо в електропровідній рідині, що обертається, під дією зовнішньої дрібномасштабної сили \mathbf{F}_0 . Великомасштабні течії і магнітні поля взаємодіють, що дозволяє вивчати складну динаміку таких систем. Якщо ефект обертання Ω зникне ($\Omega = 0$), тоді динаміка великомасштабних полів перейде в звичайне дифузійне розпливання. У цьому випадку, рівняння (2.5)-(2.6) зменшаться до відповідних дифузійних рівнянь, які описують процеси розпливання полів в неелектропровідній рідині. У межах неелектропровідної рідини ($\sigma = 0$), рівняння (2.5)-(2.6) повністю збігаються з результатами роботи [70]. Це означає, що при $\sigma = 0$ ми отримуємо ті

самі рівняння, які були виведені у роботі [70].

2.1.2 Великомасштабна нестійкість

Розглянемо початкову стадію розвитку збурень (W_1, W_2) і (H_1, H_2) . Тоді при малих значеннях величин (W_1, W_2) і (H_1, H_2) рівняння (2.5)-(2.8) лінеаризуються і зводяться до наступної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_1 \nabla_Z W_1 + \alpha_2 \nabla_Z W_2 = 0 \\ \partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 - \alpha_1 \nabla_Z W_2 - \alpha_2 \nabla_Z W_1 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 + \alpha_H \nabla_Z H_2 = 0 \\ \partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_2 - \alpha_H \nabla_Z H_1 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

де введені такі позначення для коефіцієнтів:

$$\alpha_1 = \frac{f_0^2}{8} \frac{32D^2 (10 - D^2)}{\left((D^2 + 6)^2 + 64\right)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{f_0^2}{2} \frac{32D (10 - D^2)}{\left((D^2 + 6)^2 + 64\right)^2},$$

$$\alpha_H = f_0^2 \frac{4PmD}{(4 + Pm^2) \left((D^2 + 6)^2 + 64\right)}.$$

Як видно з системи рівнянь (2.9)-(2.10), при малих збуреннях полів відбувається розщеплення самоузгодженої системи рівнянь (2.5)-(2.8) на дві пари рівнянь для великомасштабного поля швидкості \mathbf{W} і магнітного поля \mathbf{H} відповідно. Перша пара рівнянь (2.9) подібна до рівнянь для вихрового динамо [52], відмінність від яких полягає в появі додаткового конвективного члена з α_1 . За допомогою коефіцієнта α_2 встановлюється позитивний зворотний зв'язок, за допомогою якого можлива генерація великомасштабних вихрових структур. Друга пара рівнянь (2.10) описує добре відомий α -ефект у теорії динамо [?] або посилення великомасштабного магнітного поля дрібномасштабною спіральною турбулентністю.

Для дослідження великомасштабної нестійкості, що описується системою

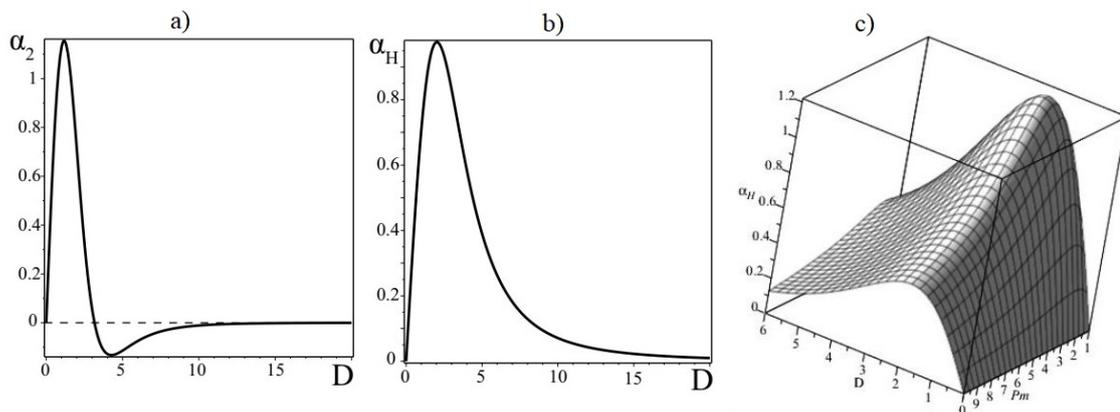


Рис. 2.1: а) Графік залежності ГД α -ефекту від параметра обертання рідини D ; б) графік залежності МГД α -ефекту від параметра обертання рідини D для магнітних чисел Прандтля $Pm = 1$; в) тривимірне зображення залежності коефіцієнта α_H від параметра обертання D та числа Прандтля Pm .

рівнянь (2.9)-(2.10), виберемо збурення у вигляді плоских хвиль із хвильовим вектором $\mathbf{K} \parallel OZ$. З рівнянь (2.9)-(2.10) знаходимо:

$$\omega_{01} = Re\omega_1 = -\alpha_1 K, \quad \Gamma_1 = Im\omega_1 = \pm\alpha_2 K - K^2, \quad (2.11)$$

$$\omega_{02} = Re\omega_2 = 0, \quad \Gamma_2 = Im\omega_2 = \pm\alpha_H K - Pm^{-1} K^2. \quad (2.12)$$

Рішення (2.11)-(2.12) вказують на існування нестійких коливальних рішень для великомасштабних вихрових збурень. Максимальний інкремент нестійкості $\Gamma_{1max} = \frac{\alpha_2^2}{4}$ досягається при хвильових числах $K_{max} = \frac{\alpha_2}{2}$. Коливальна мода для магнітних збурень $\omega_{02} = 0$, а максимальний інкремент нестійкості $\Gamma_{2max} = \frac{\alpha_H^2}{4} Pm$ досягає свого значення при хвильових числах $K_{max} = \frac{\alpha_H}{2} Pm$. Зазначимо, що в лінійній теорії коефіцієнти α_1 , α_2 , α_H не залежать від амплітуд полів, але залежать від параметра обертання D , магнітного числа Прандтля Pm і амплітуди зовнішньої сили f_0 . Оскільки коефіцієнти α_2 , α_H відповідальні за генерацію вихрових і магнітних полів, проаналізуємо залежність цих коефіцієнтів від безрозмірних параметрів, вважаючи для простоти безрозмірну амплітуду зовнішньої сили f_0 рівною $f_0 = 10$. Залежність коефіцієнтів α_2 , α_H від обертання рідини (параметра D) зображено на Рис. 2.1. Як видно з Рис. 2.1а, «повільне»

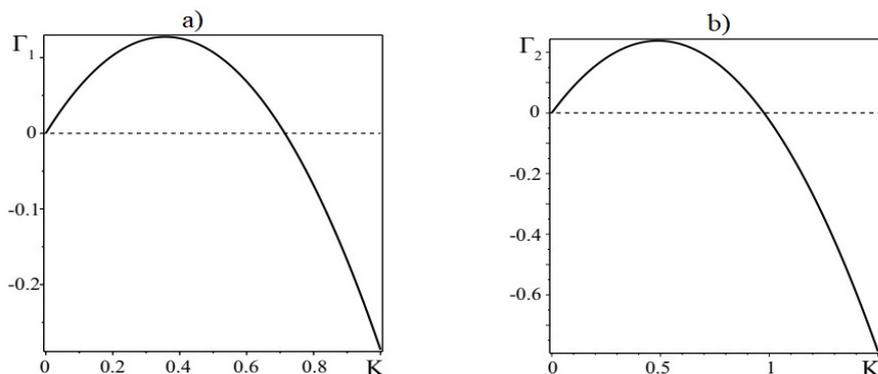


Рис. 2.2: а) Графік залежності інкременту нестійкості для ГД α -ефекту від хвильових чисел K при параметрі обертання $D = 2$; б) графік залежності інкременту нестійкості для МГД α -ефекту від хвильових чисел K при параметрі обертання $D = 2$.

обертання рідини призводить до збільшення α_2 (гідродинамічний α -ефект) до максимального значення α_{2max} , після чого при подальшому збільшенні параметра D («швидке» обертання) спостерігається зменшення значень α_2 . Аналогічний ефект було описано в роботі [78]. Крім того, при «швидкому» обертанні рідини стають суттєвими члени порядку D^2 , які призводять до зміни знака в ефекті α -ефекту: $\alpha_2 \rightarrow -\alpha_2$ (див. Рис. 2.1а). У цьому випадку затухаюча мода ефекту α -ефекту стає наростаючою.

Рис. 2.2а показує залежність швидкості еволюції великомасштабних вихрових збурень Γ_1 від хвильових чисел K для параметра обертання $D = 2$. Магніто-гідродинамічний α -ефект (або α_H -ефект) також збільшується при «повільному» обертанні до максимального значення α_{Hmax} , після чого при збільшенні параметра D спостерігається спад α_H , але знак коефіцієнта α_H не змінюється. Це виразно простежується на Рис. 2.1b для магнітних чисел Прандтля $Pm = 1$. У разі довільних значень Pm при «швидкому» обертанні рідини ми спостерігаємо пригнічення α_H -ефекту (див. Рис. 2.1c). Графік швидкості еволюції великомасштабного магнітного поля Γ_2 від хвильових чисел K для параметра $D = 2$ і $Pm = 1$ показаний на Рис. 2.2b. В результаті розвитку нестійкостей в еле-

ктропровідній рідині, що обертається, генеруються великомасштабні вихори і магнітні поля.

2.1.3 Нелінійні стаціонарні структури

Очевидно, що зі зростанням амплітуди збурень $W_{1,2}$ і $H_{1,2}$ нелінійні коефіцієнти $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ зменшуються, і нестійкість насичується, переходячи до стаціонарного режиму. Отже, утворюються нелінійні стаціонарні структури. Для опису таких структур розглянемо нелінійну систему рівнянь (2.5)-(2.8) у стаціонарному випадку. Розглянемо випадок слабкої електропровідності середовища, коли магнітне число Прандтля і число Чандрасекара малі: $Pm \rightarrow 0$, $Q \rightarrow 0$. Малість магнітних чисел Прандтля Pm може бути обумовлено як слабкою електропровідністю ($\sigma \rightarrow 0$) середовища, так і дуже малою кінематичною в'язкістю ($\nu \rightarrow 0$) середовища. За цих умов генерація великомасштабного магнітного поля не є ефективною ($H_{1,2} \ll 1$). У такому середовищі під впливом зовнішньої дрібномасштабної сили та сили Коріоліса можлива генерація великомасштабних вихрових структур [70]. Нелінійні вихрові структури такого типу описуються системою рівнянь (1.9). Стаціонарні рішення цих рівнянь мають вигляд спіральних кінків з обертанням (див. Рис. 1.2).

Перейдемо тепер до випадку, коли магнітне число Прандтля відмінне від нуля і дорівнює, наприклад, одиниці: $Pm = 1$. У цьому випадку в електропровідній рідині, що обертається, під дією зовнішньої дрібномасштабної сили \mathbf{F}_0 виникає генерація великомасштабного магнітного поля, причому максимальна швидкість росту магнітних збурень Γ_{2max} перевищує максимальну швидкість росту великомасштабних вихрових збурень Γ_{1max} :

$$\frac{\Gamma_{2max}}{\Gamma_{1max}} = \left(\frac{\alpha_H}{\alpha_2} \right)^2 Pm|_{(Pm=1, D=3)} \approx 2.09 \cdot 10^2. \quad (2.13)$$

Виходячи з цієї обставини, можна уявити таку картину фізичних процесів, що протікають: генероване великомасштабне вихрове збурення в середовищі, що

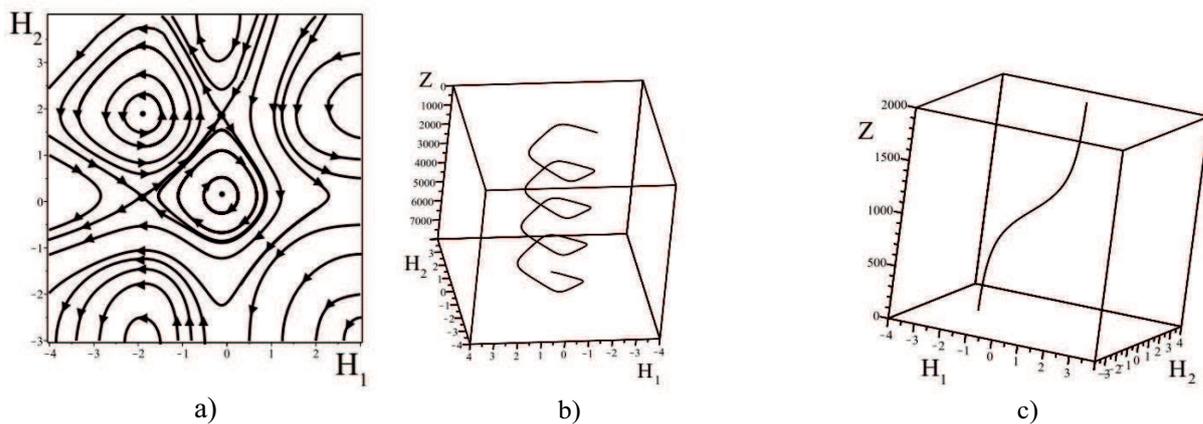


Рис. 2.3: а) Фазовий портрет динамічної системи рівнянь (2.14)-(2.15); б) стаціонарне рішення на околиці еліптичної точки, що відповідає нелінійній хвилі; с) стаціонарне рішення, яке відповідає кінку.

обертається, ще не вийшло на стаціонарний режим, а збурення великомасштабного магнітного поля вже досягли свого насичення на стаціонарному рівні. В цьому випадку впливом малих амплітуд великомасштабних вихрових збурень $W_{1,2} \ll 1$ на еволюцію великомасштабного магнітного поля ми можемо знехтувати. В результаті, стаціонарне великомасштабне магнітне поле описується такою системою рівнянь:

$$\frac{d\tilde{H}_1}{dZ} = f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_2^2)\tilde{H}_2}{\tilde{H}_2^8 + 20\tilde{H}_2^6 + a\tilde{H}_2^4 + b\tilde{H}_2^2 + c} + C'_3, \quad (2.14)$$

$$\frac{d\tilde{H}_2}{dZ} = -f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_1^2)\tilde{H}_1}{\tilde{H}_1^8 + 20\tilde{H}_1^6 + a\tilde{H}_1^4 + b\tilde{H}_1^2 + c} + C'_4, \quad (2.15)$$

де

$$\tilde{H}_{1,2} = H_{1,2}\sqrt{Q}, \quad C'_{3,4} = C_{3,4}\sqrt{Q}, \quad a = 3D^2 + 150, \\ b = 50(D^2 + 10), \quad c = 25 \left(\left(\frac{D^2}{2} + 3 \right)^2 + 16 \right).$$

Приступимо до дослідження стаціонарних магнітних структур, що описуються системою рівнянь (2.14)-(2.15). Але спочатку нам важливо встановити область зміни постійних (C_3, C_4), яка визначається шляхом обчислення максимуму та

мінімуму функції

$$\Phi_{1,2} = \left(f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_{1,2}^2)\tilde{H}_{1,2}}{\tilde{H}_{1,2}^8 + 20\tilde{H}_{1,2}^6 + a\tilde{H}_{1,2}^4 + b\tilde{H}_{1,2}^2 + c} \right).$$

Позначимо через $\chi = \max \left(f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_2^2)\tilde{H}_2}{\tilde{H}_2^8 + 20\tilde{H}_2^6 + a\tilde{H}_2^4 + b\tilde{H}_2^2 + c} \right)$, тоді при зміні \tilde{H}_2 , область зміни постійних (C_3, C_4) визначається такими нерівностями:

$$-\chi < C_3 < \chi, \quad -\chi < C_4 < \chi.$$

Для фіксованих значень f_0, D, Q , цей максимум легко обчислюється. Далі і під час всіх чисельних розрахунків прийmemo $f_0 = 1, D = 3, Q = 1$. Лінеаризуючи праві частини системи рівнянь (2.14)-(2.15) в околиці нерухомих точок, ми можемо встановити їх тип і побудувати відповідний фазовий портрет. Так, при виборі постійних $C_3 \neq 0$ ($C_3 = -0.001$) і $C_4 \neq 0$ ($C_4 = -0.001$) ми отримуємо чотири нерухомі точки: дві еліптичного та дві гіперболічного типів. Фазовий портрет цього випадку ($C_3 \neq 0$ і $C_4 \neq 0$) представлений на Рис. 2.3а. З нього видно існування двох типів обмежених стаціонарних рішень: нелінійні хвилі та кінки. Нелінійним хвилям відповідають замкнуті траєкторії фазового портрета, а кінкам - сепаратриси, що з'єднують гіперболічні точки (див. Рис. 2.3b-2.3с).

В принципі, нелінійні хвилі можна розділити на два типи, залежно від нерухокої еліптичної точки, яку вони оточують. Аналогічно в цьому випадку можна розрізнити два типи кінків по сегментах сепаратрис, що з'єднують дві гіперболічні точки.

2.2 Магніто-вихрове динамо в електропровідній рідині, що похило обертається

В попередньому розділі 2.1 ми розглянули ситуацію, коли турбулентність підтримувалася зовнішньою спіральною силою, тобто спіральною турбулентністю. Проте природним є питання про можливість генерації таких полів під дією

дрібномасштабної сили з нульовою спіральністю $\overline{\mathbf{v}_0 \text{rot} \mathbf{v}_0} = 0$ тобто в неспіральной турбулентності. Саме це питання було досліджено у роботах [98, 99]. У цьому розділі наведемо головні результати цього дослідження.

2.2.1 Постановка задачі та рівняння нелінійного магніто-вихрового динамо

Розглядаємо динаміку електропровідної рідини, яка не стискується та обертається, що описується рівняннями магнітної гідродинаміки (2.1)-(2.3). Тут вектор кутової швидкості обертання $\mathbf{\Omega}$ нахилено щодо площини (X, Y) для декартової геометрії задачі. Джерелом збудження у середовищі дрібномасштабних і високочастотних флуктуацій поля швидкості $\tilde{\mathbf{v}}_0$ з малим числом Рейнольдса $R = \frac{\tilde{v}_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ є зовнішня неспіральна сила \mathbf{F}_0 (1.14) з властивостями (1.15). Застосовуючи метод багатомасштабних асимптотичних розкладів, в рамках «квазідвовимірної» задачі, ми отримали нелінійні рівняння еволюції великомасштабних полів. Для випадку похилого обертання та вибору неспіральної сили (1.14), ми отримали замкнуті рівняння для великомасштабних полів швидкості (W_1, W_2) і магнітного поля (H_1, H_2) у такому вигляді [98, 99]:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_Z (\alpha_{(2)} \cdot (1 - W_2)) = 0, \quad (2.16)$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 - \nabla_Z (\alpha_{(1)} \cdot (1 - W_1)) = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \Delta H_1 + \nabla_Z (\alpha_H^{(2)} \cdot H_2) = 0, \quad (2.18)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \Delta H_2 - \nabla_Z (\alpha_H^{(1)} \cdot H_1) = 0. \quad (2.19)$$

Тут коефіцієнти $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ відповідно нелінійного ГД і МГД α – ефектів:

$$\alpha_{(1)} = \frac{f_0^2}{2} \frac{D_1 q_1 Q_1 (1 - W_1)^{-1}}{\left[4(1 - W_1)^2 q_1^2 Q_1^2 + [D_1^2 + W_1(2 - W_1) + \mu_1]^2 \right]},$$

$$\alpha_{(2)} = \frac{f_0^2}{2} \frac{D_2 q_2 Q_2 (1 - W_2)^{-1}}{\left[4(1 - W_2)^2 q_2^2 Q_2^2 + [D_2^2 + W_2(2 - W_2) + \mu_2]^2 \right]},$$

$$\alpha_H^{(1)} = f_0^2 \frac{D_1 (1 - W_1) Pm Q_1}{\left(1 + Pm^2 (1 - W_1)^2 \right) \left[4(1 - W_1)^2 q_1^2 Q_1^2 + [D_1^2 + W_1(2 - W_1) + \mu_1]^2 \right]},$$

$$\alpha_H^{(2)} = f_0^2 \frac{D_2 (1 - W_2) Pm Q_2}{\left(1 + Pm^2 (1 - W_2)^2 \right) \left[4(1 - W_2)^2 q_2^2 Q_2^2 + [D_2^2 + W_2(2 - W_2) + \mu_2]^2 \right]},$$

де

$$q_{1,2} = 1 + \frac{QH_{1,2}^2}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2}, \quad Q_{1,2} = 1 - \frac{QPmH_{1,2}^2}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2},$$

$$\mu_{1,2} = (q_{1,2} - 1) \left[2(1 + Pm(1 - W_{1,2})^2) + (q_{1,2} - 1)(1 - Pm^2(1 - W_{1,2})^2) \right].$$

Рівняння (2.16)-(2.19) є самоузгоджена система нелінійних рівнянь еволюції для великомасштабних збурень швидкості і магнітного поля, яку надалі називатимемо рівняннями нелінійного магніто-вихрового динамо, що похило обертається, у турбулентності яка підтримується дрібномасштабною неспіральною силою.

2.2.2 Великомасштабна нестійкість

Розглянемо початкову стадію розвитку збурень (W_1, W_2) і (H_1, H_2) . Тоді при малих значеннях величин (W_1, W_2) і (H_1, H_2) рівняння (2.16)-(2.19) можна лінеаризувати, і в результаті маємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_2 \nabla_Z W_2 = 0 \\ \partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \alpha_1 \nabla_Z W_1 = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} \partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 + \alpha_H^{(2)} \nabla_Z H_2 = 0 \\ \partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_2 - \alpha_H^{(1)} \nabla_Z H_1 = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

де

$$\alpha_1 = f_0^2 \frac{2D_1 (D_1^2 - 2)}{(D_1^4 + 4)^2}, \quad \alpha_2 = f_0^2 \frac{2D_2 (D_2^2 - 2)}{(D_2^4 + 4)^2}, \quad (2.22)$$

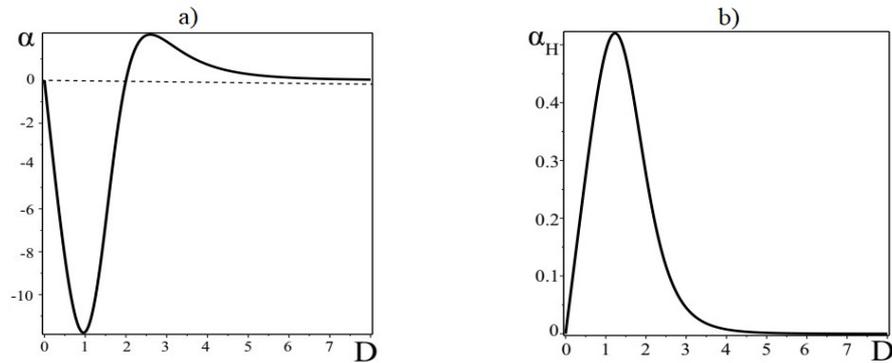


Рис. 2.4: а) Графік залежності ГД α - ефекту від параметра D обертання рідини. б) Графік залежності МГД α - ефекту від параметра D обертання рідини. Графіки побудовані для $\theta = \pi/2$ і $f_0 = 10$.

$$\alpha_H^{(1)} = f_0^2 \frac{PmD_1}{(1 + Pm^2)(D_1^4 + 4)}, \quad \alpha_H^{(2)} = f_0^2 \frac{PmD_2}{(1 + Pm^2)(D_2^4 + 4)}. \quad (2.23)$$

Як видно із системи рівнянь (2.20)-(2.21), при малих збуреннях полів відбувається розщеплення самоузгодженої системи рівнянь (2.16)-(2.19) на дві пари рівнянь, що відповідають великомасштабному полю швидкості \mathbf{W} та магнітному полю \mathbf{H} відповідно. За допомогою коефіцієнтів α_1 та α_2 встановлюється позитивний зворотний зв'язок між компонентами швидкості, що здійснюється за допомогою проєкцій сили Коріоліса. Друга пара рівнянь (2.21) подібна до добре відомих рівнянь α -ефекту з теорії динамо [19], які описують посилення великомасштабного магнітного поля дрібномасштабною спіральною турбулентністю. У системі (2.21), за допомогою коефіцієнтів $\alpha_H^{(1)}$ та $\alpha_H^{(2)}$, також встановлюється позитивний зворотний зв'язок для компонентів магнітного поля завдяки проєкціям сили Коріоліса.

Для дослідження великомасштабної нестійкості, описаної системою рівнянь (2.20)-(2.21), ми оберемо обурення у вигляді плоских хвиль із хвильовим вектором $\mathbf{K} \parallel OZ$ (2.11). Після цього ми знаходимо:

$$\Gamma_1 = Im\omega_1 = \pm \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} K - K^2, \quad (2.24)$$

$$\Gamma_2 = Im\omega_2 = \pm\sqrt{\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)}}K - Pm^{-1}K^2. \quad (2.25)$$

Рішення (2.24) вказують на існування нестійкості при $\alpha_1\alpha_2 > 0$ для великомасштабних вихрових збурень з максимальним інкрементом нестійкості $\Gamma_{1max} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{4}$ при хвильових числах $K_{1max} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2}$. Аналогічно, для магнітних збурень, максимальний інкремент нестійкості $\Gamma_{2max} = \frac{\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)}}{4}Pm$ досягає свого значення при хвильових числах $K_{2max} = \frac{\sqrt{\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)}}}{2}Pm$. Якщо $\alpha_1\alpha_2 < 0$ і $\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)} < 0$, то замість нестійкостей виникають згасаючі коливання з частотами: $\omega_{01} = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}K$ і $\omega_{02} = \sqrt{\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)}}K$. Зазначимо, що в лінійній теорії, що розглядається, коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_H^{(1)}, \alpha_H^{(2)}$ не залежать від амплітуд полів, а залежать тільки від параметрів обертання $D_{1,2}$, магнітного числа Прандтля Pm і амплітуди зовнішньої сили f_0 .

Проаналізуємо залежність цих коефіцієнтів від безрозмірних параметрів, припускаючи, що безрозмірна амплітуда зовнішньої сили f_0 дорівнює $f_0 = 10$. Проведемо аналіз залежності коефіцієнтів посилення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_H^{(1)}, \alpha_H^{(2)}$ від ефекту обертання, вважаючи для простоти, що $D_1 = D_2$, що відповідає фіксованому значенню довгої $\phi = \pi/4 + \pi n$, де $n = 0, 1, 2, \dots, k$ (де k - ціле число). У цьому випадку коефіцієнти посилення вихрових та магнітних збурень відповідно дорівнюють

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = f_0^2 \frac{8\sqrt{2}D \sin \theta (D^2 \sin^2 \theta - 4)}{(D^4 \sin^4 \theta + 16)^2},$$

$$\alpha_H = \alpha_H^{(1)} = \alpha_H^{(2)} = f_0^2 \frac{2\sqrt{2}D \sin \theta Pm}{(1 + Pm^2)(D^4 \sin^4 \theta + 16)}.$$

Звідси видно, що на полюсах ($\theta = 0, \theta = \pi$) генерація вихрових та магнітних збурень не ефективна, оскільки $\alpha, \alpha_H \rightarrow 0$. Тобто великомасштабна нестійкість виникає, якщо вектор кутової швидкості обертання $\mathbf{\Omega}$ відхилений від осі Z . Залежність коефіцієнта α від обертання рідини (параметра D) при фіксованому значенні широти $\theta = \pi/2$ зображена на Рис. 2.4а. Звідси видно, що максимальне негативне значення $-\alpha_{max}$ досягається при $D = 1$. У цьому випадку

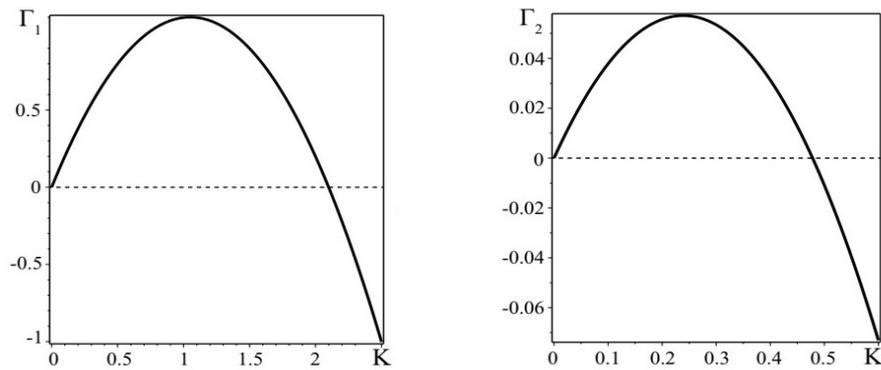


Рис. 2.5: *Лворуч*: графік залежності інкременту нестійкості для ГД α -ефекту від хвильових чисел K при параметрі обертання $D = 2.5$. *Праворуч*: графік залежності інкремента нестійкості для МГД α -ефекту від хвильових чисел K при параметрі обертання $D = 1.5$ та магнітному числі Прандтля $Pr = 1$.

відбувається наростання згасаючої моди. Далі, при збільшенні параметра D , відбувається зміщення значень α в позитивну сторону, проходячи нульову позначку $\alpha = 0$ для $D = 2$. Після досягнення свого максимального значення α_{\max} , зі зростанням параметра D , коефіцієнт α плавно прямує до нуля, тобто при «швидкому» обертанні відбувається зниження ГД α -ефекту [78]. Розглянемо тепер залежність коефіцієнта α_H від параметра обертання D , вважаючи в своєму значенні широти $\theta = \pi/2$ і магнітне число Прандтля $Pr = 1$.

Магнітогідродинамічний α -ефект (або α_H -ефект) також збільшується при «повільному» обертанні до максимального значення $\alpha_{H_{\max}}$. Після досягнення цього максимуму, при збільшенні параметра D , спостерігається спад α_H , але знак коефіцієнта α_H залишається незмінним. Аналіз залежності $\alpha_H(D)$ показав, що при «швидкому» обертанні середовища також відбувається зниження МГД α -ефекту (див. Рис. 2.4b). Фіксуючи значення параметрів обертання D і магнітного числа Прандтля Pr для широтних кутів $\theta = \pi/2$, побудуємо графіки залежності темпу зростання вихрових Γ_1 і магнітних Γ_2 збурень від хвильових чисел K . Ці графіки матимуть типовий для α -ефекту вигляд (див. Рис. 2.5).

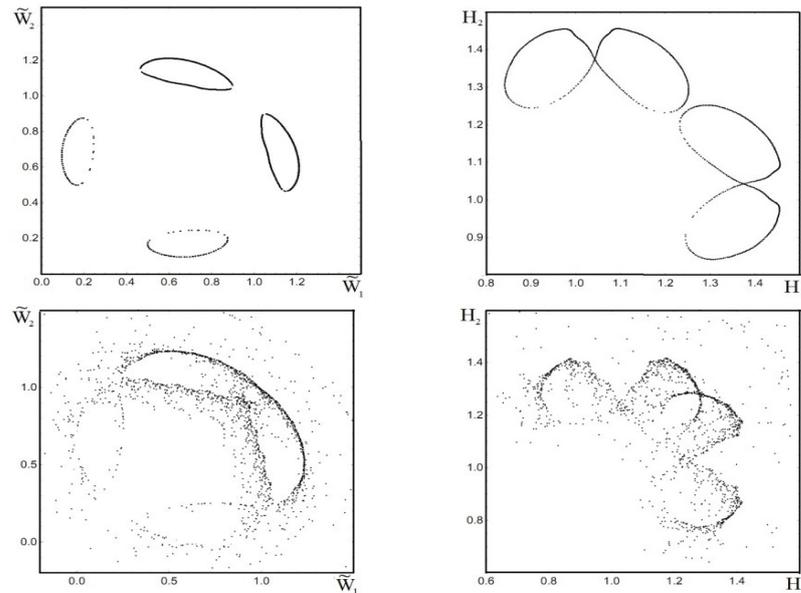


Рис. 2.6: Показано перетин Пуанкаре для двох фазових траєкторій. Зверху представлена траєкторія з початковими умовами $\widetilde{W}_1(0) = 1$, $\widetilde{W}_2(0) = 1$, $H_1(0) = 1.2$, $H_2(0) = 1.2$, і видно, що ця траєкторія навивається на тори. Це вказує на регулярний тип траєкторій. Знизу показана траєкторія з початковими умовами $\widetilde{W}_1(0) = 1$, $\widetilde{W}_2(0) = 1$, $H_1(0) = 1.149$, $H_2(0) = 1.149$, і видно, що ця траєкторія належить стохастичним шарам, що свідчить про хаотичний характер руху.

2.2.3 Стаціонарні хаотичні структури великомасштабних полів

Для опису нелінійних структур розглянемо нелінійну систему рівнянь (2.16)-(2.19) у стаціонарному випадку. Отримані стаціонарні рівняння є рівняннями нелінійної консервативної динаміки. Однак, пошук гамільтоніана для цієї нелінійної системи є технічно складним завданням. Виконання інтегрування ускладнюється через залежність нелінійних коефіцієнтів $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ від полів \mathbf{W} , \mathbf{H} , що виводить його за рамки класу елементарних функцій. Загальний характер такої системи консервативних рівнянь передбачає наявність структури резонансних та нерезонансних торів у фазовому просторі, а також можливість існування хаотичних стаціонарних структур гідродинамічних та магнітних полів. Один із способів дослідження такої складної системи нелінійних рівнянь це метод побудови перетинів Пуанкаре. За допомогою стандартних програм у середовищі Mathematica та вибравши безрозмірні параметри $D = 1.5$, $Q = Pr = 1$,

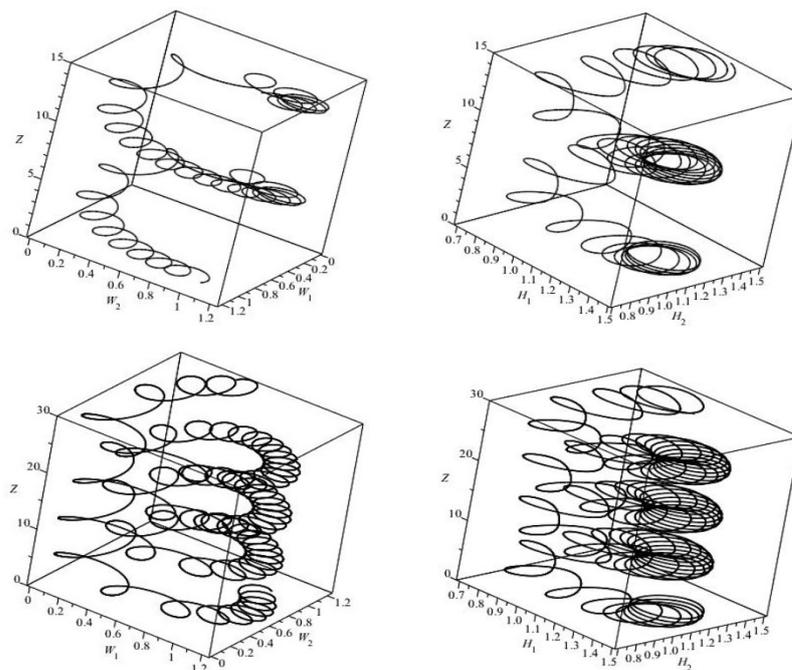


Рис. 2.7: *Зверху*: залежність \mathbf{W} та \mathbf{H} від Z для системи (2.16)-(2.19) при $H_1(0) = H_2(0) = 1.2$ (регулярні рухи). *Знизу*: те саме при $H_1(0) = H_2(0) = 1.149$ (хаотичні рухи).

$f_0 = 10$ і постійні $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = -1, C_4 = 1$, можна чисельно побудувати перетин Пуанкаре траєкторій у фазовому просторі.

Верхня частина Рис. 2.6 демонструє перетин Пуанкаре регулярної траєкторії для поля швидкості та магнітного поля. На нижньому перетині добре помітна структура хаотичного шару, якому належить обрана траєкторія. Наявність таких хаотичних траєкторій означає існування стаціонарних хаотичних структур поля швидкості і магнітного поля. Рис. 2.7 показує залежність стаціонарних великомасштабних полів від координати Z ("высоти"). Ці дані були отримані чисельно для початкових умов, що відповідають перетинам Пуанкаре на Рис. 2.6. З цих малюнків також видно появу стаціонарних хаотичних рішень для магнітного та вихрового поля. При чисельному розв'язанні системи стаціонарної рівнянь (2.16)-(2.19) виникнення хаотичних структур спостерігалося зі зменшенням амплітуд початкового поля магнітного поля. Крім методів перетинів Пуанкаре, для доказу виникнення хаотичного режиму стаціонарних

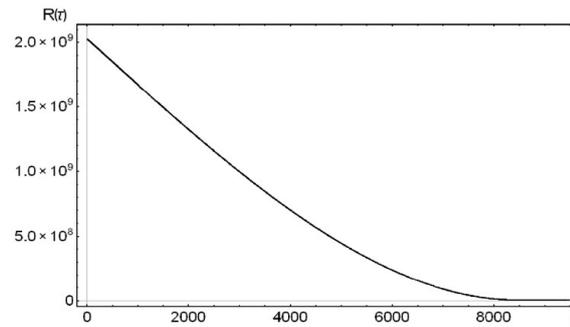


Рис. 2.8: Показаний графік залежності автокореляційної функції $R_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$, від часу τ для траєкторії з початковими умовами $\widetilde{W}_1(0) = 1$, $\widetilde{W}_2(0) = 1$, $H_1(0) = 1.149$, $H_2(0) = 1.149$ (хаотичний рух).

великомасштабних полів, скористаємося поняттям автокореляційної функції:

$$R_{aut}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} P(t)P(t + \tau)dt.$$

Як відомо (див. наприклад [100]), автокореляційна функція $R_{aut}(\tau)$ використовується як величина, що характеризує інтенсивність хаосу, і за визначенням являє собою усереднення по «великому» інтервалу часу Δt добутку випадкового процесу $P(t)$ в момент часу t і того самого процесу $P(t + \tau)$ в момент часу $t + \tau$:

$$P(t)P(t + \tau) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_1(t) \\ \widetilde{W}_2(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{W}_1(t + \tau) & \widetilde{W}_2(t + \tau) & H_1(t + \tau) & H_2(t + \tau) \end{bmatrix}.$$

У програмному середовищі Mathematica ми отримали графік залежності автокореляційної функції компоненти $R_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ від часу τ , який зображений на Рис. 2.8. Ділянка траєкторії на Рис. 2.8 з експоненційним спадом функції $R_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ відповідає випадку хаотичного руху. Помітно, що в логарифмічному масштабі автокореляційної функції $R_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ ділянка експоненційного спаду апроксимується прямою лінією (див. Рис. 2.9). За даними, представленими на Рис. 2.9, можемо

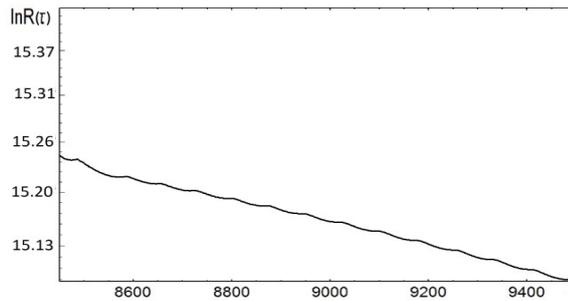


Рис. 2.9: Показано прямолінійну залежність автокореляційної функції $R_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ в логарифмічних масштабах, від інтервалу часу τ для сильно хаотичного руху.

визначити характерний час кореляції $\tau_{cor} \approx 69$ для стаціонарного випадкового процесу $P_{\widetilde{W}_1}$. Перейшовши до введеного вище часу t , стає ясно, що ми знайшли оцінку значення висоти $Z_{cor} \approx 69$, від якої починається хаотичний рух стаціонарних великомасштабних полів. На нижній частині Рис. 2.7 показано хаотичні рішення для полів швидкості та магнітного поля до "висоти" $Z = 40$, яка є меншою за Z_{cor} . Однак, навіть в цьому випадку видно початок заплутаної траєкторії для великомасштабних полів зі збільшенням "висоти" Z . Візуалізація таких траєкторій на графіку вже втрачає сенс. Таким чином, зі збільшенням "висоти" Z до деякого критичного значення Z_{cor} , квазіперіодичний рух стаціонарних великомасштабних полів змінюється на хаотичний.

2.3 Генерація великомасштабних вихрових та магнітних структур у стратифікованому середовищі

Використовуючи метод багатьох масштабів, в цьому розділі ми розглянемо генерацію великомасштабної конвективної нестійкості, спричиненої зовнішньою спіральною дрібномасштабною силою в електропровідному середовищі, що не стикується. Генерація таких структур в електропровідному середовищі має великий інтерес для багатьох астрофізичних та лабораторних досліджень. Наприклад, можна згадати про появу гранул на поверхні Сонця та геомагнітне динамо. У цьому розділі ми отримаємо умови, за яких виникає великомасшта-

бна нестійкість, та знайдемо інкременти нестійкості. Доведемо існування двох типів нестійких мод з частотою, рівною нулю, та з відмінною від нуля частотою коливань [99].

2.3.1 Формулювання проблеми

Розглянемо рівняння руху електропровідного середовища з постійним градієнтом температури в наближенні Буссінеска

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_{00}}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + \frac{1}{4\pi\rho_{00}}[\text{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B}] + g\beta T\mathbf{e} + \mathbf{F}_0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)T = \chi\Delta T - V_z A \quad (2.27)$$

Рівняння (2.26), (2.27) доповнимо рівнянням індукції магнітного поля \mathbf{B} та умовами соленоїдальності полів \mathbf{V} і \mathbf{B} :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \nu_m\Delta\mathbf{B} \quad (2.28)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad \text{div}\mathbf{V} = 0, \quad (2.29)$$

де $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ - коефіцієнт магнітної в'язкості, σ - коефіцієнт електропровідності середовища, c - швидкість світла. $dT_{00}/dz > 0$ - постійний градієнт температури, вектор $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ - одиничний вектор у напрямку осі z . Система рівнянь (2.26)-(2.29) описує еволюцію збурень на фоні рівноважного стану, який визначається умовою рівноваги

$$\nabla P_{00} = \rho_{00}g\beta T_{00}, \quad \rho_{00} = \text{const.}$$

У рівняння (2.26), для моделювання дрібномасштабної спіральності, включена зовнішня сила, що має спіральні властивості (1.3). Як було показано в роботі [99] дрібномасштабне магнітне поле \mathbf{b}_0 у лінійному наближенні не може збуджуватися зовнішньою спіральною дрібномасштабною силою \mathbf{F}_0 . Тоді можна припустити, що дрібномасштабне магнітне поле \mathbf{b}_0 існує спочатку або створю-

ється зовнішнім джерелом \mathbf{F}_B , що має спіральні властивості:

$$\mathbf{F}_B \text{rot} \mathbf{F}_B \neq 0.$$

Необхідність такого джерела пов'язана з наявністю зазвичай у реальних системах деякого стаціонарного рівня дрібномасштабних осциляцій магнітного поля. Для його підтримки на стаціонарному рівні в дисипативному рівнянні (2.28) потрібне таке джерело. У реальних системах рівень цих осциляцій магнітного поля підтримується зовнішнім накачуванням або деякою нестійкістю. Прикладом зовнішнього накачування може бути накачування циркулярно-поляризованою електромагнітною хвилею. Така можливість широко обговорювалася у зв'язку з проблемою «струмового утримання», і полягає у генерації струму при інжекції спіральності циркулярно-поляризованою електромагнітною хвилею [101]. Як показано в [18], спіральність дрібномасштабного магнітного поля може спричинити генерацію магнітного поля. Інжекція спіральності магнітного поля може виникати в космічних умовах, наприклад, під впливом потужного випромінювання пульсарів. Як астрофізичний приклад джерела спіральності, викликаного нестійкістю, можна навести гідродинамічну нестійкість в середовищі, що обертається. Хорошим прикладом може бути магнітообертальна нестійкість [92], яка викликана диференціальним обертанням середовища космічного об'єкта. Важливо, що у різних фізичних ситуаціях можуть існувати різні неуніверсальні механізми, які підтримують певний рівень дрібномасштабних спіральних осциляцій. Універсальну теорію можна побудувати, абстрагуючись від механізму їх виникнення та постулюючи наявність такого дрібномасштабного спірального магнітного поля. Для його підтримки вводиться джерело \mathbf{F}_B . Магнітне поле, що збуджується таким джерелом, також має спіральність: $\mathbf{b}_0 \text{rot} \mathbf{b}_0 \neq 0$. Зручно вибрати характерний масштаб джерела λ_0^B і характерний час t_0^B , що збігаються з характерними масштабами λ_0 і t_0 відповідно. Тобто дрібномасштабна турбулентність і дрібномасштабні магнітні поля мають близькі характерні масштаби.

Проте характерні амплітуди цих джерел припускатимемо різними, тобто

$$\mathbf{F}_B = b_0 \mathbf{F}_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right), \quad b_0 \neq f_0.$$

Ми задамо зовнішню силу та джерело у наступний спосіб:

$$\mathbf{F}_0 = f_0(\mathbf{e}_x \cos(\varphi_2) + \mathbf{e}_y \sin(\varphi_2) + \mathbf{e}_z(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{F}_B = b_0(\mathbf{e}_x \cos(\varphi_2) + \mathbf{e}_y \sin(\varphi_2) + \mathbf{e}_z(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))), \quad (2.31)$$

де $\varphi_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{x} - \omega_0 t$, $\varphi_2 = \mathbf{k}_2 \mathbf{x} - \omega_0 t$, а $\mathbf{k}_1 = k_0(1, 0, 0)$, $\mathbf{k}_2 = k_0(0, 1, 0)$. Легко перевірити, що спіральність наведеної сили та джерела є

$$\mathbf{F}_0 \text{rot} \mathbf{F}_0 = k_0 \mathbf{F}_0^2, \quad \mathbf{F}_B \text{rot} \mathbf{F}_B = k_0 \mathbf{F}_B^2.$$

Ця сила відповідає Бельтрамі моді з періодичністю у горизонтальних координатах. Вибір Бельтрамі моди має просту причину. Природно припустити, що моди магнітного поля прагнуть до стану з мінімальною енергією. Як відомо, такі стани є безсиловими. У безсилових конфігураціях виникає кореляція між струмом і магнітним полем, тобто ненульова спіральність магнітного поля.

Як і попередніх розділах малим параметром завдання є число Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ дрібномасштабних осциляцій, що дозволяє застосування методу багатомасштабних розкладів.

2.3.2 Рівняння еволюції великомасштабних полів

Для знаходження рівнянь еволюції великомасштабних обурень ми застосуватимемо багатомасштабне асимптотичне розкладання для лінійної теорії [52, 99]. Як показано в роботі [99], для отримання замкнутої системи рівнянь, що описує еволюцію великомасштабних полів \mathbf{W}_1 і \mathbf{H}_1 , потрібно розглянути розкладання до п'ятого порядку теорії збурень. У цьому порядку рівняння

еволюції великомасштабних збурень мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\partial_T W_x - \Delta W_x + \alpha \nabla_Z W_y + \beta_q \nabla_Z H_y &= 0, \\
\partial_T W_y - \Delta W_y - \alpha \nabla_Z W_x - \beta_q \nabla_Z H_x &= 0, \\
\partial_T H_x - Pm^{-1} \Delta H_x &= \alpha_H \nabla_Z H_y + \alpha_W \nabla_Z W_y, \\
\partial_T H_y - Pm^{-1} \Delta H_y &= -\alpha_H \nabla_Z H_x - \alpha_W \nabla_Z W_x.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

де коефіцієнти $\alpha, \beta_q, \alpha_W, \alpha_H$ визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
\alpha &= -Ra \frac{(4 - 2Ra)}{(Ra^2 + 4)^2} f_0^2, \quad \beta_q = \frac{f_0 b_0}{4} \frac{QPmRa(2 + Ra)}{(1 + Pm^2)((1 + Ra - Pr)^2 + (1 + Pr)^2)}, \\
\alpha_W &= -\frac{f_0 b_0}{4} (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4), \quad \alpha_H = \frac{f_0^2}{2} \mu_1 - \frac{b_0^2}{4} \mu_2,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

тут

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \frac{2Pm^3(1 - Pm)}{(1 + Pm^2)^2}, \\
\nu_2 &= \\
&= \frac{(1 + 2Pm - Pm^2)(2(1 + Pr^2) + (1 - Pr)Ra) + Ra(1 + Pr)(1 - 2Pm - Pm^2)}{Pm^2((1 - Pr + Ra)^2 + (1 + Pr)^2)}, \\
\nu_3 &= \frac{2RaPr[(1 - Pr + Ra)^2 - (1 + Pr)^2 + 2Pm(1 + Pr)(1 - Pr + Ra)]}{Pm((1 + Ra - Pr)^2 + (1 + Pr)^2)^2}, \\
\nu_4 &= -\frac{(2(1 - Pr^2) - 4PmPr)((1 + Ra - Pr)^2 - (1 + Pr)^2)}{Pm((1 + Ra - Pr)^2 + (1 + Pr)^2)^2} + \\
&\quad + \frac{2(1 + Pr)(1 - Pr + Ra)(2Pm(1 - Pr^2) + 4Pr)}{Pm((1 + Ra - Pr)^2 + (1 + Pr)^2)^2}, \\
\mu_1 &= \frac{Pm(2(1 + Pr^2) + Ra(1 - Pr))}{(1 + Pm^2)((1 - Pr + Ra)^2 + (1 + Pr)^2)}, \\
\mu_2 &= \frac{QPm((1 - Pr + Ra)^2 + (1 + Pr)^2 + 2(1 + Pr^2) + 2Ra)}{(1 + Pm^2)((1 - Pr + Ra)^2 + (1 + Pr)^2)}.
\end{aligned}$$

Легко помітити, що коефіцієнти α_W і β_q визначають позитивний зворотний зв'язок у самоузгодженій динаміці полів \mathbf{W}_1 і \mathbf{H}_1 . Якщо припустити відсутність джерела дрібномасштабних магнітних полів ($b_0 = 0$), то система рівнянь

(2.32) розщеплюється на дві пари не пов'язаних рівнянь для великомасштабної швидкості \mathbf{W}_1

$$\begin{aligned}\partial_T W_x - \Delta W_x + \alpha \nabla_Z W_y &= 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y - \alpha \nabla_Z W_x &= 0,\end{aligned}\tag{2.34}$$

и великомасштабних магнітних полів \mathbf{H}_1

$$\begin{aligned}\partial_T H_x - Pm^{-1} \Delta H_x &= \alpha_H \nabla_Z H_y, \\ \partial_T H_y - Pm^{-1} \Delta H_y &= -\alpha_H \nabla_Z H.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Перша система рівнянь (2.34) збігається з рівняннями гідродинамічного α -ефекту (див. наприклад [52]), що призводить до генерації великомасштабних вихрових структур. Друга система рівнянь (2.35) описує добре відомий в динамотеорії [19] магнітогідродинамічний α -ефект. Він визначає генерацію великомасштабного магнітного поля спіральною турбулентністю.

2.3.3 Великомасштабна нестійкість

У разі відсутності джерела дрібномасштабних магнітних полів ($b_0 = 0$ і отже $\beta_q = 0$) отримаємо дисперсійне рівняння:

$$(K^2 - i\omega)^2 - \alpha^2 K^2 = 0, \quad (Pm^{-1} K^2 - i\omega)^2 - \alpha_H^2 K^2 = 0.\tag{2.36}$$

З цих рівнянь випливає відсутність реальної частини частоти та наявність чисто уявної. Отже, інкремент нестійкості дорівнює

$$\gamma_1 = \pm \alpha K - K^2, \quad \gamma_2 = \pm \alpha_H K - Pm^{-1} K^2.\tag{2.37}$$

Рішення, що росте з першим інкрементом, описує генерацію великомасштабних вихрових структур. Максимальний інкремент $\Gamma_{max} = \frac{\alpha^2}{4}$ досягається на хвильових числах $K = K_{max} = \frac{\alpha}{2}$ (див. Рис. 2.10). Явний вид коефіцієнта α визначається співвідношенням (2.33). З цих співвідношень випливає, якщо й зовнішня

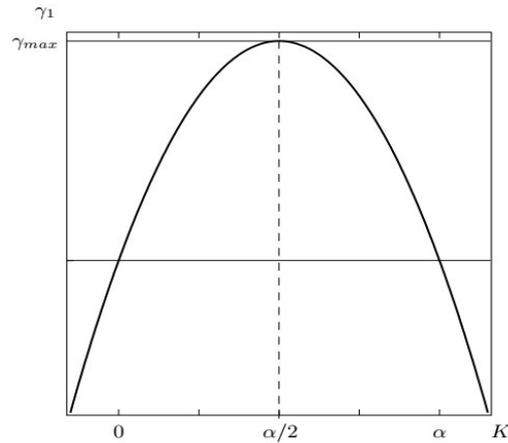


Рис. 2.10: Типовий вид інкременту $\gamma_1 = \alpha K - K^2$ від хвильового числа K . Зростання в області $0 < K < \alpha$. Для моди $\gamma_1 = -\alpha K - K^2$ область нестійкості $-\alpha < K < 0$ і вид інкремента збігається з відбитим графіком щодо вертикальної осі.

спіральна сила відсутня $f_0 = 0$, то α -ефект зникає. Крім цього, гідродинамічний α -ефект (як і в не електропровідному середовищі [68]) існує тільки за наявності температурної стратифікації незалежно від значень числа Прандтля Pr . Цікаво зазначити, що з $Ra = 2$ лінійна нестійкість існує за числах Прандтля $Pr \neq 1$. Коефіцієнт α у цьому випадку дорівнює

$$\alpha = \frac{f_0^2 (Pr - 1)(1 - 2Pr - 3Pr^2)}{4 (5 - 2Pr + Pr^2)^2}. \quad (2.38)$$

Область позитивних значень другого інкременту $\gamma_2 > 0$ відповідає зростанню великомасштабного магнітного поля. Максимальний інкремент $\gamma_{2max} = \frac{\alpha_H^2}{4} Pm$ досягається при $K = K_{max} = \frac{\alpha_H}{2} Pm$. Значення коефіцієнта α_H визначається співвідношенням

$$\alpha_H = \frac{f_0^2}{2} \frac{Pm(2(1 + Pr^2) + Ra(1 - Pr))}{(1 + Pm^2)((1 - Pr + Ra)^2 + (1 + Pr)^2)}. \quad (2.39)$$

З цього співвідношення випливає, що в однорідній температурі ($T_0 = \text{const}$ або $Ra = 0$) електропровідному середовищі генерація магнітного поля відбувається лише за рахунок зовнішньої спіральної сили \mathbf{F}_0 . Таким чином, розвиток конвективної великомасштабної нестійкості в електропровідному середовищі на

лінійній стадії призводить одночасно до посилення великомасштабних вихрових рухів середовища та магнітного поля. Зростання амплітуди великомасштабних збурень впливає на динаміку дрібномасштабного поля швидкості \mathbf{v}_0 і магнітного поля \mathbf{b}_0 .

Незважаючи на фізичну природу механізму збудження затравальних магнітних полів, для моделювання їх впливу ми абстрагуємося від деталей і розглядаємо їх як зовнішнє джерело \mathbf{F}_B , яке збуджує дрібномасштабні спіральні поля, для яких $\mathbf{b}_0 \text{rot} \mathbf{b}_0 \neq 0$. Динаміка великомасштабних полів у таких умовах описується самоузгодженою системою рівнянь (2.32), в якій видно взаємний вплив великомасштабного магнітного поля на вихрові рухи середовища і навпаки. У загальному випадку можна спостерігати лише два режими нестійкості. Один відповідає хвильовій моді з частотою:

$$\omega = \pm Im|K|\sqrt{\Pi},$$

$$\Pi = \frac{(1 - Pm^{-1})^2}{4} K^2 - \frac{(\alpha + \alpha_H)(1 - Pm^{-1})}{2} K + \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} - \alpha_W \beta_q$$

та інкрементом $\gamma = \frac{1}{2}[(\alpha - \alpha_H)K - (1 + Pm^{-1})K^2]$, другий нестійкості з інкрементом $\gamma = \frac{1}{2}[(\alpha - \alpha_H)K - (1 + Pm^{-1})K^2] + |K|\sqrt{\Pi}$ і частотою $\omega = 0$. Області параметрів, у яких вони реалізуються, описані вище. Ці умови сформульовані в термінах параметрів α , α_H , $\alpha_W \beta_q$, які залежать від безрозмірних чисел Ra , Pr , Pm , Q . Тому важливо перевірити наявність галузей реалізації нестійких мод термінах вихідних безрозмірних чисел. Зв'язок параметрів з безрозмірними числами наведено у розділі 2.3.2. Використовуючи їх побудуємо області параметрів, у яких реалізуються два режими описаних вище. Рис. 2.11 області показані на площині (Pr, Ra) при фіксованих значеннях $Pm = 2$ та $Q = 2$. Крім цього, амплітуди f_0 і b_0 обрані одиничними. Зрозуміло, при зміні Pm і Q відповідні області змінюються свою форму, але самі області присутні і за інших значення Pm і Q .

Тепер як приклад розглянемо конвективну зону Сонця. Як відомо, вона

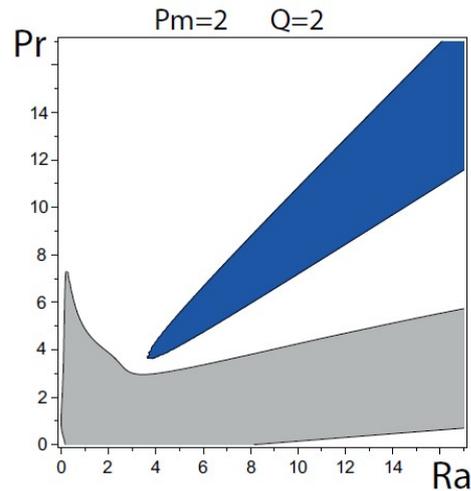


Рис. 2.11: Синім кольором показана область, що відповідає умовам нестійкості при якій $\omega = 0$. Сірим кольором - область нестійкості при $\omega \neq 0$.

складається з конвективних осередків із вертикальним розміром близько 100 км та горизонтальним розміром близько 500 км (див. наприклад [99]). Крім того, є супергрануляція з горизонтальним масштабом близько 20 тисяч кілометрів. Самі конвективні осередки є квазістаціонарними з характерним часом життя близько 10 хвилин. Будемо розглядати рух газу всередині конвективного осередку як дрібномасштабне, аж до $1/3$ висоти осередку, тобто аж до масштабів порядку $l_0 \approx 30$ км. Масштаби, що перевищують ці, розглядатимемо як великомасштабні. Турбулентна в'язкість і турбулентна теплопровідність практично однакові і рівні приблизно $10^{11} \div 10^{12}$ см²/сек. Тому число Прандтля порядку одиниці. Самі конвективні осередки можна вважати приблизно такими, що знаходяться на межі стійкості, тому величину їх Релея можна оцінити з вирішення задачі про конвекцію з вільними кордонами, що як відомо дає $Ra \approx (\frac{27}{4})\pi^4$. Оскільки градієнт температури всередині комірки вважається приблизно постійним, то легко оцінити число Релея Ra_0 на масштабі $l_0 \approx 30$ км

$$Ra_0 \approx \frac{Ra}{(3.3)^4} = 5.5$$

Швидкість руху газу в осередку приблизно $v_0 \approx 1$ км/сек (див. [99]). Звідси можна оцінити турбулентне число Рейнольдса $R = \frac{l_0 v_0}{\nu_T}$ на масштабі $l_0 \approx 30$

км. Враховуючи значення турбулентної в'язкості ν_T , отримаємо: $R = \frac{l_0 v_0}{\nu_T} \approx 0.3 \div 3 \sim 1$. Той факт, що турбулентне число Рейнольдса порядку одиниці зрозуміле вже з квазістаціонарного характеру конвекції. Використовуючи для α формулу (2.33) з числом Релея Ra_0 , при $f_0^2 \sim 3/R$ і формулу: $L = l_0 2\pi/\alpha$ для характерного масштабу нестійкості можемо оцінити чисельне значення величини L : $L \approx 61 \cdot l_0 = 1830$ км. Враховуючи характерний розмір осередків, видно, що нестійкість закручує приблизно три, чотири осередки. Аналогічно можна оцінити характерний час розвитку нестійкості T за формулою:

$$T = t_0 \frac{4}{\alpha^2}, \quad t_0 = \frac{l_0^2}{v}.$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, отримуємо:

$$T \approx 37.2 \text{ години.}$$

Внаслідок розвитку нестійкості у конвективній зоні Сонця генерується вихрова структура типу циклону, який захоплює кілька конвективних осередків. При $R \sim 1$ його горизонтальні та вертикальні масштаби приблизно однакові.

2.4 Нелінійне магніто-вихрове динамо у стратифікованому електропровідному середовищі

В цьому розділі ми досліджуємо нелінійну стадію розвитку великомасштабної нестійкості у стратифікованому електропровідному середовищі з дрібно-масштабною спіральною силою. Лінійна теорія, розвинена в попередньому розділі, застосовна лише на початковому етапі розвитку великомасштабної нестійкості, коли величини великомасштабних полів (магнітних та вихрових) ще малі. Тому в цьому розділі ми звернемо увагу на нелінійну стадію розвитку великомасштабної конвективної нестійкості в стратифікованому електропровідному середовищі [99, 102–104]. Ми використовуємо асимптотичний метод багатомас-

штабних розкладів, що дозволяє отримати замкнуті нелінійні рівняння для великомасштабних магнітних та гідродинамічних полів.

2.4.1 Рівняння нелінійного динамо

Постановка задачі та основні рівняння визначені у розділі 2.3.1. Тут ми розглянемо застосування методу багатомасштабних асимптотичних розкладів для нелінійної теорії [99, 102] до проблеми нелінійної еволюції великомасштабних вихрових та магнітних збурень у конвективному електропровідному середовищі. Алгебраїчна структура асимптотичного розкладання рівнянь (2.26)-(2.29) у різних порядках по R наведена в [99, 102]. Саме там показано, що у порядку R^3 виходять основні секулярні рівняння, т. е. рівняння для великомасштабних полів:

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \nabla_Z \left[\alpha^{(2)} \cdot (1 - W_2) \left(1 - \frac{H_2^2 P m Q}{(1 + P m^2 (1 - W_2)^2)} \right) \right] = 0 \quad (2.40)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \nabla_Z \left[\alpha^{(1)} \cdot (1 - W_1) \left(1 - \frac{H_1^2 P m Q}{(1 + P m^2 (1 - W_1)^2)} \right) \right] = 0 \quad (2.41)$$

$$\partial_T H_1 - P m^{-1} \nabla_Z^2 H_1 - \nabla_Z \left(\alpha_H^{(2)} \cdot H_2 \right) = 0 \quad (2.42)$$

$$\partial_T H_2 - P m^{-1} \nabla_Z^2 H_2 + \nabla_Z \left(\alpha_H^{(1)} \cdot H_1 \right) = 0 \quad (2.43)$$

Рівняння (2.40)-(2.43) описують нелінійну динаміку великомасштабних полів в електропровідному середовищі з температурною неоднорідністю. Зв'язок між компонентами великомасштабного вихрового та магнітного поля здійснюється за допомогою коефіцієнтів нелінійного ГД $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ та МГД $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ α -ефекту. Причому коефіцієнти нелінійного ГД та МГД α -ефекту є функціями великомасштабних полів швидкості \mathbf{W} та магнітного поля \mathbf{H} :

$$\alpha^{(1)} = \frac{\widetilde{Ra}(1 + P m^2 \widetilde{W}_1^2) \left[(1 + Pr)(1 + P m^2 \widetilde{W}_1^2) + Q H_1^2 (Pr - P m) \right]}{2 \left[(1 - P m \widetilde{W}_1^2 + Q H_1^2)^2 + \widetilde{W}_1^2 (1 + P m)^2 \right]} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\left(1 - Pm\widetilde{W}_1^2 + QH_1^2 \right)^2 + \widetilde{W}_1^2 (1 + Pm)^2 \right) \left(1 + Pr^2\widetilde{W}_1^2 \right) + \right. \\
& + 2Ra \left(\left(1 - Pr\widetilde{W}_1^2 \right) \left(1 + Pm^2\widetilde{W}_1^2 \right) + QH_1^2 \left(1 + Pm\widetilde{W}_1^2 \right) \right) + \\
& \left. + Ra^2(1 + Pm^2\widetilde{W}_1^2) \right]^{-1}, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^{(2)} &= \frac{\widetilde{Ra}(1 + Pm^2\widetilde{W}_2^2) \left[\left(1 + Pr \right) \left(1 + Pm^2\widetilde{W}_2^2 \right) + QH_2^2(Pr - Pm) \right]}{2 \left[\left(1 - Pm\widetilde{W}_2^2 + QH_2^2 \right)^2 + \widetilde{W}_2^2(1 + Pm)^2 \right]} \times \\
& \times \left[\left(\left(1 - Pm\widetilde{W}_2^2 + QH_2^2 \right)^2 + \widetilde{W}_2^2 (1 + Pm)^2 \right) \left(1 + Pr^2\widetilde{W}_2^2 \right) + \right. \\
& + 2Ra \left(\left(1 - Pr\widetilde{W}_2^2 \right) \left(1 + Pm^2\widetilde{W}_2^2 \right) + QH_2^2 \left(1 + Pm\widetilde{W}_2^2 \right) \right) + \\
& \left. + Ra^2(1 + Pm^2\widetilde{W}_2^2) \right]^{-1}, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_H^{(1)} &= \frac{Pm}{\left(1 - Pm\widetilde{W}_1^2 + QH_1^2 \right)^2 + \widetilde{W}_1^2(1 + Pm)^2} \times \\
& \times \left\{ 1 - Ra \left[\left(1 - Pr\widetilde{W}_1^2 \right) + \frac{QH_1^2(1 + PrPm\widetilde{W}_1^2)}{(1 + Pm^2\widetilde{W}_1^2)} + Ra \right] \times \right. \\
& \times \left[\left(\left(1 - Pm\widetilde{W}_1^2 + QH_1^2 \right)^2 + \widetilde{W}_1^2 (1 + Pm)^2 \right) \frac{\left(1 + Pr^2\widetilde{W}_1^2 \right)}{\left(1 + Pm^2\widetilde{W}_1^2 \right)} + \right. \\
& \left. \left. + 2Ra \left[\left(1 - Pr\widetilde{W}_1^2 \right) + \frac{QH_1^2 \left(1 + PrPm\widetilde{W}_1^2 \right)}{\left(1 + Pm^2\widetilde{W}_1^2 \right)} \right] + Ra^2 \right]^{-1} \right\}, \tag{2.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_H^{(2)} &= \frac{Pm}{\left(1 - Pm\widetilde{W}_2^2 + QH_2^2 \right)^2 + \widetilde{W}_2^2(1 + Pm)^2} \times \\
& \times \left\{ 1 - Ra \left[\left(1 - Pr\widetilde{W}_2^2 \right) + \frac{QH_2^2(1 + PrPm\widetilde{W}_2^2)}{(1 + Pm^2\widetilde{W}_2^2)} + Ra \right] \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(\left(1 - Pm\widetilde{W}_2^2 + QH_2^2 \right)^2 + \widetilde{W}_2^2 (1 + Pm)^2 \right) \frac{(1 + Pr^2\widetilde{W}_2^2)}{(1 + Pm^2\widetilde{W}_2^2)} + \right. \\ & \left. + 2Ra \left[\left(1 - Pr\widetilde{W}_2^2 \right) + \frac{QH_2^2 (1 + PrPm\widetilde{W}_2^2)}{(1 + Pm^2\widetilde{W}_2^2)} \right] + Ra^2 \right]^{-1} \}. \quad (2.47) \end{aligned}$$

Зауважимо, що нелінійний ГД α -ефект, що описується рівняннями (2.46)-(2.47), можливий лише при наявності стратифікації за температурою, тобто при $Ra \neq 0$ (число Релея не дорівнює нулю) і при наявності зовнішньої спіральної сили $\mathbf{F}_0 \neq 0$. У межах неелектропровідного середовища ($\sigma = 0$), рівняння (2.46)–(2.47) повністю збігаються з результатами роботи [69]. Коефіцієнти нелінійного МГД α -ефекту відповідальні за генерацію великомасштабного магнітного поля і складаються з двох частин:

$$\alpha_H^{(1)} = \alpha_H^{(0)} (1 - Ra \cdot \Phi(W_1, H_1)), \quad \alpha_H^{(2)} = \alpha_H^{(0)} (1 - Ra \cdot \Phi(W_2, H_2)) \quad (2.48)$$

Перша частина $\alpha_H^{(0)}$ обумовлена лише дією зовнішньої спіральної сили \mathbf{F}_0 , друга частина коефіцієнтів $\alpha_H^{(1)}$ і $\alpha_H^{(2)}$ пов'язана з наявністю температурної стратифікації, коли $\frac{dT_{00}}{dz} \neq 0$. Тут $\Phi(W_{1,2}, H_{1,2})$ - деяка функція від $W_{1,2}$ і $H_{1,2}$. Тому нелінійний МГД α -ефект виникає і при відсутності підігріву ($Ra = 0$).

2.4.2 Стаціонарні нелінійні магнітні структури

На початковій стадії розвитку збурень, тобто при малих значеннях величин W_1, W_2 і H_1, H_2 рівняння (2.40)-(2.43) лінеаризуються і набувають вигляду лінійних рівнянь (2.34)-(2.35). Аналіз цих рівнянь показав, що якщо зовнішня сила має нульову спіральність $\mathbf{F}_0 \text{rot} \mathbf{F}_0 = 0$, то обидва α -ефекти зникнуть: $\alpha = 0$ і $\alpha_H = 0$. Крім того, при зануленні градієнта температури, гідродинамічний α -ефект зникає, а МГД α -ефект залишається. Тобто магнітне поле продовжує наростати і в цих умовах. З'ясуємо тепер, за яких значень параметра числа Релея Ra відбувається генерація великомасштабних вихрових і магнітних збурень.

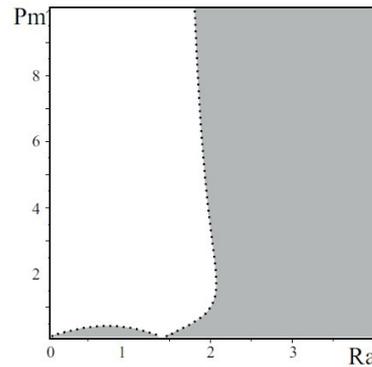


Рис. 2.12: На графіку сірим кольором показана область генерації вихрових збурень ($\gamma > 1$), білим кольором - область генерації магнітних збурень ($\gamma < 1$) на площині параметрів (Ra, Pm) .

З цією метою зручно ввести коефіцієнт відносної швидкості зростання збурень $\tilde{\gamma} = \Gamma_{1\max}/\Gamma_{2\max}$. Використовуючи при цьому вирази (2.37), ми знаходимо:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\Gamma_{1\max}}{\Gamma_{2\max}} = \frac{Ra^2(4 - 2Ra)^2(1 + Pm^2)^2}{4Pm^3(4 + Ra^2)^2} \quad (2.49)$$

Звідси видно, що при малих значеннях магнітних чисел Прандтля $Pm \ll 1$ і чисел Релея $Ra > 2$ найефективнішою є генерація великомасштабних вихрових збурень. Трохи вищі значення магнітних чисел Прандтля Pm можуть бути обумовлені як слабкою електропровідністю ($\sigma \rightarrow 0$) середовища, так і дуже малою кінематичною в'язкістю ($\nu \rightarrow 0$) середовища. Розглянемо випадок слабкої електропровідності середовища ($\sigma \rightarrow 0$) при $\nu \neq 0$. Тоді магнітне число Прандтля і число Чандрасекара будуть малими: $Pm \rightarrow 0$, $Q \rightarrow 0$. У такому середовищі генерація великомасштабного магнітного поля не є ефективною, оскільки коефіцієнт $\tilde{\gamma} \gg 1$. Під впливом зовнішньої дрібномасштабної спіральної сили можлива генерація великомасштабних вихрових структур у конвективному середовищі. Перейдемо до випадку електропровідного середовища, тобто коли магнітне число Прандтля відмінне від нуля $Pm \neq 0$. З чисельного аналізу формули (2.49), представленого на Рис. 2.12, можна зробити висновок, що генерація вихрових збурень найбільш ефективна при числах Релея $Ra > 2$. На Рис. 2.12 білим кольором показана область переважної генерації для магнітних збурень.

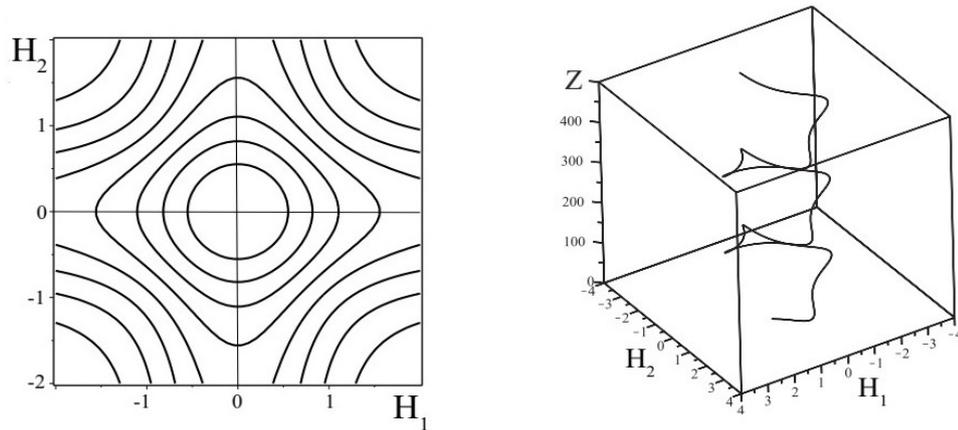


Рис. 2.13: *Зліва*: фазовий портрет системи рівнянь (2.50)-(2.51) при $C_3 = C_4 = 0$. *Справа*: рішення відповідне нелінійної хвилі.

Звідки видно, що генерація магнітних полів найефективніша в інтервалі чисел Релея $Ra \in [0, 2]$.

У цьому розділі ми детальніше розглянемо випадок, коли генерація великомасштабних вихрових збурень у конвективному середовищі перейшла до стаціонарного режиму, і збурення великомасштабного магнітного поля досягли свого насичення на стаціонарному рівні. Тоді впливом малих амплітуд великомасштабних вихрових збурень $W_{1,2} \ll 1$ на еволюцію великомасштабного магнітного поля ми можемо знехтувати. В результаті, із рівнянь нелінійного динамо (2.42)-(2.43), отримуємо рівняння для еволюції стаціонарного великомасштабного магнітного поля:

$$\frac{dH_1}{dZ} = -\frac{H_2(Q^2 H_2^4 + RaQH_2^2 + 4)}{(Q^2 H_2^4 + 4)(Q^2 H_2^4 + 2RaQH_2^2 + Ra^2 + 4)} + C_3, \quad (2.50)$$

$$\frac{dH_2}{dZ} = \frac{H_1(Q^2 H_1^4 + RaQH_1^2 + 4)}{(Q^2 H_1^4 + 4)(Q^2 H_1^4 + 2RaQH_1^2 + Ra^2 + 4)} + C_4. \quad (2.51)$$

Для простоти обчислень тут прийнято рівність чисел Прандтля одиниці: $Pr = Pm = 1$. Приступимо до дослідження питання про види стаціонарних магнітних структур, що описуються рівняннями (2.50)-(2.51). Спочатку докладно розглянемо граничний випадок $Ra \rightarrow 0$. При нульових значеннях постійних $C_3 = C_4 = 0$ можна побудувати фазовий портрет з якого видно, що є тільки

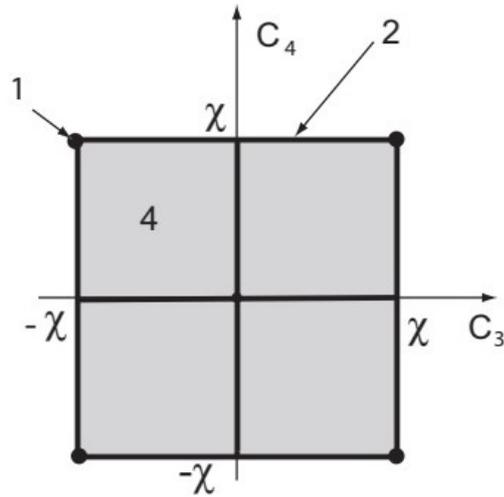


Рис. 2.14: На площині параметрів (C_3, C_4) сірим кольором показана область присутності чотирьох нерухомих точок. Для констант $(C_3 = 0, C_4 = 0)$ існує лише одна нерухома точка. Жирними лініями відзначені значення констант, яким на фазовому портреті відповідають дві нерухомі точки. Вершин квадратної області відповідають значення при яких реалізується 1 нерухома точка. Для значень поза вказаною областю нерухомі точки відсутні.

одна еліптична точка (див. Рис. 2.1). Навколо точок еліптичного типу спостерігаються лише нелінійні хвилі. Чисельне рішення системи рівнянь (2.50)-(2.51) у межі $Ra \rightarrow 0$ відповідає нелінійній хвилі кінцевої амплітуди і наведено також на Рис. 2.13. Обчислюючи максимум і мінімум функції $\left(\frac{H_{1,2}}{Q^2 H_{1,2}^4 + 4}\right)$ встановимо область зміни параметрів (C_3, C_4) , яка визначається нерівностями:

$$-\chi < C_3 < \chi, \quad -\chi < C_4 < \chi,$$

де $\chi = \frac{3^{3/4}}{16} \sqrt{\frac{2}{Q}}$ залежить від вибору параметра Q . Рис. 2.14 наведено відповідну область із зазначенням числа нерухомих точок. У вершинах квадратної області параметрів (C_3, C_4) розташована одна нерухома точка еліптичного типу. Тип нерухомої точки визначається з самого виду фазового портрета системи рівнянь (2.50)-(2.51) для констант $C_3 = \pm\chi$ і $C_4 = \pm\chi$ (див. Рис. 2.15). На межі області (C_3, C_4) розташовані дві нерухомі точки: еліптичного та гіперболічного типу. Фазовий портрет з цими точками наведено на Рис. 2.15. Для констант

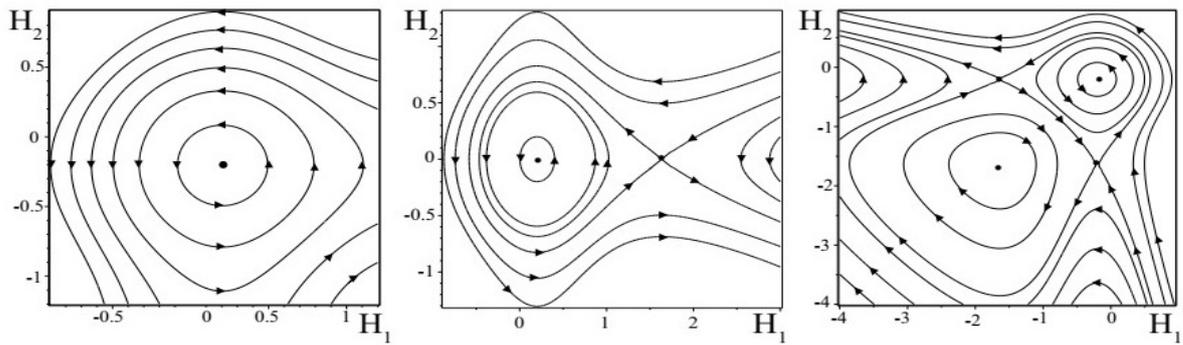


Рис. 2.15: *Зліва*: фазовий фазовий портрет для нерухомих точок, розташованих у вершині квадратної області параметрів (C_3, C_4) ; по центру-фазовий портрет для нерухомих точок на межі області параметрів (C_3, C_4) і для нерухомих точок при $(C_3 = 0, C_4 = \pm\chi); (C_3 = \pm\chi, C_4 = 0)$. *Справа*: фазовий портрет для нерухомих точок, що знаходяться всередині квадратної області параметрів (C_3, C_4) .

$(C_3 = 0, C_4 = ([-\chi, 0[,]0, -\chi]))$, $C_3 = ([-\chi, 0[,]0, -\chi])$, $C_4 = 0$ також маємо дві. Фазовий портрет для цього випадку зображений на Рис. 2.15. Нарешті всередині кожного сектора області (C_3, C_4) знаходимо чотири нерухомі точки: дві еліптичного та дві гіперболічного типів. Фазові портрети цих точок відповідно зображені на Рис. 2.15. Рис. 2.16 демонструє тривимірне зображення обмежених стаціонарних структур, що відповідають фазовим портретам представлених на Рис. 2.15. У лівій частині Рис. 2.16 показано чисельне рішення, що відповідає нелінійній хвилі, яка виникає в околиці еліптичної точки у фазовому просторі. У центральній частині Рис. 2.16 показано рішення для солітону, який відповідає сепаратрисі, що виходить і входить до гіперболічної точки. Нарешті у правій частині Рис. 2.16 ми отримали рішення для кінку, яке відповідає сепаратрисі, що з'єднує дві гіперболічні точки. Перейдемо тепер до дослідження питання про еволюцію стаціонарного великомасштабного магнітного поля для випадку, коли число Релея $Ra \rightarrow 2$. При нульових значеннях констант $C_3 = C_4 = 0$ фазовий портрет має вигляд аналогічний Рис. 2.13 з якого випливає поява лише однієї еліптичної точки у фазовому просторі. У цьому випадку всі стаціонарні рішення, що виникають, збігаються з нелінійними хвилями. Стаціонарне рішення, що

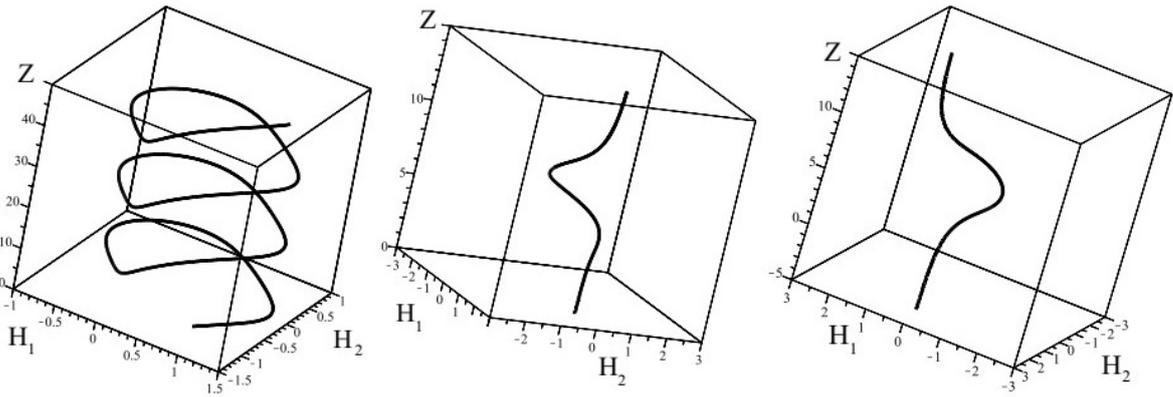


Рис. 2.16: Зображені чисельні рішення рівнянь (2.50)-(2.51) при $Ra \rightarrow 0$ у вигляді нелінійної хвилі, солітону та кінку. Вони відповідають фазовим портретам, показаним на Рис. 2.15.

відповідає нелінійній хвилі кінцевої амплітуди, має вигляд також аналогічний на Рис. 2.13. Як і в попередньому випадку, легко встановити область параметрів C_3, C_4 з різним числом нерухомих точок. Легко помітити, що область існування нерухомих точок на площині параметрів (C_3, C_4) визначається нерівностями:

$$-\tilde{\chi} < C_3 < \tilde{\chi}, \quad -\tilde{\chi} < C_4 < \tilde{\chi},$$

де $\tilde{\chi} = \max \left(\frac{H_1(Q^2 H_1^4 + RaQH_1^2 + 4)}{(Q^2 H_1^4 + 4)(Q^2 H_1^4 + 2RaQH_1^2 + Ra^2 + 4)} \right)$ при зміні H_1 . При фіксованих значеннях параметрів Ra, Q цей максимум легко обчислюється. З результатів цих обчислень, що ми отримали аналогічні фазові портрети і чисельні рішення системи рівнянь (2.50)-(2.51) при $Ra \rightarrow 2$ як у попередньому випадку.

Таким чином, порівнюючи швидкості зростання вихрових та магнітних збурень на початковій стадії розвитку великомасштабної нестійкості було розглянуто випадок при якому можливе виникнення великомасштабних стаціонарних магнітних структур. Ці структури класифікувалися як стаціонарні рішення трьох типів: нелінійні хвилі, солітони та кінки.

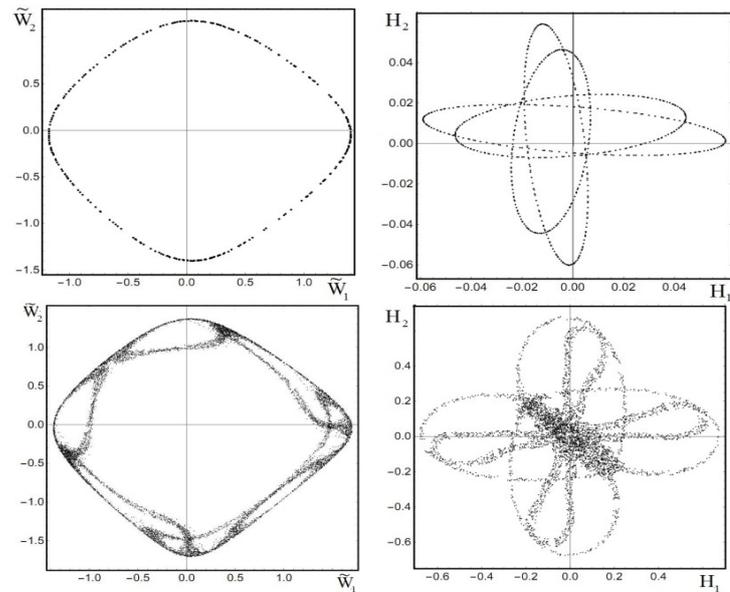


Рис. 2.17: Показано перетині Пуанкаре для двох траєкторій. Зверху для траєкторії з початковими умовами $\widetilde{W}_1(0) = 0.8$, $\widetilde{W}_2(0) = 0.8$, $H_1(0) = 0.01$, $H_2(0) = 0.01$, а знизу з початковими умовами $\widetilde{W}_1(0) = 0.9$, $\widetilde{W}_2(0) = 0.9$, $H_1(0) = 0.01$, $H_2(0) = 0.01$. Для лівих малюнків січна площина натягнута на одиничні координатні вектори швидкості, а правих на координатні вектори магнітного поля. Легко помітити, що траєкторія, що відповідає верхнім малюнкам, навується на тори. Це регулярний тип траєкторій. Нижні малюнки демонструють стохастичні шари, яким належить відповідна хаотична траєкторія.

2.4.3 Стаціонарні хаотичні структури великомасштабних полів

Перейдемо тепер до обговорення нелінійної стадії. Враховуючи залежність правих частин системи нелінійних рівнянь (2.40)-(2.43) від \mathbf{W} , \mathbf{H} , природно очікувати, що зі зростанням збурень нелінійні коефіцієнти $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ зменшуються і нестійкість стабілізується. У цьому розділі ми покажемо існування хаотичних стаціонарних структур гідродинамічних та магнітних полів [102,103]. Для доказу наявності таких стаціонарних траєкторій розглянемо перетині Пуанкаре траєкторій у фазовому просторі. На Рис. 2.17 показані приклади таких перетин, отримані чисельно для безрозмірних параметрів $Q = Pm = Pr = 1$, $Ra = 2$, і постійних $C_1 = C_2 = 0.01$, $C_3 = C_4 = 0.001$ (після інтегрування системи (2.40)-(2.43)). Верхня частина Рис. 2.17 демонструє перетині Пуанкаре ре-

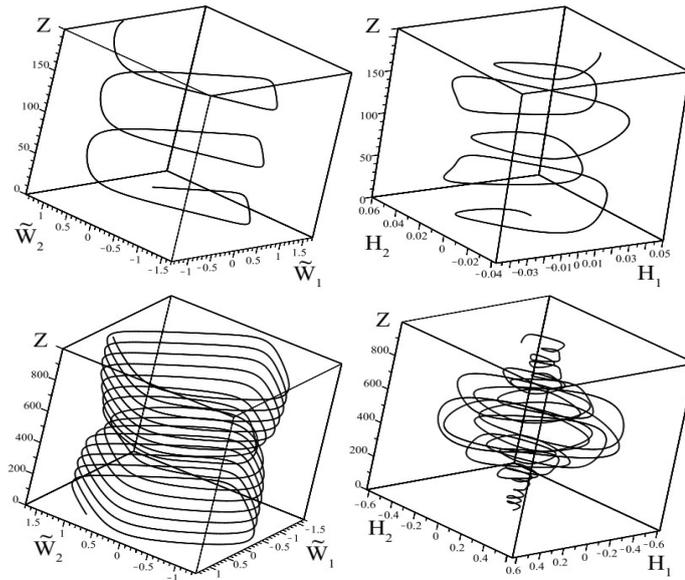


Рис. 2.18: Зверху: залежність швидкості та магнітного поля від Z для системи (2.40)-(2.43) при $\widetilde{W}_1(0) = \widetilde{W}_2(0) = 0.8$, $H_1(0) = H_2(0) = 0.01$ (регулярні рухи, верхні перерізи Пуанкаре на Рис. 2.17). Знизу: те саме при $\widetilde{W}_1(0) = \widetilde{W}_2(0) = 0.9$ (хаотичні рухи, нижні перерізи Пуанкаре на Рис. 2.17).

гулярної траєкторії поля швидкості та магнітного поля. На нижньому перетині добре видна структура хаотичного шару, якому належить обрана траєкторія. Наявність таких хаотичних траєкторій свідчить про існування стаціонарних хаотичних структур поля швидкості та магнітного поля. Для них характерне хаотична зміна напрямків швидкості та магнітних полів з "висоти" Z . Таким чином, у цій системі рівнянь існують стаціонарні хаотичні рішення. Рис. 2.18 представляє залежність стаціонарних великомасштабних полів від "висоти" Z , яка була отримана чисельно для початкових умов, що відповідають перетинам Пуанкаре на Рис. 2.17. З цих малюнків також видно появу стаціонарних хаотичних рішень для магнітного та вихрового поля.

Слід зазначити, що структура магнітного поля в нижній частині Рис. 2.18 зі збільшенням висоти демонструє періодичну структуру, складаючись з ділянок, які повторюються з різними відстанями між сплесками. При чисельному розв'язанні системи рівнянь (2.40)-(2.43) у стаціонарному випадку виникнення хаотичних структур спостерігалось зі збільшенням амплітуд початкових швид-

костей. При малих початкових швидкостях та магнітних полях типовими є регулярні траєкторії. Зі зростанням амплітуди швидкості при перевищенні деякого критичного значення з'являються хаотичні траєкторії, і зі збільшенням початкової швидкості частка простору, зайнятого точками хаотичної траєкторії на перетині Пуанкаре, зростає. В умовах, коли амплітуди початкових швидкостей і магнітних полів перевищують деяке критичне значення, стає типовим поява хаотичних рішень. Це означає, що система рівнянь (2.40)-(2.43) у стаціонарному випадку виявляє хаотичну динаміку, де навіть дрібні зміни початкових умов можуть призводити до великих змін у поведінці системи з часом. У роботі [104] для моделювання нелінійних рівнянь динамо (2.40)-(2.43) пропонувалося застосування штучних нейронних мереж та прогнозування хаотичної поведінки великомасштабних вихрових та магнітних полів.

2.5 Нелінійне динамо в стратифікованій електропровідній рідині, що похило обертається, в однорідному магнітному полі

Як відомо [6, 40, 91], що великомасштабні рухи, викликані неоднорідним нагріванням у гравітаційному полі (вільна конвекція) існують у конвективних зонах Сонця та інших зірок, а також в ядрі Землі та планет. Конвекція, в якій вісь обертання середовища та однорідного магнітного поля збігаються з напрямком вектора гравітації була добре вивчена [40]. Однак для астрофізичних завдань найбільш важливо розглядати випадок, коли напрямки осей обертання та магнітного поля перпендикулярні або не збігаються один з одним. Роль азимутального магнітного поля істотно зростає для конвективних шарів рідини, розташованих в екваторіальній області об'єкта, що обертається. Як відомо з теорії магнітного динамо, тороїдальне магнітне поле в земній корі або сонячній атмосфері по порядку величини перевищує полоїдальне магнітне поле. Виходячи з цієї обставини, проведемо дослідження генерації і нелінійної еволюції вихрових

і магнітних полів у стратифікованій електропровідній рідині, що обертається, у зовнішньому однорідному магнітному полі під впливом зовнішньої неспіральної сили \mathbf{F}_0 [105]. Припустимо, що вектор кутової швидкості обертання $\boldsymbol{\Omega}$ відхиляється від вертикального напрямку z , а вектор зовнішнього однорідного магнітного поля $\bar{\mathbf{B}}$ лежить у горизонтальній площині (x, y) , яка перпендикулярна до напрямку сили тяжіння \mathbf{g} . Така геометрія є найбільш прийнятною для опису динамо-процесів в космічних об'єктах, що обертаються.

2.5.1 Рівняння для великомасштабних полів

Для аналізу динаміки збудженого стану електропровідної рідини у постійних гравітаційному \mathbf{g} та магнітному $\bar{\mathbf{B}}$ полях, а також при наявності постійного градієнту температури $\nabla\bar{T}$ у системі координат, яка обертається, запишемо систему рівнянь магнітогідродинаміки (МГД):

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} v_j \Omega_k + \frac{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml}}{4\pi\bar{\rho}} \frac{\partial B_l}{\partial x_m} (B_k + \bar{B}_k) + g e_i \beta \Theta + F_0^i, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \frac{\partial}{\partial x_j} (V_n (B_p + \bar{B}_p)) + \nu_m \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k^2}, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V_k \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - A e_k V_k = \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k^2}, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.55)$$

Систему рівнянь магнітної гідродинаміки (2.52)-(2.55) наведено у наближенні Буссінеска [6, 40, 91] і вона описує еволюцію збурень на фоні основного рівноважного стану, що визначається постійним градієнтом температури $\nabla\bar{T} = -A\mathbf{e}$ ($A > 0$) і гідростатичним тиском: $\nabla\left(\bar{P} + \frac{\bar{B}^2}{8\pi}\right) = \bar{\rho}\mathbf{g}$. Тут ми нехтуємо відцентровими силами, оскільки вважаємо, що виконується умови: $g \gg \Omega^2 r$, де r – характерний радіус обертання рідини. Нехай тонкий шар (товщини h) електропровідної рідини, що обертається, де нижня поверхня має температуру T_1 , а верхня – T_2 , причому $T_1 > T_2$ – підігрів знизу. Температурний градієнт $\nabla\bar{T} = \mathbf{A}$ у цьому

випадку має напрямок, що збігається з гравітаційним полем $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, де вектор $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ – одиничний вектор у напрямку осі z . Температурний профіль \bar{T} має лінійну залежність від вертикальної координати z : $\bar{T}(z) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{h} \cdot z$. Вектор кутової швидкості обертання $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ вважаємо постійним (твердотільне обертання) і нахиленим по відношенню до площини (x, y) , у якій знаходиться вектор однорідного магнітного поля $\bar{\mathbf{B}} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, 0)$. До рівняння (2.52) включена зовнішня сила \mathbf{F}_0 виду (1.14) з властивостями (1.15), що моделює джерело збудження в середовищі дрібномасштабних і високочастотних флуктуацій поля швидкості $\tilde{\mathbf{v}}_0$ з малим числом Рейнольдса $R = \frac{\tilde{v}_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$. Як і в попередніх розділах застосовуючи метод багатомасштабних розкладів, у порядку R^3 отримуємо основні секулярні рівняння, тобто рівняння для великомасштабних полів швидкості \mathbf{W}_{-1} , магнітного поля \mathbf{B}_{-1} :

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 + \nabla_Z (\alpha_{(2)} \cdot (1 - W_2)) = 0 \quad (2.56)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 - \nabla_Z (\alpha_{(1)} \cdot (1 - W_1)) = 0 \quad (2.57)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 + \nabla_Z (\alpha_H^{(2)} \cdot H_2) = 0 \quad (2.58)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_2 - \nabla_Z (\alpha_H^{(1)} \cdot H_1) = 0 \quad (2.59)$$

тут нелінійні коефіцієнти $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_{(1)} &= \frac{f_0^2}{2} \cdot \frac{D_1 q_1 Q_1 (1 - W_1)^{-1}}{4(1 - W_1)^2 q_1^2 \tilde{Q}_1^2 + [D_1^2 + W_1(2 - W_1) + \mu_1]^2 + \xi_1}, \\ \alpha_{(2)} &= \frac{f_0^2}{2} \cdot \frac{D_2 q_2 Q_2 (1 - W_2)^{-1}}{4(1 - W_2)^2 q_2^2 \tilde{Q}_2^2 + [D_2^2 + W_2(2 - W_2) + \mu_2]^2 + \xi_2}, \\ \alpha_H^{(1)} &= \\ &= f_0^2 \cdot \frac{D_1 (1 - W_1) Pm \tilde{Q}_1 (1 + \bar{B}_1/H_1)}{(1 + Pm^2 (1 - W_1)^2) \left[4(1 - W_1)^2 q_1^2 \tilde{Q}_1^2 + [D_1^2 + W_1(2 - W_1) + \mu_1]^2 + \xi_1 \right]}, \\ \alpha_H^{(2)} &= \end{aligned}$$

$$= f_0^2 \cdot \frac{D_2 (1 - W_2) Pm \tilde{Q}_2 (1 + \bar{B}_2 / H_2)}{(1 + Pm^2 (1 - W_2)^2) \left[4(1 - W_2)^2 q_2^2 \tilde{Q}_2^2 + [D_2^2 + W_2 (2 - W_2) + \mu_2]^2 + \xi_2 \right]},$$

де

$$q_{1,2} = 1 + \frac{QH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2})}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2} - \frac{Ra}{1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2},$$

$$Q_{1,2} = 1 - \frac{QPm(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2})^2}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2},$$

$$\tilde{Q}_{1,2} = 1 - \frac{QPmH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2})}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2} + \frac{RaPr}{1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2},$$

$$\mu_{1,2} = 2QH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2}) \cdot \frac{1 + Pm (1 - W_{1,2})^2}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2} +$$

$$+ Q^2 H_{1,2}^2 (H_{1,2} + \bar{B}_{1,2})^2 \cdot \frac{1 - Pm^2 (1 - W_{1,2})^2}{(1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2)^2} -$$

$$- Ra \cdot \frac{1 + Pr(1 - W_{1,2})^2 + 2QH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2}) \cdot \frac{1 - PrPm(1 - W_{1,2})^2}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2}}{1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2},$$

$$\xi_{1,2} = 2\Xi_{1,2} + 2(1 - W_{1,2})^2 \Pi_{1,2} - 2(1 - W_{1,2})^2 (1 - \tilde{Q}_{1,2}^2) \Pi_{1,2} - 2(1 - q_{1,2}^2) \Xi_{1,2} +$$

$$+ \Xi_{1,2} \Pi_{1,2} + \chi_{1,2} (1 - W_{1,2})^2 + \chi_{1,2} (1 + \sigma_{1,2}),$$

$$\Xi_{1,2} = - \frac{4(1 - W_{1,2})^2 \tilde{Q}_{1,2} Ra Pr}{1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2} + \frac{2(1 - W_{1,2})^2 Ra^2 Pr^2}{(1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2)^2} +$$

$$+ Ra \cdot \frac{1 + Pr(1 - W_{1,2})^2 + 2QH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2}) \cdot \frac{1 - PrPm(1 - W_{1,2})^2}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2}}{1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2},$$

$$\Pi_{1,2} = \frac{4q_{1,2} Ra}{1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2} + \frac{2Ra^2}{(1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2)^2} -$$

$$- Ra \cdot \frac{1 + Pr(1 - W_{1,2})^2 + 2QH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2}) \cdot \frac{1 - PrPm(1 - W_{1,2})^2}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2}}{1 + Pr^2 (1 - W_{1,2})^2},$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{QH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2})}{1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2} \cdot \left[2 \left(1 + Pm^2 (1 - W_{1,2})^2 \right) + QH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2}) \right],$$

$$\chi_{1,2} = \frac{2Ra}{1 + Pr^2(1 - W_{1,2})^2} \cdot \left[\frac{Ra}{2} - \left(1 - Pr(1 - W_{1,2})^2 + \frac{QH_{1,2}(H_{1,2} + \bar{B}_{1,2})(1 + PrPm(1 - W_{1,2})^2)}{1 + Pm^2(1 - W_{1,2})^2}\right) \right].$$

Для розрахунку коефіцієнтів $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$ та α_H , які відповідають нелінійному ГД α -ефекту та фазовому α -ефекту, ми отримали самоузгоджену систему нелінійних рівнянь еволюції для великомасштабних збурень швидкості та магнітного поля, або рівняння нелінійного магніто-вихрового динамо. Важливо зазначити, що механізм динамо працює лише при наявності ефекту обертання середовища. У випадку, коли обертання відсутнє ($\Omega = 0$), відбувається звичайне дифузійне розпливання великомасштабних полів. За відсутності підігріву ($\nabla \bar{T} = 0$) та зовнішнього магнітного поля ($\bar{\mathbf{B}} = 0$), рівняння (2.56)-(2.59) збігаються з результатами роботи [99]. У випадку неелектропровідної рідини ($\sigma = 0$) з градієнтом температури ($\nabla \bar{T} \neq 0$), отримуємо результати роботи [74]. У межах неелектропровідної ($\sigma = 0$) і однорідної рідини ($\nabla \bar{T} = 0$), отримуємо результати роботи [72, 73]. Для отримання більш наочного уявлення про фізичний механізм даної моделі динамо, необхідно спочатку розглянути еволюцію малих збурень, а потім переходити до дослідження нелінійних ефектів.

2.5.2 Великомасштабна нестійкість без зовнішнього магнітного поля

$$\bar{B}_{1,2} = 0$$

Розглянемо поведінку малих обурень поля швидкості (W_1, W_2) і магнітного поля (H_1, H_2), і отримаємо лінеаризовану систему рівнянь:

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_2^{(H)} \cdot \nabla_Z H_2 - \alpha_2^{(W)} \cdot \nabla_Z W_2 = 0 \quad (2.60)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \alpha_1^{(H)} \cdot \nabla_Z H_1 + \alpha_1^{(W)} \cdot \nabla_Z W_1 = 0 \quad (2.61)$$

$$\partial_T H_1 - \nabla_Z^2 H_1 + \tilde{\alpha}_H^{(2)} \cdot \nabla_Z H_2 - \beta_W^{(2)} \cdot \nabla_Z W_2 = 0 \quad (2.62)$$

$$\partial_T H_2 - \nabla_Z^2 H_2 - \tilde{\alpha}_H^{(1)} \cdot \nabla_Z H_1 + \beta_W^{(1)} \cdot \nabla_Z W_1 = 0, \quad (2.63)$$

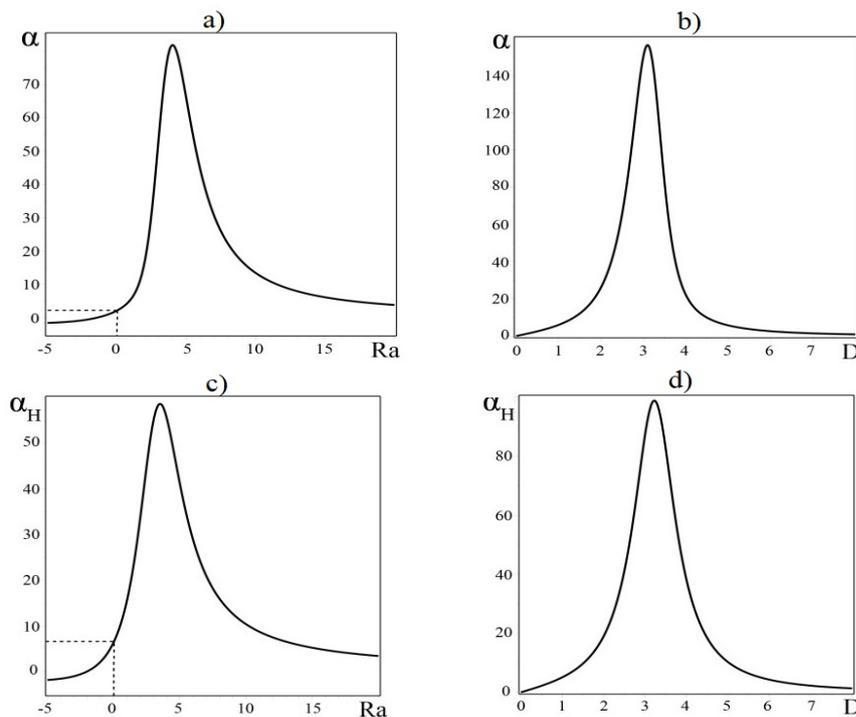


Рис. 2.19: а) Графік залежності α -ефекту від параметра стратифікації середовища Ra (числа Релея); б) графік залежності α -ефекту від параметра обертання середовища D ; в) графік залежності α_H -ефекту від параметра стратифікації середовища Ra (числа Релея); г) графік залежності α_H -ефекту від параметра обертання середовища D .

де постійні коефіцієнти $\alpha_{1,2}^{(H)}$, $\alpha_{1,2}^{(W)}$, $\tilde{\alpha}_H^{(1,2)}$, $\beta_W^{(1,2)}$ мають наступний вид :

$$\alpha_{1,2}^{(H)} = \frac{f_0^2 D_{1,2}}{2} \cdot Q \bar{B}_{1,2} \left[\frac{(2 - Ra)(2 - Q\bar{B}_{1,2}^2)(4(D_{1,2}^2 - Ra) + (Ra + 1)^2 + 7)}{4(4 + (D_{1,2}^2 - Ra)^2)} + \frac{Q\bar{B}_{1,2}^2 - 2(Ra - 1)}{4(4 + (D_{1,2}^2 - Ra)^2)} \right], \quad (2.64)$$

$$\alpha_{1,2}^{(W)} = \frac{f_0^2 D_{1,2}}{2} \times \left[\frac{(2 - Ra)(2 - Q\bar{B}_{1,2}^2)(D_{1,2}^2 - Ra - 2)}{(4 + (D_{1,2}^2 - Ra)^2)^2} + \frac{Q\bar{B}_{1,2}^2 + Ra(1 - Q\bar{B}_{1,2}^2)}{2(4 + (D_{1,2}^2 - Ra)^2)} \right], \quad (2.65)$$

$$\tilde{\alpha}_H^{(1,2)} = \frac{f_0^2 D_{1,2}}{4} \left[\frac{2 + Ra - Q\bar{B}_{1,2}^2 + \bar{B}_{1,2}(2 + Ra)}{4 + (D_{1,2}^2 - Ra)^2} - \right.$$

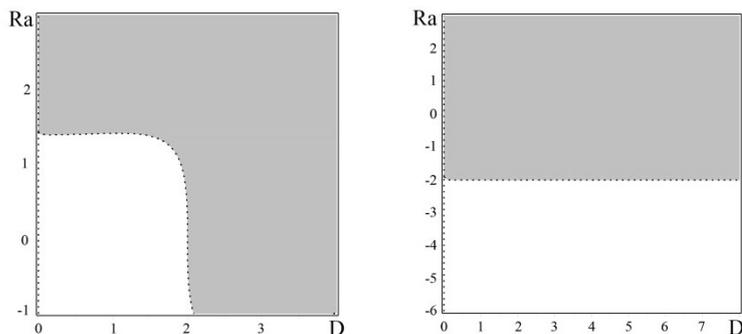


Рис. 2.20: *Зліва*: графік для α у площині (D, Ra) , де сірим кольором показана область, що відповідає позитивним значенням $\alpha > 0$ (нестійкі рішення), а білим кольором - негативним значенням α . *Справа*: графік для α_H в площині (D, Ra) , де сірим кольором показана область, що відповідає позитивним значенням $\alpha_H > 0$ (нестійкі рішення), а білим кольором - негативним значенням α_H .

$$\left. - \frac{\bar{B}_{1,2}(2 + Ra) (4(D_{1,2}^2 - Ra) + (Ra + 1)^2 + 7)}{(4 + (D_{1,2}^2 - Ra)^2)^2} \right], \quad (2.66)$$

$$\beta_W^{(1,2)} = f_0^2 \cdot \frac{D_{1,2} \bar{B}_{1,2} (2 + Ra) (D_{1,2}^2 - Ra - 2)}{(4 + (D_{1,2}^2 - Ra)^2)^2} - \frac{f_0^2}{4} \cdot \frac{D_{1,2} \bar{B}_{1,2} Ra}{4 + (D_{1,2}^2 - Ra)^2} \quad (2.67)$$

При отриманні системи рівнянь (2.60)-(2.63) було прийнято одне спрощення, пов'язане з рівністю чисел Прандтля одиниці: $Pr = Pm = 1$. Як видно з рівнянь (2.60)-(2.63), за наявності зовнішнього магнітного поля коефіцієнти $\alpha_{1,2}^{(H)}$ і $\beta_W^{(1,2)}$ визначають позитивний зворотний зв'язок у самоузгодженій динаміці полів $W_{1,2}$ і $H_{1,2}$. Розв'язання лінійної системи рівнянь (2.60)-(2.63) будемо шукати у вигляді плоских хвиль. В результаті отримаємо дисперсійне рівняння

$$\begin{aligned} & \left[(K^2 - i\omega)^2 - K^2 \left(\alpha_1^{(W)} \alpha_2^{(W)} + \alpha_2^{(H)} \beta_W^{(1)} \right) \right] \times \\ & \times \left[(K^2 - i\omega)^2 - K^2 \left(\tilde{\alpha}_H^{(1)} \tilde{\alpha}_H^{(2)} + \alpha_1^{(H)} \beta_W^{(2)} \right) \right] + \\ & + K^4 \left(\tilde{\alpha}_H^{(1)} \alpha_2^{(H)} - \alpha_1^{(H)} \alpha_2^{(W)} \right) \left(\alpha_1^{(W)} \beta_W^{(2)} - \tilde{\alpha}_H^{(2)} \beta_W^{(1)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Очевидно, що без зовнішнього магнітного поля $\bar{B}_{1,2} = 0$ коефіцієнти $\alpha_{1,2}^{(H)}$ і $\beta_W^{(W)}$ дорівнює нулю і дисперсійне рівняння (2.68) розпадається на два незалежних

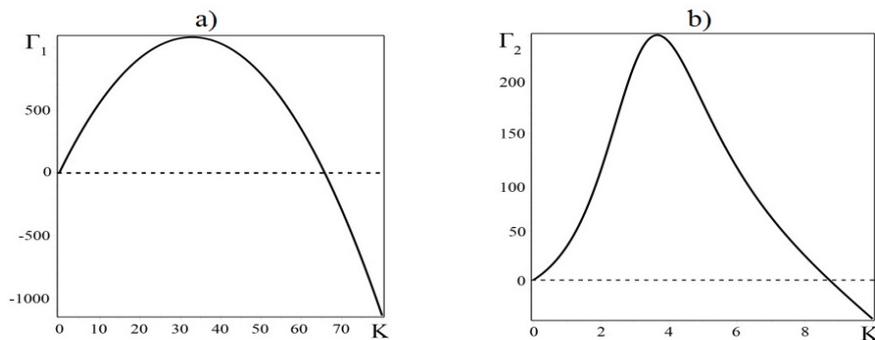


Рис. 2.21: а) Графік залежності інкременту нестійкості для α -ефекту від хвильових чисел K ; б) графік залежності інкременту нестійкості для α_H -ефекту від хвильових чисел K . Графіки побудовані для фіксованих параметрів стратифікації $Ra = 5$ та обертання $D = 2.5$.

рівняння

$$\left[(K^2 - i\omega)^2 - \alpha_1^{(W)} \alpha_2^{(W)} K^2 \right] \left[(K^2 - i\omega)^2 - \tilde{\alpha}_H^{(1)} \tilde{\alpha}_H^{(2)} K^2 \right] = 0 \quad (2.69)$$

У цьому рівнянні коефіцієнти $\alpha_{1,2}^{(W)}$, $\tilde{\alpha}_H^{(1,2)}$ не залежать від величини $\overline{B}_{1,2}$. Дисперсійне рівняння (2.69) відповідає фізичній ситуації, коли малі обурення вихрового та магнітного полів посилюються незалежно один від одного, в результаті розвитку великомасштабної нестійкості типу α -ефекту:

$$\Gamma_1 = Im\omega_1 = \pm \sqrt{\alpha_1^{(W)} \alpha_2^{(W)}} K - K^2 \quad (2.70)$$

$$\Gamma_2 = Im\omega_2 = \pm \sqrt{\tilde{\alpha}_H^{(1)} \tilde{\alpha}_H^{(2)}} K - K^2 \quad (2.71)$$

Рішення (2.70) показують на існування нестійкості за $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ для великомасштабних вихрових збурень з максимальним інкрементом нестійкості $\Gamma_{1max} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4}$ на хвильових числах $K_{1max} = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{2}$. Аналогічно для магнітних обурень максимальний інкремент нестійкості $\Gamma_{2max} = \frac{\tilde{\alpha}_H^{(1)} \tilde{\alpha}_H^{(2)}}{4}$ досягає свого значення при хвильових числах $K_{2max} = \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}_H^{(1)} \tilde{\alpha}_H^{(2)}}}{2}$. Якщо $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ і $\tilde{\alpha}_H^{(1)} \tilde{\alpha}_H^{(2)} < 0$, то замість нестійкостей виникають загасаючі коливання відповідно з частотами: $\omega_{01} = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} K$ и $\omega_{02} = \sqrt{\tilde{\alpha}_H^{(1)} \tilde{\alpha}_H^{(2)}} K$.

Зрозуміло, що в проаналізованій тут лінійної теорії, коефіцієнти $\alpha_1^{(W)}$, $\alpha_2^{(W)}$, $\tilde{\alpha}_H^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_H^{(2)}$ не залежать від амплітуд полів, а залежать лише від параметрів обертання $D_{1,2}$, числа Релея Ra та амплітуди зовнішньої сили f_0 . Проаналізуємо залежність цих коефіцієнтів від безрозмірних параметрів, вважаючи простоти безрозмірну амплітуду зовнішньої сили f_0 рівної $f_0 = 10$.

У коефіцієнтах $\alpha_1^{(W)}$, $\alpha_2^{(W)}$, $\tilde{\alpha}_H^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_H^{(2)}$ замість декартових проекцій i декартових проекцій m у сферичній системі координат (D, φ, θ) . Координатна поверхня $D = \text{const}$ являє собою сферу, θ - широта: $\theta \in [0, \pi]$, φ - довгота: $\varphi \in [0, 2\pi]$ (див. Рис. 2.13). Проведемо аналіз залежності коефіцієнтів посилення α_1 , α_2 , $\tilde{\alpha}_H^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_H^{(2)}$ від ефекту обертання і стратифікації, вважаючи для простоти $D_1 = D_2$, що відповідає фіксованому значенню довготи $\varphi = \pi/4 + \pi n$, де $n = 0, 1, 2 \dots k$, k -ціле число. У цьому випадку коефіцієнти посилення вихрових та магнітних збурень відповідно дорівнюють:

$$\alpha = \alpha_1^{(W)} = \alpha_2^{(W)} = f_0^2 \sqrt{2} D \sin \theta \cdot \frac{4 (D^2 \sin^2 \theta - 2Ra - 4) (2 - Ra) + \frac{Ra}{2} ((D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16)}{((D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16)^2}, \quad (2.72)$$

$$\alpha_H = \tilde{\alpha}_H^{(1)} = \tilde{\alpha}_H^{(2)} = \frac{f_0^2 \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{D(2 + Ra) \sin \theta}{(D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16} \quad (2.73)$$

Звідси видно, що на полюсах ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) генерація вихрових і магнітних збурень не ефективна, оскільки $\alpha, \alpha_H \rightarrow 0$, тобто великомасштабна нестійкість виникає якщо вектор кутової швидкості обертання Ω відхилено від осі z . У разі однорідного середовища $Ra = 0$, де генерація великомасштабних вихрових та магнітних збурень зумовлена дією зовнішньої дрібномасштабної неспіральної сили та сили Коріоліса [99]. Коефіцієнт посилення вихрових збурень α для обертається стратифікованої електропровідної рідини збігається з аналогічним коефіцієнтом α для стратифікованої не електропровідної рідини, що обертається, отриманий в роботі [74]. Отже, висновки про посилення вихрових збурень, зроблені в роботі [74], можна перенести ситуацію, яка розглядається тут. Зале-

жність коефіцієнта α від параметра стратифікації рідини (числа Релея Ra) при фіксованому значенні широти $\theta = \pi/2$ і числа $D = 2.5$ зображена на Рис. 2.19а. З Рис. 2.19а видно, що наявність температурної стратифікації ($Ra \neq 0$) може призвести до суттєвого збільшення коефіцієнта α , і як наслідок більш швидкої генерації великомасштабних вихрових збурень, ніж у однорідному середовищі. Особливо цей ефект виявляється при числах $Ra \rightarrow 5$. Далі зі збільшенням чисел Релея спостерігається спад значень коефіцієнта α . З'ясуємо тепер вплив ефекту обертання середовища на коефіцієнт посилення α . З цією метою зафіксуємо значення числа Релея $Ra = 5$ при $\theta = \pi/2$. У цьому випадку функціональна залежність $\alpha(D)$ зображена на Рис. 2.19b. Звідси видно, що з певному значенні параметра обертання D коефіцієнт α досягає свого максимального значення α_{\max} . Далі при збільшенні числа D коефіцієнт α плавно прагне до нуля, тобто відбувається пригнічення α -ефекту обертанням середовища. Розглянемо тепер залежність коефіцієнта α_H від параметрів стратифікації Ra і обертання D , вважаючи при цьому значенні широти $\theta = \pi/2$. Залежність коефіцієнта α_H від параметра стратифікації рідини (числа Релея Ra) при фіксованому значенні широти $\theta = \pi/2$ і числа $D = 2.5$ зображена на Рис. 2.19c. Тут ми також бачимо, що наявність температурної стратифікації ($Ra \neq 0$) може призвести до істотного збільшення коефіцієнта α_H , і як наслідок більш швидкої генерації великомасштабних магнітних збурень, ніж в однорідному середовищі. Магнітогідродинамічний α -ефект (або α_H -ефект) також збільшується при повільному обертанні до максимального значення $\alpha_{H\max}$, після якого при збільшенні параметра D спостерігається спад α_H , але знак коефіцієнта α_H не змінюється. Аналіз залежності $\alpha_H(D)$ показав, що при «швидкому» обертанні середовища також відбувається «пригнічення» МГД α -ефекту (див. Рис. 2.19d).

Рис. 2.20 представлений графік, що зображує спільний вплив обертання та стратифікації на α і α_H -ефекти в площині (D, Ra) . Тут області нестійкості $\alpha > 0$, $\alpha_H > 0$ виділені сірим кольором. Фіксуючи значення параметрів обертання D

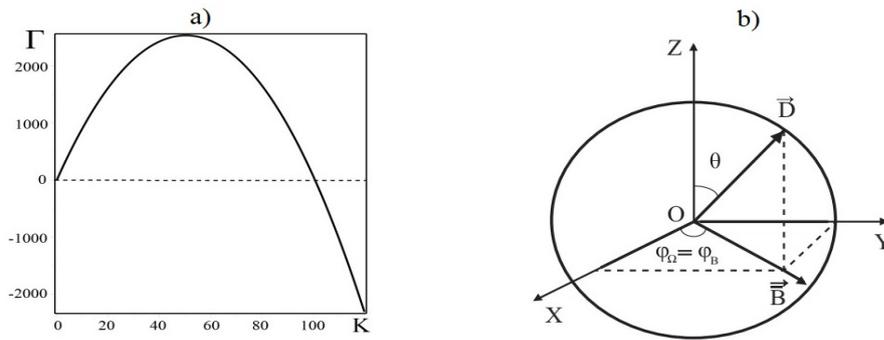


Рис. 2.22: а) графік залежності інкременту нестійкості для Λ -ефекту від хвильових чисел K . б) Показано зв'язок декартових проекцій параметра обертання \mathbf{D} (або вектора кутової швидкості обертання $\boldsymbol{\Omega}$) з їх проекціями у сферичній системі координат. Напрямок зовнішнього магнітного поля $\overline{\mathbf{B}}$ вибрано так, що кути відхилення φ від осі OX для вектора обертання φ_{Ω} і магнітного поля φ_B збігаються: $\varphi_{\Omega} = \varphi_B$.

і стратифікації Ra для широтних кутів $\theta = \pi/2$ побудуємо графіки залежності темпу зростання вихрових Γ_1 і магнітних Γ_2 збурень від хвильових чисел K . Ці графіки мають типовий для α -ефекту вигляд (див. Рис. 2.21).

2.5.3 Великомасштабна нестійкість з урахуванням зовнішнього магнітного поля $\overline{B}_{1,2} \neq 0$

Проведемо дослідження дисперсійного рівняння (2.68) за $\overline{B}_{1,2} \neq 0$. У цьому випадку рівняння (2.68) перетворюється на біквдратне:

$$(K^2 - i\omega)^4 - b(K^2 - i\omega)^2 + a = 0, \quad (2.74)$$

де введені такі позначення:

$$\begin{aligned} b &= K^2 \left(\alpha_1^{(W)} \alpha_2^{(W)} + \alpha_2^{(H)} \beta_W^{(1)} + \tilde{\alpha}_H^{(1)} \tilde{\alpha}_H^{(2)} + \alpha_1^{(H)} \beta_W^{(2)} \right) = K^2 \tilde{b}, \quad a = \\ &= K^4 \left(\tilde{\alpha}_H^{(2)} \alpha_2^{(W)} \left(\alpha_1^{(W)} \tilde{\alpha}_H^{(1)} + \alpha_1^{(H)} \beta_W^{(1)} \right) + \alpha_2^{(H)} \beta_W^{(2)} \left(\alpha_1^{(H)} \beta_W^{(1)} + \tilde{\alpha}_H^{(1)} \alpha_1^{(W)} \right) \right) = K^4 \tilde{a}. \end{aligned}$$

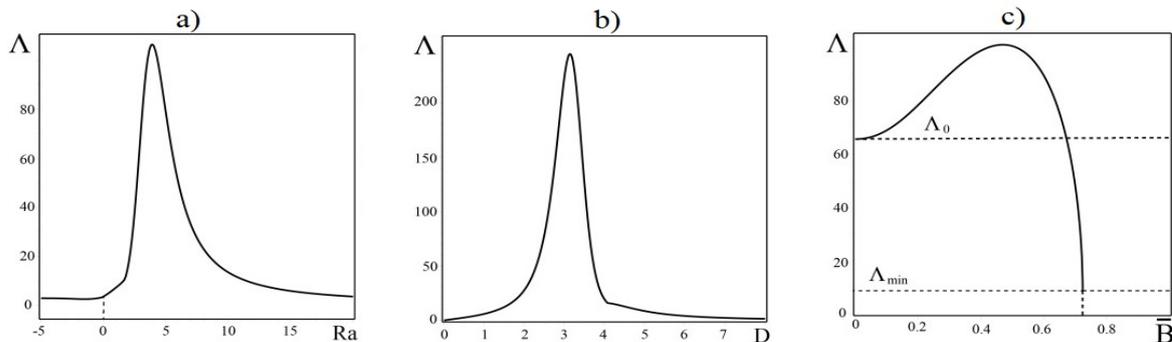


Рис. 2.23: а) Зображено графік залежності Λ -ефекту від параметра стратифікації середовища Ra (числа Релея); б) графік залежності Λ -ефекту від параметра обертання середовища D ; с) графік залежності Λ -ефекту від зовнішнього магнітного поля \bar{B} .

Рішення рівняння (2.80) має вигляд:

$$K^2 - i\omega = \pm K \sqrt{\frac{\tilde{b}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{b}^2 - 4\tilde{a}}} \quad (2.75)$$

Оскільки нас цікавлять наростаючі рішення, то з рівняння (2.75) неважко знайти інкремент великомасштабної нестійкості:

$$\Gamma = \text{Im}\omega = \Lambda K - K^2, \quad (2.76)$$

де $\Lambda = \sqrt{\frac{\tilde{b}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{b}^2 - 4\tilde{a}}}$ – коефіцієнт посилення вихрових і магнітних обурень, який має позитивне значення при виконанні нерівності: $\tilde{b}^2 > 4\tilde{a}$. Максимальний інкремент нестійкості $\Gamma_{max} = \Lambda^2/4$ досягає хвильових числах $K_{max} = \Lambda/2$. Рис. 2.22а показаний графік залежності інкременту Γ великомасштабної нестійкості (2.76) від хвильових чисел K для фіксованих значень кута нахилу $\theta = \pi/2$, амплітуди зовнішньої сили $f_0 = 10$ і безрозмірних параметрів $D = 2.5$, $Ra = 5$, $Q = 10$, $\bar{B} = 0.5$. Цей графік має аналогічний для α -ефекту вигляд (див. Рис. 2.21).

Як і в попередньому розділі, замість декартових проекцій $D_{1,2}$ і $\bar{B}_{1,2}$ зручно перейти до їх проекцій у сферичній системі координат (див. Рис. 2.22b). Проведемо аналіз залежності коефіцієнта посилення Λ від ефекту обертання D , стра-

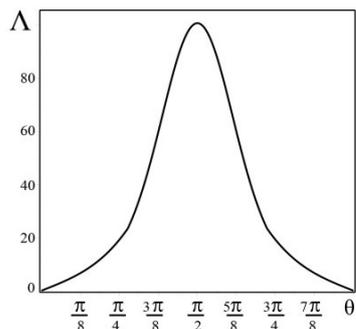


Рис. 2.24: Графік залежності Λ -ефекту від кута нахилу θ вектора кутової швидкості обертання Ω .

тифікації Ra і зовнішнього магнітного поля \bar{B} , вважаючи для простоти $D_1 = D_2$ і $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$, що відповідає фіксованому значенню кута $\varphi_\Omega \approx \varphi_B = \pi/4 + \pi n$, де $n = 0, 1, 2 \dots k$, k - ціле число. У цьому випадку коефіцієнти $\alpha_{1,2}^{(W)}$, $\alpha_{1,2}^{(H)}$, $\tilde{\alpha}_H^{(1,2)}$, $\beta_W^{(1,2)}$, посилення вихрових і магнітних збурень, що входять у коефіцієнт Λ , набувають вигляду:

$$A = \alpha_1^{(W)} = \alpha_2^{(W)} = f_0^2 \sqrt{2} D \sin \theta \left[\frac{(D^2 \sin^2 \theta - 2Ra - 4)(2 - Ra)(4 - Q\bar{B}^2)}{((D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16)^2} + \frac{Ra(2 - Q\bar{B}^2) + Q\bar{B}^2}{4((D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16)} \right], \quad (2.77)$$

$$B_H = \alpha_1^{(H)} = \alpha_2^{(H)} = \frac{f_0^2}{8} D Q \bar{B} \sin \theta \times \left[\frac{4(4 - Q\bar{B}^2)(2 - Ra)(2(D^2 \sin^2 \theta - 2Ra) + (Ra + 1)^2 + 7)}{(16 + (D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2)^2} + \frac{Q\bar{B}^2 - 4(Ra - 1)}{16 + (D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2} \right], \quad (2.78)$$

$$A_H = \tilde{\alpha}_H^{(1)} = \tilde{\alpha}_H^{(2)} = \frac{f_0^2 \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{D \left(2 + Ra - \frac{Q\bar{B}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} (2 + Ra) \bar{B} \right) \sin \theta}{(D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16} - f_0^2 \cdot \frac{2D\bar{B}(2 + Ra) \sin \theta}{((D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16)^2} \cdot ((2(D^2 \sin^2 \theta - 2Ra) + (Ra + 1)^2 + 7)), \quad (2.79)$$

$$B_W = \beta_W^{(1)} = \beta_W^{(2)} = f_0^2 \cdot \frac{4D\bar{B}(2 + Ra) \sin \theta}{((D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16)^2} \cdot (D^2 \sin^2 \theta - 2Ra - 4) - \frac{f_0^2}{4} \cdot \frac{D\bar{B}Ra \sin \theta}{(D^2 \sin^2 \theta - 2Ra)^2 + 16}. \quad (2.80)$$

На Рис. 2.23а показано залежність коефіцієнта посилення Λ від числа Релея Ra при фіксованих значеннях широти $\theta = \pi/2$ і безрозмірних числах $D = 2.5$, $Q = 10$, $\bar{B} = 0.2$. Амплітуду зовнішньої сили f_0 , як і раніше, вибираємо рівною $f_0 = 10$. На графіку Рис. 2.23а штрихом відзначено значення коефіцієнта Λ при $Ra = 0$ – однорідне середовище. Звідси бачимо, що зі збільшенням числа Релея $Ra \rightarrow 5$ величина Λ значно перевищує своє значення для однорідної середовища, тобто досягає свого пікового значення. Подальше збільшення параметра Ra призводить до падіння величини Λ , і як наслідок слабшої генерації магніто-вихрових збурень. Фіксуємо число Релея, наприклад лише на рівні $Ra = 5$, визначимо залежність коефіцієнта Λ від параметра обертання D при зовнішньому магнітному полі $\bar{B} = 0.2$ і $Q = 10$. На графіку Рис. 2.23б показано залежність $\Lambda(D)$. Тут ми спостерігаємо зростання Λ до деякого максимального значення Λ_{max} для $D \approx 3$. Зі зростанням параметра D величина Λ падає і генерація магніто-вихрових збурень стає менш ефективною. «Швидке» обертання середовища також пригнічує Λ -ефект, що розглядається тут. З'ясуємо тепер, як впливає величина однорідного магнітного поля \bar{B} на Λ -ефект. З цією метою фіксуємо такі параметри: $D = 2.5$, $Ra = 5$, $Q = 10$. На графіку Рис. 2.23с показано залежність $\Lambda(\bar{B})$. Верхньою штриховою лінією відзначений рівень Λ_0 , що відповідає випадку, коли зовнішнього магнітного поля немає $\bar{B} = 0$. Як видно із графіка Рис. 2.23с, зростання величини магнітного поля сприяє посиленню магніто-вихрових збурень до деякого рівня $\Lambda_{max} \propto 100$. Нижня штрихова лінія на графіку Рис. 2.23с показаний мінімальний рівень коефіцієнта посилення $\Lambda_{min} \approx 9.63$, який відповідає величині магнітного поля $\bar{B} \approx 0.72$ для заданих параметрів D , Ra і Q . Звідси випливає, що «сильне» зовнішнє магнітне поле

пригнічує Λ -ефект, що розглядається тут.

Якщо зафіксувати параметри D, Ra, Q, \bar{B} для наступних значень $D = 2.5, Ra = 5, Q = 10$ і $\bar{B} = 0.5$, можна визначити залежність величини коефіцієнта посилення Λ від кута θ відхилення вектора кутової швидкості обертання $\mathbf{\Omega}$ від осі вертикального напрямку OZ . Ця залежність $\Lambda(\theta)$ показана на Рис. 2.24. Тут ми бачимо, що генерація магніто-вихрових обурень не виникає ($\Lambda \rightarrow 0$) при $\theta \rightarrow 0$ і $\theta \rightarrow \pi$ (полюс), а при $\theta \rightarrow \pi/2$ (екватор) найбільш ефективна.

2.5.4 Нелінійні стаціонарні структури без зовнішнього магнітного поля $\bar{B} = 0$

Зі зростанням амплітуди збурень $W_{1,2}$ і $H_{1,2}$ внаслідок розвитку великомасштабної нестійкості, лінійна теорія, розвинена у попередньому розділі, змінюється нелінійною стадією. Еволюція обурень $W_{1,2}$ і $H_{1,2}$ визначається нелінійною системою рівнянь (2.56)-(2.59). Розглянемо режим насичення нестійкості, у якому утворюються нелінійні стаціонарні структури. Для опису таких структур, в системі рівнянь (2.56)-(2.59) покладемо $\partial_T W_1 = \partial_T W_2 = \partial_T H_1 = \partial_T H_2 = 0$, а потім проінтегруємо ці рівняння Z . Система стаціонарних рівнянь (2.56)-(2.59) є нелінійною динамічною системою в чотиривимірному фазовому просторі, у якому дивергенція фазового потоку дорівнює нулю. Відтак, така система є консервативною. Пошук гамільтоніана цієї нелінійної системи є складним завданням, оскільки інтегрування ускладнюється залежністю нелінійних коефіцієнтів $\alpha_{(1,2)}, \alpha_H^{(1,2)}$ від полів \mathbf{W} . Один із способів дослідження існування хаотичних стаціонарних структур гідродинамічних та магнітних полів є метод побудови перерізів Пуанкаре. За допомогою стандартних програм у середовищі Mathematica, побудуємо перетину Пуанкаре траєкторій у фазовому просторі для випадку стратифікованої за температурою ($Ra \neq 0$) електропровідної рідини, що обертається без зовнішнього магнітного поля $\bar{B} = 0$. Тут всі чисельні розрахунки ми будемо проводити для наступних параметрів: $f_0 = 10, D = 2,$

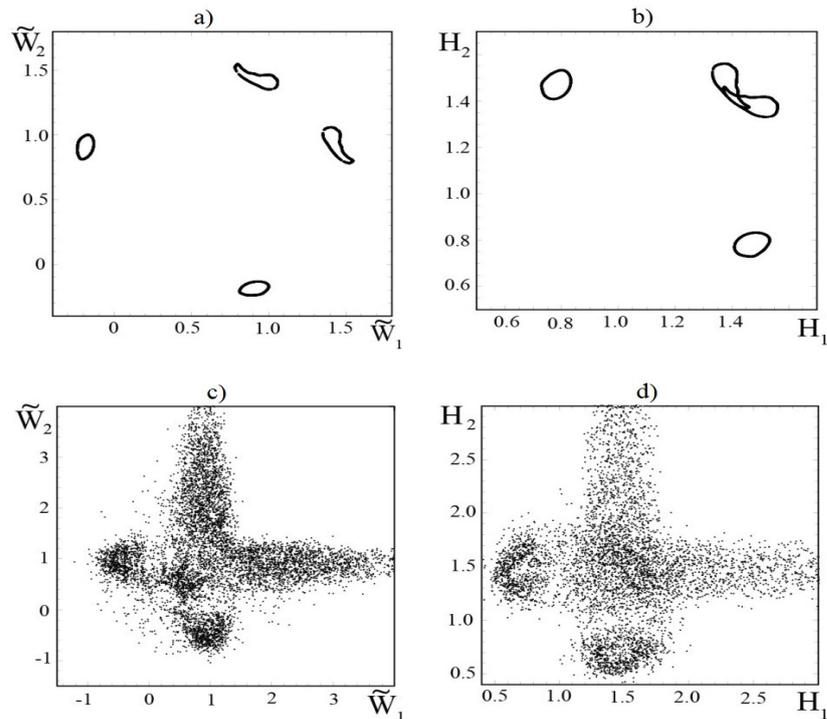


Рис. 2.25: а), б): перерізи Пуанкаре для $\widetilde{W}_1(0) = \widetilde{W}_2(0) = 1.25$, $H_1(0) = H_2(0) = 1.4$ – регулярні траєкторії на торах. с), д): те саме для $\widetilde{W}_1(0) = \widetilde{W}_2(0) = 1.398$ – хаотичні траєкторії у стохастичних шарах. Обчислення для $\overline{B} = 0$.

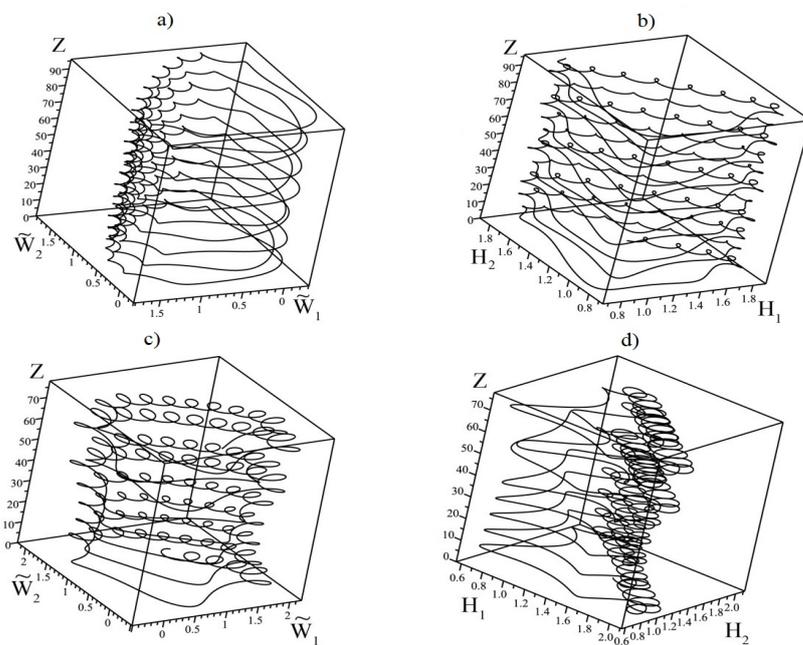


Рис. 2.26: а), б): залежність швидкості та магнітного поля від Z для системи (2.56)-(2.59) при $\widetilde{W}_1(0) = \widetilde{W}_2(0) = 1.25$, $H_1(0) = H_2(0) = 1.4$ – регулярні рухи (Рис. 2.25а-2.25б). с), д): те саме при $\widetilde{W}_1(0) = \widetilde{W}_2(0) = 1.398$ – хаотична поведінка (Рис. 2.25с-2.25д).

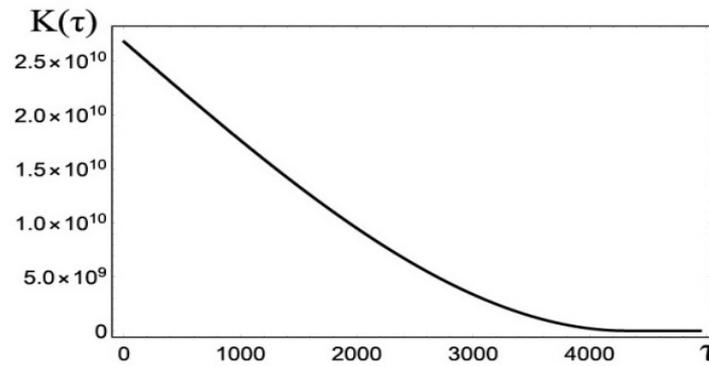


Рис. 2.27: Показано графік залежності автокореляційної функції $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$, від часу τ для траєкторії з початковими умовами $\widetilde{W}_1(0) = 1.398$, $\widetilde{W}_2(0) = 1.398$, $H_1(0) = 1.4$, $H_2(0) = 1.4$ (хаотичне рух).

$Q = 1$, $Ra = 0.1$ і постійних $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = -0.5$, $C_4 = 0.5$. Для початкових умов $\widetilde{W}_1(0) = 1.25$, $\widetilde{W}_2(0) = 1.25$, $H_1(0) = 1.4$, $H_2(0) = 1.4$ перетини Пуанкаре, показані на Рис. 2.25а-2.25б, демонструють регулярні траєкторії для поля швидкості та магнітного поля. При збільшенні амплітуди початкової швидкості збурень $\widetilde{W}_1(0) = 1.398$, $\widetilde{W}_2(0) = 1.398$, $H_1(0) = 1.4$, $H_2(0) = 1.4$ регулярні траєкторії. Цим траєкторіям відповідають перетини Пуанкаре, показані на Рис. 2.25с-2.25д. Рис. 2.26а-2.26д представлена залежність стаціонарних великомасштабних полів від висоти Z , яка була отримана чисельно для початкових умов, яким відповідають перетини Пуанкаре представлені на Рис. 2.25а-2.25д. На Рис. 2.26с-2.26д також видно появу стаціонарних хаотичних рішень для магнітного та вихрового поля. Крім методу перетин Пуанкаре, для доказу виникнення хаотичного режиму стаціонарних великомасштабних полів скористаємося поняттям автокореляційної функції. Як відомо (див. наприклад [100]), автокореляційна функція $K(\tau)$ використовується як величина, що характеризує інтенсивність хаосу, і за визначенням являє собою усереднення по «великому» інтервалу часу Δt добутку випадкових функцій $P(t)$ в момент часу t і $P(t + \tau)$ в момент часу $t + \tau$:
$$K(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} P(t)P(t + \tau)dt.$$
 У нашій задачі роль часу t грає координата Z , а добуток $P(t)P(t + \tau)$ складається з шістнадцяти

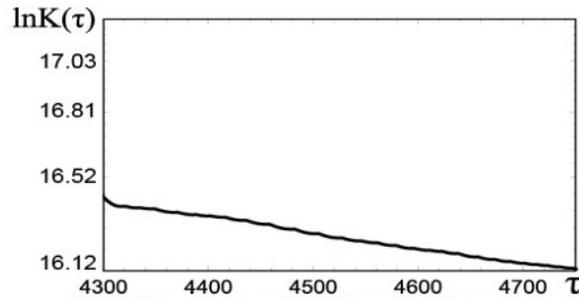


Рис. 2.28: Показано прямолінійну залежність автокореляційної функції $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ в логарифмічних масштабах, від інтервалу часу τ для сильно хаотичного руху.

компонентів:

$$P(t)P(t + \tau) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_1(t) \\ \widetilde{W}_2(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{W}_1(t + \tau) & \widetilde{W}_2(t + \tau) & H_1(t + \tau) & H_2(t + \tau) \end{bmatrix}.$$

Графік залежності автокореляційної функції для компоненти $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ від часу τ зображений на Рис. 2.27. Випадок хаотичного руху відповідає ділянці

траєкторії на Рис. 2.27 з експоненційним спадом функції $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$. Очевидно, що ділянка експоненційного спаду, в логарифмічному масштабі автокореляційної функції $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$, апроксимується прямою лінією (див. Рис. 2.28). Дані, подані на Рис. 2.28, дозволяють нам визначити характерний час кореляції $\tau_{cor} \approx 1324$ стаціонарного випадкового процесу $P_{\widetilde{W}_1}$. Якщо перейти до введеного вище часу часу t , то стає ясно, що ми знайшли оцінне значення висоти $Z_{cor} \approx 1324$ від якої починається хаотичний рух стаціонарних великомасштабних полів. Рис. 2.26с-2.26d показано хаотичні рішення для полів швидкості та магнітного поля до висоти $Z \approx 90$, яка значно менша за Z_{cor} . Однак і в цьому випадку видно початок складної заплутаної траєкторії для великомасштабних полів зі збільшенням висоти Z . Тому намалювати ці траєкторії на графіку вже неможливо. Таким чином, зі збільшенням висоти Z до деякого критичного значення Z_{cor} , квазіпе-

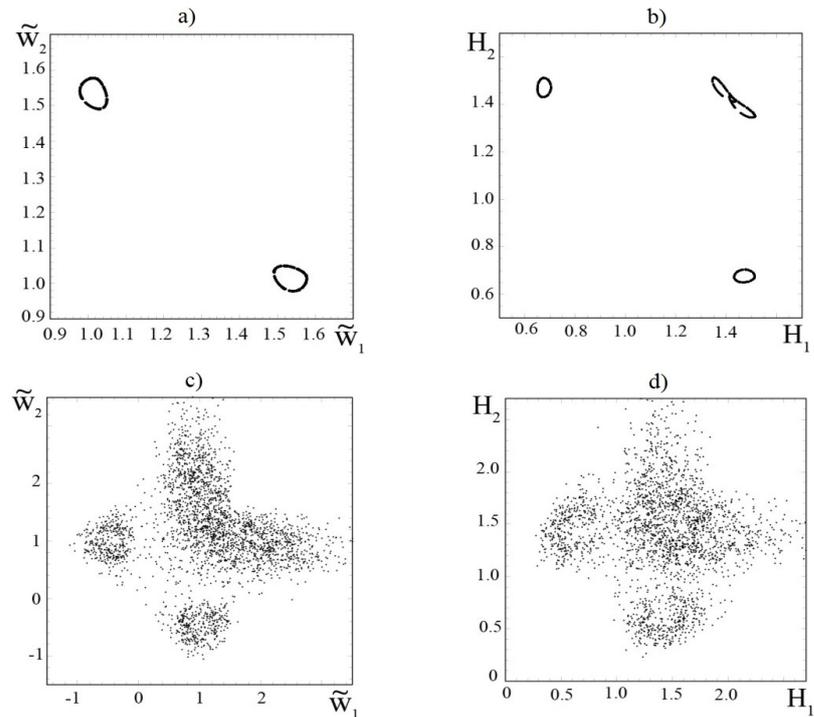


Рис. 2.29: а), б): перерізи Пуанкаре для $\widetilde{W}_1(0) = \widetilde{W}_2(0) = 1.31$, $H_1(0) = H_2(0) = 1.4$ — регулярні траєкторії на торах. в), г): те саме для $H_1(0) = H_2(0) = 1.8$ — хаотичні траєкторії у стохастичних шарах. Обчислення для $\overline{B} = 0.1$.

ріодичний рух стаціонарних великомасштабних полів змінюється на хаотичний.

2.5.5 Нелінійні стаціонарні структури за наявності зовнішнього магнітного поля $\overline{B} \neq 0$

Тут ми також, за допомогою стандартних програм у середовищі Mathematica, побудуємо перетин Пуанкаре траєкторій у фазовому просторі для стаціонарних рівнянь (2.56)-(2.59) з урахуванням зовнішнього однорідного магнітного поля $\overline{B} \neq 0$. Для цієї мети всі чисельні розрахунки будемо проводити для наступних безрозмірних параметрів: $f_0 = 10$, $D = 2$, $Q = 1$, $Ra = 0.1$, $\overline{B} = 0.1$ і постійних: $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = -0.5$, $C_4 = 0.5$. Рис. 2.29а-2.29б показані регулярні траєкторії для поля швидкості та магнітного поля, які побудовані при чисельному розв'язанні стаціонарних рівнянь (2.56)-(2.59) з початковими даними. $\widetilde{W}_2(0) = 1.31$, $H_1(0) = 1.4$, $H_2(0) = 1.4$. Цей тип траєкторій відповідає квазіпе-

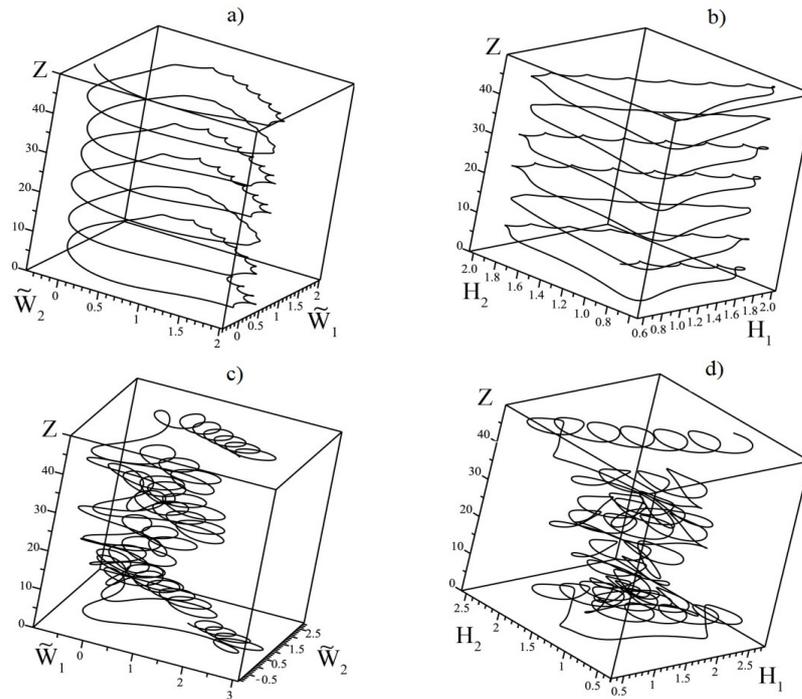


Рис. 2.30: а), б): залежність швидкості та магнітного поля від Z при $\widetilde{W}_1(0) = \widetilde{W}_2(0) = 1.31$, $H_1(0) = H_2(0) = 1.4$ — регулярні рухи (Рис. 2.29а-2.29б). с), д): те саме при $H_1(0) = H_2(0) = 1.8$ — хаотична поведінка (Рис. 2.29с-2.29д).

ріодичного характеру рухів для великомасштабних збурень швидкості ($\widetilde{W}_{1,2}$) і магнітного поля ($H_{1,2}$). Збільшуючи тільки амплітуди початкових значень збурень магнітного поля $\widetilde{W}_1(0) = 1.31$, $\widetilde{W}_2(0) = 1.31$, $H_1(0) = 1.8$, $H_2(0) = 1.8$ ми виявляємо, що квазіперіодичний рух переходить до хаотичного. Цей випадок добре демонструє перетин Пуанкаре, показаний на Рис. 2.29с-2.29д. Використовуючи початкові дані для регулярних ($\widetilde{W}_1(0) = 1.31$, $\widetilde{W}_2(0) = 1.31$, $H_1(0) = 1.4$, $H_2(0) = 1.4$) та хаотичних ($\widetilde{W}_1(0) = 1.31$, $\widetilde{W}_2(0) = 1.31$, $H_1(0) = 1.8$, $H_2(0) = 1.8$) траєкторій, можна чисельно побудувати залежність стаціонарних великомасштабних полів від висоти Z (див. Рис. 2.30а-2.30д). На Рис. 2.30с-2.30д також видно появу стаціонарних хаотичних рішень для магнітного та вихрового поля. Для підтвердження виникнення хаотичного режиму стаціонарних великомасштабних полів побудуємо графік залежності автокореляційної функції для компоненти $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ від часу τ (див. Рис. 2.31). Хаотичним траєкторіям руху від-

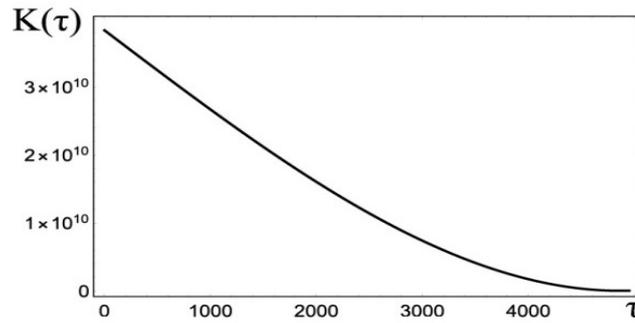


Рис. 2.31: Графік залежності автокореляційної функції $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$, від часу τ для траєкторії з початковими умовами $\widetilde{W}_1(0) = 1.31$, $\widetilde{W}_2(0) = 1.31$, $H_1(0) = 1.8$, $H_2(0) = 1.8$ (хаотичний рух) і для $\overline{B} = 0.1$.

повідляє ділянка графіка з експоненційним спадом функції $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ на Рис. 2.25. У логарифмічному масштабі автокореляційної функції $K_{\widetilde{W}_1\widetilde{W}_1}$ ця ділянка апроксимується прямою лінією (див. Рис. 2.32). З цього графіка легко визначити оцінне значення характерного часу кореляції стаціонарного випадкового процесу: $\tau_{cor} \approx 2000$. Рис. 2.30с-2.30d показано хаотичні рішення для полів швидкості та магнітного поля до висоти $Z \approx 50$, яка набагато менша за Z_{cor} . Очевидно, що з прагненням Z до деякого критичного значення Z_{cor} , траєкторії руху стають все більш заплутаними і нарешті цілком хаотичними.

2.6 Генерація великомасштабних магнітно-вихрових структур у стратифікованій замагніченій плазмі під впливом дрібномасштабної сили

У цьому розділі розглядається теорія генерації великомасштабних вихрових і магнітних структур дрібномасштабною неспіральною силою в стратифікованій за температурою повністю іонізованій плазмі, що перебуває у зовнішньому похилому магнітному полі. У попередньому розділі конвективний рух електропровідного середовища описувався в рамках звичайної магнітогідродинаміки, тобто коли обидві компоненти (електронна та іонна рідини) поводяться

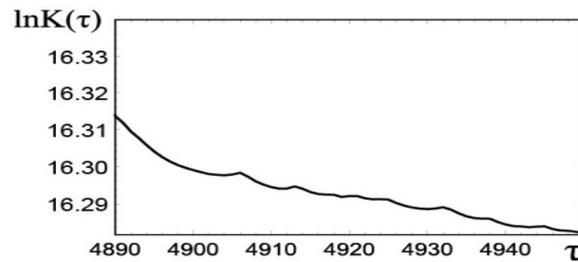


Рис. 2.32: Показано прямолінійну залежність автокореляційної функції $K_{\widetilde{w}_1 \widetilde{w}_1}$ в логарифмічних масштабах, від інтервалу часу τ для сильно хаотичного руху при $\overline{B} = 0.1$.

як єдине ціле. Однак існують фізичні процеси, у яких беруть участь переважно електрони, тоді як іони залишаються нерухомими. Такі явища спостерігаються як у лабораторній [106]- [108], так і в космічній плазмі [109]- [110]. Ці ефекти описуються рівняннями електронної магнітогідродинаміки (ЕМГД), які базуються на рівняннях Брагінського [111] для електронної компоненти з урахуванням термомагнітних явищ. Теплова конвекція плазми розглядається у наближенні Буссінеска із зовнішньою неспіральною силою \mathbf{F}_0 . Основна роль цієї сили полягає в підтримці помірного рівня дрібномасштабних неспіральних рухів за наявності дисипації. На відміну від традиційного АКА-ефекту, нами отримано новий плазмовий α -ефект, пов'язаний із генерацією середньої спіральності в замагніченій плазмі з постійним градієнтом температури та гравітаційним полем під дією зовнішньої неспіральної сили. Чисельний аналіз дозволив отримати стаціонарні розв'язки рівнянь вихрового та магнітного динамо у вигляді локалізованих структур, подібних до нелінійних хвиль Бельтрамі [112].

2.6.1 Основні рівняння та постановка задачі

Розглянемо шар повністю іонізованої плазми з рівноважним градієнтом температури $\nabla \overline{T}$ у постійних гравітаційному \mathbf{g} та магнітному $\overline{\mathbf{B}}$ полях. Припустимо, що невозмущений гідродинамічний рух відсутній, а розвиток збурень відбувається настільки швидко, що іони залишаються "нерухомими" та "холо-

дними". Аналіз динаміки збуреного стану електронної рідини (плазми) базується на застосуванні рівнянь Брагінського [111]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \right) - \frac{1}{m\bar{N}} \nabla P + \frac{1}{m\bar{N}} (\mathbf{R}_v + \mathbf{R}_T) + \frac{\mathbf{F}_\eta}{m\bar{N}} + \frac{\mathbf{F}_g}{m\bar{N}},$$

$$P = \bar{N}T, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T = -\frac{2 \operatorname{div} \mathbf{q}}{3 \bar{N}}, \quad (2.82)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2.83)$$

У рівнянні руху електронів (2.81) враховується сукупний вплив зіткнень електронів, представлений силою тертя \mathbf{R}_v , передача імпульсу електронам за рахунок градієнта температури (позначається \mathbf{R}_T), а також дія гравітаційної сили \mathbf{F}_g . Примітно, що коефіцієнти переносу в магнітному полі залежать від параметра $\omega_{Be}\tau$, де $\omega_{Be} = eB/mc$ – ларморівська частота обертання електрона. У режимі замагніченої плазми ($\omega_{Be}\tau \gg 1$) вирази для сили тертя \mathbf{R}_v і теплової сили \mathbf{R}_T набувають конкретних форм:

$$\frac{\mathbf{R}_v}{m\bar{N}} = -0.51\nu\mathbf{V}_\parallel - \nu\mathbf{V}_\perp \quad (2.84)$$

$$\frac{\mathbf{R}_T}{m\bar{N}} = -0.71 \frac{\nabla_\parallel T}{m} - \frac{3}{2} \frac{e\nu}{m^2 c \omega_{Be}^2} [\mathbf{B} \times \nabla T] \quad (2.85)$$

Символи \parallel і \perp позначають напрямлену орієнтацію вздовж і поперек магнітного поля відповідно. Тепловий потік електронів також має дві компоненти, які позначаються як $\mathbf{q} = \mathbf{q}_v + \mathbf{q}_T$:

$$\mathbf{q}_v = 0.71 \bar{N}T \mathbf{V}_\parallel + \frac{3e}{2mc} \frac{\nu \bar{N}T}{\omega_{Be}^2} [\mathbf{B} \times \mathbf{V}] \quad (2.86)$$

$$\mathbf{q}_T = -3.16 \frac{\bar{N}T\tau}{m} \nabla_\parallel T - 4.66 \frac{\bar{N}T\nu}{m\omega_{Be}^2} \nabla_\perp T - \frac{5}{2} \frac{e\bar{N}T}{cm^2\omega_{Be}^2} [\mathbf{B} \times \nabla T] \quad (2.87)$$

Далі доповнюємо рівняння (2.81)-(2.83) законом Фарадея

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.88)$$

законом Ампера

$$\text{rot}\mathbf{B} = -\frac{4\pi e\bar{N}}{c}\mathbf{V}, \quad (2.89)$$

та рівнянням соленоїдальності магнітного поля

$$\text{div}\mathbf{B} = 0. \quad (2.90)$$

Для опису руху електронної рідини виберемо декартову систему координат, у якій вісь Z спрямована вертикально вгору. Розглянемо плоский плазмовий шар кінцевої товщини h з вільними нижньою ($z = 0$) та верхньою ($z = h$) межами. Нехай на нижній межі ($z = 0$) підтримується температура T_d , а на верхній межі ($z = h$) — температура T_u , причому $T_d > T_u$, що вказує на підігрів шару знизу. Рівноважна температура \bar{T} має лінійний профіль уздовж z :

$$\bar{T}(z) = T_d - \frac{(T_d - T_u)}{h}z.$$

Таким чином, постійний градієнт температури $\nabla\bar{T} = \text{const} = -\mathbf{e}(d\bar{T}/dz) = -\mathbf{e}A$ спрямований вертикально вниз, паралельно напрямку сили тяжіння $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}$. Тут \mathbf{e} — одиничний вектор, спрямований вертикально вгору вздовж осі Z . Спочатку передбачається, що шар рідини перебуває у стані спокою. Потім фізична система злегка виводиться з положення рівноваги за рахунок конвекції. Ми припускаємо, що змінні у рівняннях (2.81)–(2.83) можна подати у вигляді суми їхніх стаціонарних та збурених складових:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}', \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}', \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}', \quad T = \bar{T} + T', \quad P = \bar{P} + P'.$$

Передбачається, що всередині шару рівноважна густина плазми стала, $\bar{N} = \text{const}$, а збурення густини плазми N' виражаються через збурення температури T' (наближення Буссінеска [91]): $N'/\bar{N} \approx -T'/\bar{T}$. Тоді внесок сили тяжіння у (2.81), використовуючи наближення Буссінеска, можна виразити як:

$$\frac{\mathbf{F}_g}{m\bar{N}} = \frac{N'}{\bar{N}}\mathbf{g} = -\frac{T'}{\bar{T}}\mathbf{g}. \quad (2.91)$$

В'язка сила \mathbf{F}_η у рівнянні (2.81) може бути записана як [111]:

$$\frac{\eta_e}{m\bar{N}} \nabla^2 \mathbf{V}' = 0.73 \frac{\bar{T}\tau}{m} \nabla^2 \mathbf{V}' = \nu \nabla^2 \mathbf{V}',$$

де ν — коефіцієнт кінематичної в'язкості електронної рідини. Далі, для зручності, ми опускаємо штрих над збуреними величинами $\mathbf{V}, T, P, \mathbf{E}$ і \mathbf{B} . Для моделювання турбулентного стану плазми у рівняння (2.81) вводиться зовнішня сила \mathbf{F}_0 . Вона слугує джерелом збудження дрібномасштабних високочастотних флуктуацій у полі швидкості електронів $\tilde{\mathbf{v}}_0$, які характеризуються малим числом Рейнольдса: $R = \frac{\tilde{v}_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$. Ми будемо розглядати неспіральну зовнішню силу \mathbf{F}_0 виду (1.14) з властивостями (1.15).

Застосовуючи метод визначення умов розв'язності багатомасштабного асимптотичного розкладу, ми отримали рівняння для великомасштабних вихрових та магнітних полів. Як і в попередніх розділах, ми розглядатимемо квазідвовимірні великомасштабні структури з характерними горизонтальними розмірами L_X, L_Y , що значно перевищують вертикальний розмір L_Z :

$$L_X, L_Y \gg L_Z \gg \lambda_0, \text{ or } \varepsilon \cong \left(\frac{L_Z}{L_X}; \frac{L_Z}{L_Y} \right) \ll 1, \frac{\lambda_0}{L_Z} \ll 1,$$

де ε — параметр масштабної анізотропії. З цього масштабного співвідношення випливає, що похідні за Z є більш переважними: $\nabla_Z \equiv \frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}$. Крім того, ми припускаємо, що всі великомасштабні обурення залежать лише від координати Z : $\mathbf{W}_{-1} = (W_{-1}^x(Z), W_{-1}^y(Z), 0)$, $\mathbf{B}_{-1} = (B_{-1}^x(Z), B_{-1}^y(Z), 0)$. Застосовуючи вищезазначені припущення, ми отримали рівняння для еволюції великомасштабного поля швидкості у вигляді:

$$\partial_T (\nabla_Z^2 W_1 - W_1) - \frac{f_0^2}{2} D_2 \nabla_Z^3 (\alpha_{NL}(W_2)) = \nabla_Z^4 W_1, \quad (2.92)$$

$$\partial_T (\nabla_Z^2 W_2 - W_2) + \frac{f_0^2}{2} D_1 \nabla_Z^3 (\alpha_{NL}(W_1)) = \nabla_Z^4 W_2, \quad (2.93)$$

де

$$\alpha_{NL}(W_1) = \frac{2(4.41 + Pr^2 \widetilde{W}_1^2) - 2.1Ra + \frac{3}{2} \widetilde{\xi} Ra_1 Pr D_2 \widetilde{W}_1}{\Xi_1^{(0)} + \widetilde{\xi} \Xi_1^{(1)} + \widetilde{\xi}^2 \Xi_1^{(2)}},$$

$$\alpha_{NL}(W_2) = \frac{2(4.41 + Pr^2 \widetilde{W}_2^2) - 2.1Ra - \frac{3}{2} \widetilde{\xi} Ra_1 Pr D_1 \widetilde{W}_2}{\Xi_2^{(0)} - \widetilde{\xi} \Xi_2^{(1)} + \widetilde{\xi}^2 \Xi_2^{(2)}},$$

$$\begin{aligned} \Xi_{1,2}^{(0)} &= (4.41 + Pr^2 \widetilde{W}_{1,2}^2) ((4 + \widetilde{W}_{1,2}^2 - D_{1,2}^2)^2 + 16D_{1,2}^2) + \\ &+ 2RaPr(4 + \widetilde{W}_{1,2}^2 - D_{1,2}^2) \widetilde{W}_{1,2} \widetilde{W}_{1,2} - 8.4Ra(4 + \widetilde{W}_{1,2}^2 + D_{1,2}^2) + Ra^2(4 + \widetilde{W}_{1,2}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_1^{(1)} &= 3Ra_1 [D_2(4 + \widetilde{W}_1^2)(2Pr \widetilde{W}_1 + 2.1 \widetilde{W}_1) + 2Pr \widetilde{W}_1(D_1^2 - 2D_1 D_3) - \\ &- 2.1 \widetilde{W}_1(2D_1 D_3 + D_1^2 D_2) + \widetilde{W}_1 D_1 D_3 (Pr \widetilde{W}_1 \widetilde{W}_1 + Ra - 4.2) - Pr \widetilde{W}_1 D_1^3 D_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_2^{(1)} &= 3Ra_1 [D_1(4 + \widetilde{W}_2^2)(2Pr \widetilde{W}_2 + 2.1 \widetilde{W}_2) + 2Pr \widetilde{W}_2(D_2^2 + 2D_2 D_3) - \\ &- 2.1 \widetilde{W}_2(D_1 D_2^2 - 2D_2 D_3) - \widetilde{W}_2 D_2 D_3 (Pr \widetilde{W}_2 \widetilde{W}_2 + Ra - 4.2) + Pr \widetilde{W}_2 D_2^3 D_3], \end{aligned}$$

$$\Xi_{1,2}^{(2)} = \frac{9}{4} Ra_1^2 \left(D_{2,1}^2 (4 + \widetilde{W}_{1,2}^2) + D_{1,2}^2 D_3^3 + 4D_1 D_2 D_3 \right),$$

де $D = (e\overline{B}t_0)/mc = (\omega_{Be} \lambda_0^2)/\nu$ – параметр обертання, $\widetilde{Ra} = \frac{Ra}{Pr}$, $Ra = \frac{gA\lambda_0^4}{T\nu\chi}$ – число Релея, χ – коефіцієнт температуропровідності електронів, V_{Te} – теплова швидкість електронів, $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля, $\widetilde{\xi} = \nu/(\omega_{Be}^2 \lambda_0^2 \tau)$ – параметр, що характеризує вплив ефекту Нернста. Тут для спрощення виду виразів для нелінійних коефіцієнтів $\alpha_{NL}(W_1)$ і $\alpha_{NL}(W_2)$ використані позначення: $\widetilde{W}_{1,2} = 1 - W_{1,2}$, $\widetilde{\widetilde{W}}_{1,2} = 1 - 1.47W_{1,2}$. Відповідно до закону Ампера (2.89), великомасштабні обурення магнітного поля збуджуються великомасштабними вихровими рухами електронів, а подальша нелінійна динаміка великомасштабних магнітних полів описується наступними рівняннями:

$$\partial_T(\nabla_Z^2 B_1 - B_1) - \frac{f_0^2}{2} D_1 \nabla_Z^2(\alpha_{NL}(W_1)) = \nabla_Z^4 B_1, \quad (2.94)$$

$$\partial_T(\nabla_Z^2 B_2 - B_2) - \frac{f_0^2}{2} D_2 \nabla_Z^2(\alpha_{NL}(W_2)) = \nabla_Z^4 B_2. \quad (2.95)$$

Спочатку ми обговоримо стійкість малих збурень поля (лінійна теорія), а потім

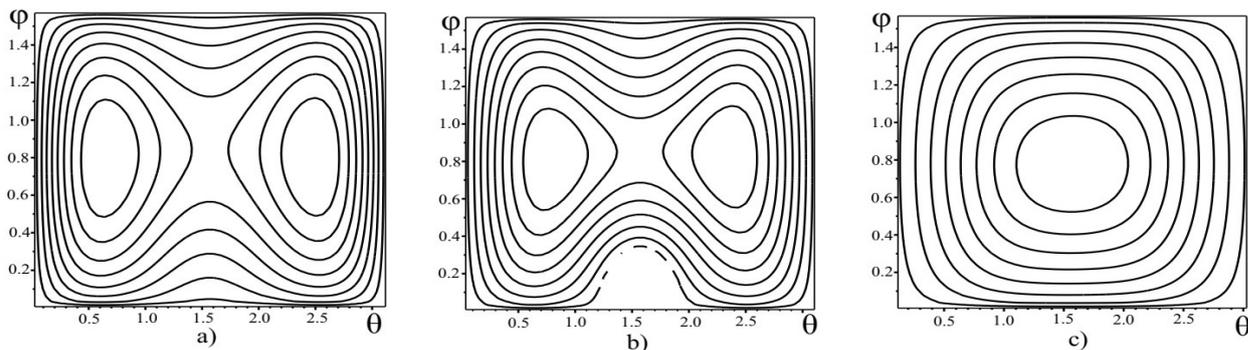


Рис. 2.33: Контурні графіки α в залежності від довготи φ і широти θ зі збільшенням Ra : а) $Ra = 1$; б) $Ra = 3$; в) $Ra = 5$.

розглянемо можливість існування стаціонарних структур.

2.6.2 Великомасштабна нестійкість магнітно-вихрових збурень

У цьому підрозділі ми розглянемо питання стійкості малих збурень полів швидкості \mathbf{W} та магнітного поля \mathbf{B} . Для цього проведемо лінеаризацію рівнянь (2.92)-(2.95), що призведе до наступного набору лінійних рівнянь:

$$(\partial_T \nabla_Z^2 - \partial_T - \nabla_Z^4)W_1 - \alpha_2 \nabla_Z^3 W_2 = 0,$$

$$(\partial_T \nabla_Z^2 - \partial_T - \nabla_Z^4)W_2 + \alpha_1 \nabla_Z^3 W_1 = 0, \quad (2.96)$$

$$(\partial_T \nabla_Z^2 - \partial_T - \nabla_Z^4)B_1 - \alpha_1 \nabla_Z^3 B_2 = 0,$$

$$(\partial_T \nabla_Z^2 - \partial_T - \nabla_Z^4)B_2 + \alpha_2 \nabla_Z^3 B_1 = 0. \quad (2.97)$$

Коефіцієнти посилення $\alpha_{1,2}$ в рівняннях (2.96)-(2.97) мають доволі громіздкий вигляд, тому їх можна знайти в роботі [112]. Там же показано, що ці коефіцієнти пов'язані із середньою спіральністю дрібномасштабного поля швидкості: $\alpha_{1,2} \sim H = \overline{\mathbf{v}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{v}_0}$. Висловимо обурення (W_1, W_2) у рівнянні (2.96) у вигляді плоских хвиль з хвильовим вектором $\mathbf{K} \parallel OZ$, а саме:

$$W_1 = A_{W_1} \exp(\Gamma t) \sin KZ, \quad W_2 = A_{W_2} \exp(\Gamma t) \cos KZ \quad (2.98)$$

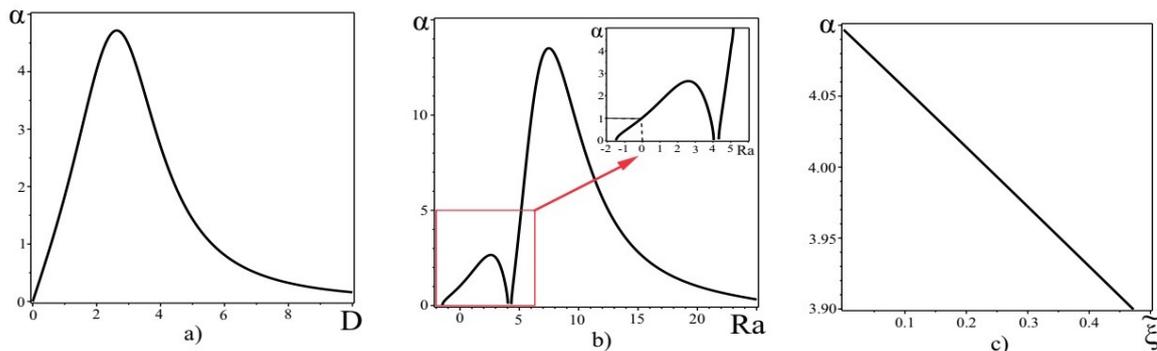


Рис. 2.34: Залежність α -ефекту від а) магнітного параметра D ; б) параметра стратифікації Ra ; і с) параметра Нернста $\tilde{\xi}$.

Ці рішення (2.98) описують кругово поляризовану плоску хвилю, амплітуда якої експоненційно зростає з часом. Такі хвилі називаються хвилями Бельтрами, оскільки великомасштабне поле швидкості (2.98) задовольняє умові $\mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{W} = 0$ що характерно для течій типу Бельтрамі. Із системи (2.96) випливає наступне дисперсійне співвідношення:

$$(\Gamma(1 + K^2) + K^4)^2 - \alpha_1 \alpha_2 K^6 = 0 \quad (2.99)$$

З цього дисперсійного співвідношення можна визначити швидкість зростання нестійкості, тобто показник експоненційного збільшення амплітуди збурень у часі.

$$\Gamma = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} K^3}{1 + K^2} - \frac{K^4}{1 + K^2} \quad (2.100)$$

Так само, як і у випадку великомасштабного поля швидкості, обурення магнітного поля (B_1, B_2) у вигляді плоских хвиль (2.98), що вони задовольняють умову $\mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B} = 0$. Таким чином, нестійкість великомасштабних магнітно-вихрових обурень при $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ пояснюється ефективним механізмом перенесення енергії від дрібномасштабних гвинтових рухів до великомасштабних структур. Це узгоджується з добре відомими механізмами динамо-ефекту, де дрібномасштабні турбулентні рухи сприяють генерації та підсиленню великих магнітних полів. Важливим аспектом є те, що в умовах нахиленого зовнішньо-

го магнітного поля у стратифікованій плазмі виникає ненульова проєкція сили Лоренца, яка сприяє порушенню дзеркальної симетрії турбулентності. Як наслідок, у системі може переважати генерація вихорів певного знаку (лівосторонніх або правосторонніх), що визначає напрямки великомасштабних магнітних полів. Важливо, що в лінійній теорії коефіцієнти α_1 і α_2 не залежать від амплітуд полів швидкості, а визначаються виключно магнітними параметрами D_1 і D_2 , числом Релея Ra та амплітудою зовнішньої сили f_0 . Замість використання декартових компонент D_1 і D_2 , для цих коефіцієнтів зручніше виразити їх через сферичні координати (D, ϕ, θ) . Тут координатна поверхня $D = \text{const}$ утворює сферу, де θ відповідає широті ($\theta \in [0, \pi]$), а ϕ позначає довготу ($\phi \in [0, 2\pi]$). У такому формулюванні параметри D_1 , D_2 і D_3 можна записати у вигляді: $D_1 = D \sin \theta \cos \phi$, $D_2 = D \sin \theta \sin \phi$, $D_3 = D \cos \theta$. Проаналізуємо залежність коефіцієнта посилення від широти θ і довготи ϕ (див. Рис. 2.33), зафіксувавши значення параметрів $D = 2$, $Pr = 1$, $Ra_1 = 0.15$, $\tilde{\xi} = 0.15$ і амплітуду. З Рис. 2.33 видно, що зі зростанням параметра стратифікації Ra максимальне значення коефіцієнта посилення α досягається при координатах: широта $\theta = \pi/2$ (екватор) і довгота $\phi = \pi/4$. Отже, в поточній постановці завдання генерація великомасштабних вихрових і магнітних полів неефективна на полюсах ($\theta = 0, \theta = \pi$) при $\alpha \rightarrow 0$. Тому всі наступні розрахунки будуть проводитися для широти $\theta = \pi/2$ і довготи $\phi = \pi/4$. Далі досліджуємо вплив зовнішнього магнітного поля D на коефіцієнт посилення або процес генерації великомасштабних збурень. Для цього ми вибрали значення числа Релея $Ra = 5$. На Рис. 2.34а показано, що при певному значенні параметра D коефіцієнт α досягає свого максимального значення. Зі збільшенням D спостерігається поступове зменшення коефіцієнта α , що свідчить про зменшення α -ефекту зовнішнім магнітним полем. Це явище відображає поведінку, яка також спостерігається в конвективних магнітогідродинамічних динамо. Зміна коефіцієнта посилення α при зміні параметра стратифікації температури плазми Ra при збереженні фіксованого

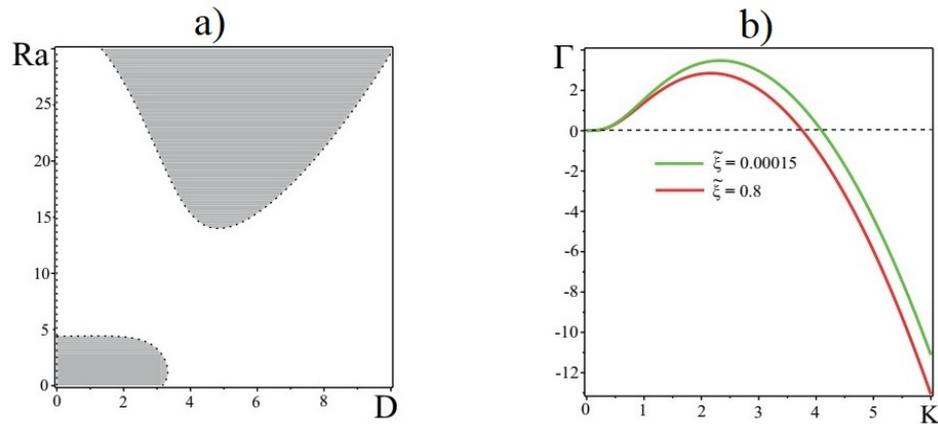


Рис. 2.35: а) Графік α на площині (D, Ra) , де область, що відповідає позитивним значенням α (нестійкі рішення), показана сірим кольором, а негативним значенням α – білим кольором; б) графіки показують залежність інкременту нестійкості Γ від хвильових чисел K для різних параметрів Нернста $\tilde{\xi} = 0.00015$ і $\tilde{\xi} = 0.15$ за $D = 2$ і $Ra = 5$.

значення $D = 3$ показана на Рис. 2.34б. З Рис. 2.34б очевидно, що α -ефект виникає і в однорідній плазмі ($Ra = 0$) під дією зовнішньої неспіральної сили та похилого магнітного поля. Зазначимо, що збільшення стратифікації температури призводить до значного збільшення коефіцієнта α , що веде до більш швидкої генерації великомасштабних вихрових і магнітних збурень. Однак, як тільки число Релея Ra продовжує зростати, значення коефіцієнта α зменшується, що в кінцевому підсумку призводить до виникнення типової конвективної нестійкості. Далі, фіксуючи значення параметрів D і Ra як $D = 2$ і $Ra = 5$, ми можемо дослідити зв'язок між коефіцієнтом посилення та параметром Нернста $\tilde{\xi}$. Як показано на рисунку 2.34с, зі збільшенням параметра $\tilde{\xi}$ коефіцієнт α зменшується. Це зниження можна пояснити ефектом Нернста, при якому частина теплової сили діє перпендикулярно векторам $\bar{\mathbf{V}}$ і $\partial_i T_0$, протидіючи руху електронної компоненти плазми і, як наслідок, зменшенню α . На Рис. 2.35а показаний графік, що ілюструє комбінований вплив зовнішнього магнітного поля та стратифікації у площині (D, Ra) . У цьому графіку область нестійкості ($\alpha > 0$) зафарбована сірим кольором. На Рис. 2.35б графічно представлена за-

лежність швидкості зростання Γ від хвильового числа K за формулою (2.100). Очевидно, що аналіз виразу (2.100), розглядаючи граничні випадки $K \ll 1$ і $K \gg 1$. Для випадку $K \ll 1$ максимальна швидкість зростання великомасштабних магніто-вихревих обурень $\Gamma_{max} = \frac{27}{256}(\alpha_1\alpha_2)^2$ досягається при хвильовому числі $K_{max} = \frac{3}{4}\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$. В іншому граничному випадку $K \gg 1$ для хвильових векторів K , що задовольняють нерівності $K < \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$, існує зростаюча мода ($\Gamma > 0$). У цьому режимі максимальна швидкість зростання нестійкості $\Gamma_{max} = \frac{1}{4}(\alpha_1\alpha_2)$ досягається при хвильовому числі $K_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$. Як видно із Рис. 2.35b, межі $K \gg 1$ і $K > \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ великомасштабні обурення згасають через в'язкість.

2.6.3 Стаціонарні нелінійні структури

Нелінійні ефекти починають проявлятися і стають суттєвими зі збільшенням амплітуди збурень. При цьому коефіцієнти нелінійного α -ефекту послаблюються, і система виходить на стаціонарний рівень. У стаціонарному режимі формуються нелінійні вихрові та магнітні структури. Для пошуку таких структур покладемо $\partial_T = 0$ в рівняннях (2.92)-(2.93) та (2.94)-(2.95) і проінтегруємо по Z . Для спрощення припустимо, що $\phi = \pi/4$ і $\theta = \pi/2$, тоді $D_1 = D_2 = \frac{D\sqrt{2}}{2}$, $D_3 = 0$. Для цього випадку, фіксуючи значення параметрів: $f_0 = 10$, $Ra = 5$, $D = 3$, $Pr = 1$, $\tilde{\xi} = Ra_1 = 0.15$, ми можемо чисельно визначити координати чотирьох фіксованих точок $E_{(1,2,3,4)}(W_1, W_2)$: $E_1(0.069, 0.045)$, $E_2(1.316, 1.291)$, $E_3(0.069, 1.291)$, $E_4(1.316, 0.045)$. У фазовому просторі ми можемо спостерігати лише два типи нерухомих точок: еліптичні та гіперболічні. У результаті аналізу ми класифікували чотири нерухоми точки як дві еліптичні (E_1, E_2) і дві гіперболічні (E_3, E_4). Фазовий портрет цієї динамічної системи за умови сталих $C_3 = -0.001$ і $C_6 = 0.001$ зображено на Рис. 2.36а. Фазовий портрет дозволяє якісно описати потенційні стаціонарні розв'язки. Замкнені траєкторії навколо еліптичних точок на фазовій площині,

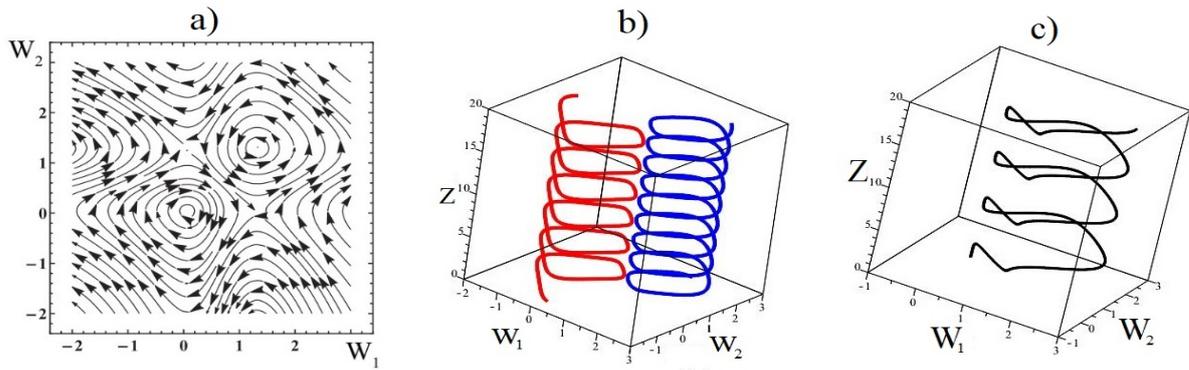


Рис. 2.36: а) Фазова площина стаціонарних рівнянь динамічної системи (2.92)-(2.93) з $C_3 = -0.001$ і $C_6 = 0.001$; б) стаціонарні рішення рівнянь (2.92)-(2.93) у вигляді нелінійних хвиль; с) спіральна вихрова структура при $W_1(0) = 0.069$, $W_2(0) = 1.291$.

показані на Рис. 2.36а, вказують на наявність нелінійних періодичних розв'язків або нелінійних хвиль. На Рис. 2.36б зображено нелінійну хвилю навколо нерухомої точки E_1 за початкових умов $W_1(0) = 0.069$, $W_2(0) = -1.447$ виділена червоним кольором, а нелінійна хвиля навколо нерухомої точки E_2 за початкових умов $W_1(0) = 1.316$, $W_2(0) = 2.447$ виділена синім кольором. На Рис. 2.36с показано приклад спіральної вихрової структури, отриманої чисельно за початкових умов: $W_1(0) = 0.069$, $W_2(0) = 1.291$.

Наразі перейдемо до дослідження розв'язків для локалізованих магнітних структур. Для цього зручно записати стаціонарні рівняння для компонентів магнітного поля (2.94)-(2.95) через компоненти струму, використовуючи визначення струму через великомасштабну швидкість руху електронів $\mathbf{J} = -\mathbf{W}$ разом із законом Ампера, вираженим таким чином: $\frac{dB_2}{dZ} = -J_1$, $\frac{dB_1}{dZ} = J_2$. Для цього випадку чисельно визначимо координати нерухомих точок: $\tilde{E}_1(-0.069, -0.045)$, $\tilde{E}_2(-1.316, -1.291)$, $\tilde{E}_3(-0.069, -1.291)$, $\tilde{E}_4(-1.316, -0.045)$. У попередньому випадку ми отримали чотири стаціонарні точки: дві еліптичні (\tilde{E}_1, \tilde{E}_2) та дві гіперболічні (\tilde{E}_3, \tilde{E}_4). Фазовий портрет динамічної системи за значень констант $\tilde{C}_2 = -0.001$ і $\tilde{C}_4 = -0.001$, показано на рис. 2.37а. Тут видно нелінійні періодичні розв'язки навколо еліптичних точок на фазовій площині. На рис. 2.37б

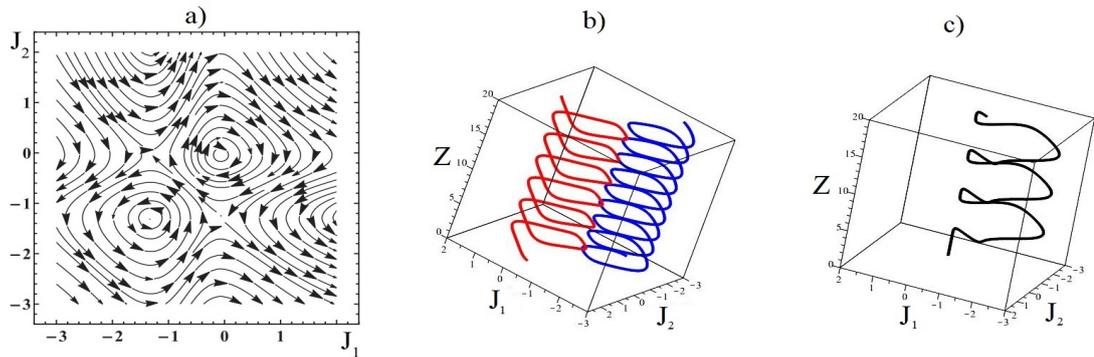


Рис. 2.37: а) Фазова площина рівнянь динамічної системи для струмів (J_1, J_2) з $\tilde{C}_2 = -0.001$ і $\tilde{C}_4 = -0.001$; б) стаціонарні магнітні структури у вигляді нелінійних хвиль; с) спіральна магнітна структура при $J_1(0) = -0.069$, $J_2(0) = -1.291$.

зображено стаціонарні розв'язки, що представляють локалізовані магнітні структури. Поблизу фіксованої точки \tilde{E}_1 магнітну структуру, визначену за початковими умовами $J_1(0) = -0.069$, $J_2(0) = -1.447$ виділено червоним кольором. Тим часом магнітна конфігурація навколо фіксованої точки \tilde{E}_2 з початковими умовами $J_1(0) = -1.316$, $J_2(0) = -2.447$ зображена синім кольором. На рис. 2.37с показано приклад спіральної магнітної структури, отриманої чисельно з рівнянь (2.94)-(2.95) за початкових умов: $J_1(0) = -0.069$, $J_2(0) = -1.291$.

2.7 Висновки до розділу 2

Наведемо основні результати, отримані у розділі 2.

1. Отримано замкнуту систему нелінійних рівнянь для вихрових і магнітних великомасштабних збурень (магніто-вихрове динамо) в електропровідному середовищі, що аксіально обертається, із зовнішньою дрібномасштабною спіральною силою. Показано, що на лінійній стадії генерація ВВС відбувається завдяки розвитку нестійкості ГД α -ефекту, а генерація ВМП через нестійкість МГД α -ефекту. Нестійкості обумовлені спільною дією дрібномасштабної зовнішньої сили та сили Коріоліса. Отримані стаціонарні рішення, що описують магнітні структури у вигляді періодичних нелінійних хвиль і кінків у середовищі з

кінцевою електропровідністю, що обертається. Для середовищ з дуже низькою електропровідністю отримано нелінійні стаціонарні рішення, що описують ВВС у вигляді спіральних кінків.

2. Отримана система нелінійних рівнянь магніто-вихрове динамо в електропровідній рідині, що похило обертається, із зовнішньою неспіральною силою. Встановлено, що генерація ВВС і ВМП на лінійній стадії виникає через нестійкість типу α -ефекту, необхідною умовою для виникнення цих нестійкостей є відхилення вектора кутової швидкості обертання Ω від вертикальної осі OZ . При цьому мінімальним значенням α відповідають широти $\theta \rightarrow 0$ або $\theta \rightarrow \pi$ (поблизу полюсів), а максимальним при $\theta \rightarrow \pi/2$ (поблизу екватора). Доведено існування великомасштабних регулярних та хаотичних вихрових та магнітних полів у стаціонарному режимі.

3. У рамках лінійної теорії багатомасштабних асимптотичних розкладів отримано рівняння еволюції для великомасштабних збурень у стратифікованій по температурі електропровідного середовища з дрібномасштабними спіральностями поля швидкості та магнітного поля.

4. Показано, що генерація ВВС і ВМП відбувається незалежно один від одного, в результаті розвитку нестійкостей ГД і МГД α -ефектів. Отримано інкременти відповідних нестійкостей. Встановлено, що за наявності дрібномасштабної спіральності поля швидкості та магнітного поля можливе існування двох нестійких мод, що виникають у певних областях параметрів. Одна мода має інкремент та нульову частоту. Проведено якісні оцінки лінійної стадії великомасштабної нестійкості для сонячних умов, які показують гарний збіг характерних масштабів та часів, що виникають гідродинамічних структур із раніше виявленими експериментально.

5. Отримано замкнуту самоузгоджену систему нелінійних рівнянь, яка описує нелінійну стадію наростання ВВС та ВМП у стратифікованому електропровідному середовищі. Показано можливість існування великомасштабних стаціонар-

них хаотичних вихрових та магнітних структур, а також регулярних стаціонарних магнітних структур типу нелінійної хвилі, кінку та солітону.

6. Отримано замкнуту систему нелінійних рівнянь для вихрових і магнітних великомасштабних збурень у стратифікованому середовищі, що похило обертається, із зовнішньою дрібномасштабною неспіральною силою. Встановлено, що без зовнішнього магнітного поля генерація ВВС та ВМП відбувається завдяки розвитку нестійкості типу ГД та МГД α -ефекту, а за наявності зовнішнього магнітного поля темпи зростання вихрових та магнітних великомасштабних збурень збігаються. При цьому «слабке» зовнішнє магнітне поле не перешкоджає генерації великомасштабних вихрових і магнітних збурень, а «сильне» пригнічує. У стратифікованих за температурою середовищах великомасштабні нестійкості типу α -ефекту реалізуються при малих числах Релея Ra . Доведено існування великомасштабних регулярних і хаотичних вихрових і магнітних стаціонарних структур у стратифікованих середовищах із зовнішньою дрібномасштабною неспіральною силою.

7. Отримано рівняння нелінійного вихрового та магнітного динамо в температурно-стратифікованій, повністю іонізованій плазмі за наявності похилого зовнішнього магнітного поля та постійного гравітаційного поля. Отримано нову великомасштабну нестійкість типу α -ефекту, що виникає в плоскому шарі температурно-стратифікованої плазми під дією зовнішнього однорідного магнітного поля, нахиленого відносно шару, у поєднанні з дрібномасштабною зовнішньою силою з нульовою спіральністю. Встановлено новий ефект, пов'язаний із впливом «замагніченої» складової теплової сили, відомий як ефект Нернста, на генерацію великомасштабних вихрових і магнітних збурень. Зі збільшенням параметра Нернста швидкість розвитку великомасштабної нестійкості зменшується.

Отримані в цьому розділі результати опубліковані у роботах [97, 99, 103–105, 112].

РОЗДІЛ 3

ТЕПЛОВА КОНВЕКЦІЯ В ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ
СЕРЕДОВИЩАХ, ЩО НЕОДНОРІДНО ОБЕРТАЮТЬСЯ, В
АКСІАЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Останнім часом у нелінійній фізиці інтенсивно досліджуються проблеми виникнення та подальшої еволюції дисипативних структур (або дисипативних систем). Термін «дисипативна структура», введений Пригожиним [113], означає стійкий стан, що виникає в нерівноважному середовищі за умови дисіпації (розсіювання) енергії, яка надходить ззовні. За певних фізичних умов у дисипативній системі можлива поява складної, найчастіше хаотичної структури. Для таких систем характерне невиконання теореми Ліувілля, тобто незбереження об'єму в фазовому просторі. Одним із найпоширеніших прикладів таких структур є осередки Бенара — виникнення впорядкованості у вигляді конвективних осередків у формі циліндричних валів або правильних шестигранних структур у шарі в'язкої рідини з вертикальним градієнтом температури, тобто який рівномірно підігрівається знизу [6, 40, 91]. Вже кілька десятиліть теоретично і експериментально досліджується вільна конвекція в шарах рідини або конвекція Релея-Бенара. Особливий інтерес викликають питання, пов'язані з впливом обертання та магнітного поля на конвекцію Релея-Бенара, наприклад, через їх необхідність врахування у теорії вихрового та магнітного динамо [52, 89, 90]. Конвекція, в якій вісь обертання середовища та однорідного магнітного поля збігаються з напрямком вектора гравітації, була добре вивчена [91, 95]. Для астрофізичних завдань також цікавий випадок, коли напрями осей обертання та магнітного поля перпендикулярні один до одного і перпендикулярні напрямку вектора гравітації. Така постановка проблеми відповідає конвекції в шарах рідини, розташованих в екваторіальній області об'єкта, що обертається, де істотна роль азимутального магнітного поля. Лінійна теорія такої конвекції була вперше побудована в [114, 115]. Лінійна теорія магнітної конвекції, що обертає-

ться, для довільного відхилення осей обертання і магнітного поля від вертикалі (поля тяжіння) була розвинута у роботі [116].

Наведені вище дослідження становлять лінійну теорію, яка дає інформацію про початок конвекції. Зрозуміло, що лінійні моделі не дають інформації про кінцеву амплітуду конвекції. Ця амплітуда виникає, коли відбувається взаємодія між декількома модами збурень. Тому важливо зрозуміти фізичний механізм нелінійних ефектів та кількісно оцінити тепло- та масоперенесення у термінах кінцевих амплітуд. До цього часу немає строгої нелінійної моделі, яка буде вирішена аналітично. В даний час, для побудови нелінійної теорії конвекції, широко використовується метод збурень, розроблений в [117]. У цій роботі показано, що первісне перенесення тепла конвекцією лінійно залежить від числа Релея, а потім при більш високих числах Релея перенесення тепла трохи відрізняється від лінійного випадку. Автори [4] називали цей процес слабонелінійним, де нелінійність залежала від лінійного випадку. Подальший розвиток слабонелінійної теорії конвекції отримала у роботах [4, 118–120]. У цих роботах слабонелінійний режим конвекції описувався автономним рівнянням Гінзбург-Ландау для кінцевої амплітуди.

Незважаючи на величезну кількість робіт з конвекції Релея-Бенара, існує ще деяка прогалина у дослідженні впливу неоднорідного (або диференціального) обертання на конвективні процеси. Інтерес до цих досліджень викликаний насамперед різними астрофізичними проблемами. Відомо, що більшість різних космічних об'єктів, таких як Юпітер, Сатурн, Сонце тощо, що складаються з щільних газів чи рідини, обертаються неоднорідно, тобто різні їх частини обертаються навколо загальної осі обертання з різною кутовою швидкістю. Диференціальне обертання спостерігається також у галактиках, акреційних дисках та кільцях планет. Крім того, такі великомасштабні вихрові структури, як тайфуни, циклони та антициклони тощо, також обертаються неоднорідно. Стійкість неоднорідного обертання ідеально провідного середовища в магнітному

полі було вперше розглянуто в роботі [121]. Там же показано, що слабе осьове магнітне поле дестабілізує азимутальне диференціальне обертання плазми, і при виконанні умови $d\Omega^2/dR < 0$ в бездисипативній плазмі виникає магніто-обертальна нестійкість (МОН) або стандартна МОН. Оскільки ця умова виконується і для кеплерівських течій $\Omega \sim R^{-3/2}$, то МОН є найімовірнішим джерелом турбулентності в акреційних дисках. Відкриття МОН дало поштовхом для численних теоретичних досліджень. Перші теоретичні дослідження, які стосувалися проблеми акреційних течій, проводилися у наближенні бездисипативної плазми з урахуванням радіальної теплової стратифікації [92], а також з урахуванням замагніченості теплових потоків [122]. Питання теорії стійкості плазми, яка диференційно-обертається в аксіальному магнітному полі з урахуванням дисипативних ефектів (в'язкість та омічна дисипація) детально обговорювалися у [123].

При дослідженні МОН диференціальне обертання середовища моделюється течією Куетта між двома циліндрами, що обертаються з різними кутовими швидкостями. Це виявляється зручним для реалізації лабораторних експериментів. У роботі [124] обговорюються різні моделі теплової конвекції в рідинах, що швидко обертаються, пронизані сильними магнітними полями. Особливу увагу приділено можливості того, що магнітне поле може підтримуватись дією динамо, а не зовнішніми електричними струмами. У [124] дається огляд двох моделей динамо. Це модель плоского шару Чайлдреса-Соварда [21] і кільцева модель (annulus model) Буссе [125]. Модель Чайлдреса-Соварда працює в конвективних пласких шарах рідини, розташованих в помірних і приполярних широтах космічного об'єкта. Для земного динамо модель Буссе працює в екваторіальних шарах, де істотна роль азимутального магнітного поля. Електропровідна рідина обертається в кільцевій ділянці, розташованій між твердим ядром та земною корою. Теорія цього процесу розвинена в роботах [125–127], де застосовувалася модель циліндрів, що обертаються. У цій теорії зовнішній циліндр

обертається з постійною кутовою швидкістю Ω_2 , а внутрішній залишається нерухомим $\Omega_1 = 0$. Конвективні течії (комірки Бенара) виникають у шарі рідини між циліндрами через різницю температур внутрішнього T_{in} і зовнішнього T_{out} циліндрів: $T_{out} > T_{in}$. Різниця висот внутрішнього h_1 та зовнішнього циліндрів h_2 призводить до аналогічного ефекту дії сили Коріоліса на β -площині. Модель Буссе також активно застосовувалася для вивчення поведінки гідромагнітних хвиль у магнітоконвекції, що обертається. В результаті дії β - ефекту в магнітоконвекції, що обертається виникає більш загальний тип хвиль Россбі, так звані магніто-теплові хвилі Россбі [128].

Наведений вище короткий огляд досліджень з проблем теорії магнітної конвекції та конвективного динамо показав, що в цих теоріях раніше не враховували ефект неоднорідного обертання середовища. Внаслідок прогресу нанотехнологій з'явилися об'єкти з розмірами менше ста нанометрів. Такі нанорозмірні об'єкти називаються наночастинками. Чой [22] запропонував суспендувати ці наночастинки в базову (або основну) рідину для покращення теплопровідності та конвективного теплообміну базової рідини. Буонджорно [24] докладно вивчив конвективне перенесення у нанорідинах і зосередився на поясненні додаткового збільшення теплопередачі, що спостерігається при конвективних потоках. Цзоу [25] використовував рівняння перенесення Буонджорно для вивчення виникнення конвекції в горизонтальному шарі, що рівномірно нагрівається знизу для нанорідини, і виявив, що завдяки броунівському руху і термофорезу наночастинок критичне число Релея значно нижче, ніж у звичайної рідини. Бхадаурія та Агарвал [129] та Ядав та ін. [83] розширили проблему теплової нестійкості, включивши член сили Коріоліса (обертання) до рівняння імпульсу для пористих та непористих матеріалів. Вони зробили висновок, що включення компонента сили Коріоліса робить всю систему стійкішою. Бхадаурія і Агарвал [129] провели нелінійне дослідження конвекції нанорідини в пористому шарі, що обертається, в рамках визначення числа Нуссельта. Чанд і Рана [130]

використали модель Дарсі-Брінкмана для дослідження впливу обертання на конвекцію нанорідини. Для стаціонарної конвекції ними було знайдено рівняння теплового числа Релея. Гупта та ін. в роботі [131] вивчали виникнення конвекції у горизонтальному шарі нанорідини у присутності вертикального магнітного поля і виявили, що стійкість збільшується зі збільшенням величини магнітного поля.

Течія електропровідної рідини в сильному магнітному полі може зазнавати істотного впливу ефекту струму Холла. Вплив струму Холла на теплову нестабільність горизонтального шару провідної рідини вивчали Шерман [132], Гупта [133], Палезе та Джорджеску [134], Рані та Томар [135]. Вплив ефекту Холла на магнітну конвекцію вивчалось в нанорідини [136, 137], пористому середовищі насиченою нанорідиною [138], в'язко-пружної несжимаемой рідини в пористому середовищі [139], в'язко-пружної рідини, що стискається в пористому середовищі [140]. У цих роботах показано, що ефект Холла може істотно впливати на розвиток магнітної конвекції, підвищуючи чи знижуючи поріг нестійкості. До цього часу дослідження магнітної конвекції в нанорідинах з урахуванням впливу струму Холла проводилися в плоскій геометрії завдання (декартова система координат). Тим часом у лабораторних експериментах важливу роль відіграють течії Куетта, що виникають між двома циліндрами, що обертаються з різними кутовими швидкостями. В цьому розділі розвивається ідея використання металевих нанорідин для лабораторного моделювання магніторотаційної нестійкості. Тут будуть розглянуті нові види гідромагнітних нестійкостей в шарі електропровідної нанорідини, що неоднорідно обертається, з урахуванням ефектів струму Холла, броунівської дифузії і термофорезу. Ці дослідження дозволили звернути увагу на ефект неоднорідного обертання середовища і його вплив на магнітну конвекцію. Роботи відображають новий підхід до теорії магнітної конвекції, що обертається, і підкреслюють важливість урахування неоднорідності обертання для повного розуміння процесів, що від-

буваються в рідинах з магнітним полем та обертанням.

3.1 Локальні нестійкості в замагнічену потоці, що обертається з температурною стратифікацією

В цьому розділі проведено дослідження локальних нестійкостей у потоках електропровідної рідини, що неоднорідно обертаються, за наявності постійного вертикального магнітного поля та градієнта температури в полі сили тяжіння [141]. У межах геометричної оптики (короткохвильовий наближення) отримано дисперсійне рівняння з урахуванням впливу слабкої температурної стратифікації, а також ефектів в'язкості, теплопровідності та омічної дисипації. Для цього рівняння проведено аналіз стійкості за допомогою критерію Льєнара-Шипара.

3.1.1 Основні рівняння еволюції малих збурень

Розглянемо динаміку течії електропровідної рідини (плазми), що неоднорідно обертається в постійному гравітаційному \mathbf{g} і магнітному полях \mathbf{B}_0 при постійному вертикальному градієнті температури $\nabla T_0 = \text{const} = -A_T \mathbf{e}$, тут $A_T > 0$ - постійний градієнт. Стаціонарну течію рідини з кутовою швидкістю обертання $\Omega(R)$, яка неоднорідно обертається моделюватимемо течією Куетта-Тейлора, між двома циліндрами

$$\Omega(R) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R^2 (R_2^2 - R_1^2)},$$

де $R_1 = R_{\text{in}}, R_2 = R_{\text{out}}, \Omega_1 = \Omega_{\text{in}}, \Omega_2 = \Omega_{\text{out}}$ - радіус і кутова швидкість обертання внутрішнього і зовнішнього циліндра, відповідно. Для опису руху в'язкої електропровідної рідини, що не стискується, використовуємо рівняння магнітної гідродинаміки в наближенні Буссинеска [40, 91]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla (P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi \rho_0} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{e} g \beta_T T + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \nabla^2 T \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.4)$$

де $\eta = c^2/4\pi\sigma$ – коефіцієнт магнітної в'язкості, σ – коефіцієнт електропровідності, χ – коефіцієнт теплопровідності середовища.

Вважаємо, що однорідне (постійне) магнітне поле \mathbf{B}_0 спрямоване вздовж осі OZ , яке далі називатимемо аксіальним у циліндричній системі координат (R, ϕ, z) . Напрямок магнітного поля збігається з віссю обертання рідини $\boldsymbol{\Omega} \parallel OZ$, яка обертається в азимутальному напрямку зі швидкістю $\mathbf{v}_0 = R\Omega(R)\mathbf{e}_\phi$. Стаціонарний стан системи задовольняє наступним рівнянням:

$$\Omega^2 R = \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dR}, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} = -g\beta_T T_0, \quad \frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0. \quad (3.5)$$

З рівняння (3.5) видно, що у радіальному напрямку встановлюється відцентрова рівновага, а у вертикальному – гідростатична. Основним нашим завданням є питання про стійкість малих збурень фізичних величин $(\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, \theta)$ на тлі стаціонарного стану (3.5). Представляючи всі величини в рівняннях (3.1)-(3.4) у вигляді суми стаціонарної та збуреної частин $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, ми отримаємо рівняння еволюції малих збурень у лінійному наближенні:

$$\begin{pmatrix} \partial_t - \nu \nabla^2 + \mathcal{U} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla & -\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \nabla}{4\pi\rho_0} & \mathbf{e}g\beta_T \\ -\mathbf{B}_0 \cdot \nabla & \partial_t - \eta \nabla^2 - \mathcal{U} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla & 0 \\ -A\mathbf{e} & 0 & \partial_t - \chi \nabla^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \\ \theta \end{pmatrix} = \\ = -\frac{\nabla}{\rho_0} \begin{pmatrix} p + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b}}{4\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

де введено позначення для матриці неоднорідного обертання \mathcal{U} [126]:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega + R \frac{d\Omega}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Збурені поля \mathbf{u} , \mathbf{b} також задовольняють умові соленоїдальності:

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.7)$$

Оскільки середовище стратифіковано за температурою і обертається з неоднорідною кутовою швидкістю, слід обґрунтувати застосування межі геометричної оптики на основі асимптотичного методу ВКБ.

3.1.2 Асимптотичний метод ВКБ, наближення геометричної оптики та дисперсійне рівняння

Розглянемо межу слабкої стратифікації середовища, коли просторовий масштаб неоднорідності середовища $L = \left(\frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dz} \right)^{-1}$ набагато перевищує характерний масштаб збурень (довжину хвилі) $\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$: $L \gg \lambda$. У короткохвильовій межі ($L \gg \lambda$) виконується наближення геометричної оптики, і тому всі обурені величини у формулах (3.6)-(3.7) можна вибрати у вигляді: $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + \gamma t)$, де γ - коефіцієнт посилення (або згасання) збурень. Дотримуючись робіт [142]- [143] наведемо обґрунтування короткохвильового наближення за допомогою асимптотичного методу ВКБ. Для цієї мети представимо рішення лінеаризованої системи рівнянь (3.6) у вигляді асимптотичного ряду за малим параметром ϵ ($0 < \epsilon \ll 1$):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \\ p \\ \theta \end{pmatrix} = e^{i\Phi(\mathbf{x},t)/\epsilon} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \dots \\ \mathbf{b}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \dots \\ p^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon p^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \dots \\ \theta^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \theta^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \dots \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

де $\mathbf{x} = (R, \phi, z)$ - циліндричні координати, записані у векторному вигляді; $\Phi(\mathbf{x}, t)$ - скалярна функція, яка має назву фази (або ейконалу) осциляцій збурених величин; $\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{b}^{(n)}, \theta^{(n)}, p^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) - амплітуди збурень. Дисипативні процеси, під час використання асимптотичного розкладання (3.8), впливають у другому порядку по ϵ [142]- [143], тобто $\nu = \epsilon^2 \tilde{\nu}, \eta = \epsilon^2 \tilde{\eta}, \chi = \epsilon^2 \tilde{\chi}$. Для зручності введемо позначення похідної вздовж ліній струму рідини:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla.$$

Підставляючи розкладання (3.8) в систему рівнянь (3.6), отримуємо систему локальних диференціальних рівнянь для ϵ^{-1} і ϵ^0 порядків. Як показано в роботі [141], наближення геометричної оптики добре виконується для осесиметричних збурень, тому збурення $\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{b}^{(0)}, \theta^{(0)}, p^{(1)}$ можуть бути представлені у вигляді плоских хвиль

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{b}^{(0)} \\ \theta^{(0)} \\ p^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{H} \\ \Theta \\ P \end{pmatrix} \exp(\gamma t + ik_R R + ik_z z) \quad (3.9)$$

В результаті застосування (3.9) ми отримали два дисперсійні рівняння наступного виду:

$$(\gamma + \omega_\nu)(\gamma + \omega_\eta) + \omega_A^2 = 0 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} (\gamma + \omega_\chi) [((\gamma + \omega_\nu)(\gamma + \omega_\eta) + \omega_A^2)^2 + \xi^2 \kappa^2 ((\gamma + \omega_\eta)^2 + \omega_A^2) - 4\Omega^2 \xi^2 \omega_A^2] - \\ - N_A^2 (1 - \xi^2)(\gamma + \omega_\eta) [(\gamma + \omega_\nu)(\gamma + \omega_\eta) + \omega_A^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Дисперсійне рівняння (3.10) описує згасання альфвенівських хвиль у плазмі з в'язкою та омічною дисипацією. У цьому рівнянні немає впливу обертання та температурної стратифікації на інкремент збурень, тому ми почнемо аналіз дисперсійного рівняння (3.11). В отриманому нами дисперсійному рівнянні (3.11)

враховано теплову дисипацію (члени з ω_χ) і вертикальну стратифікацію (члени з N_A) за температурою в полі тяжкості. Проведемо аналіз стійкості на основі дисперсійного рівняння (3.11), записавши його у вигляді полінома п'ятого ступеня щодо γ :

$$P(\gamma) \equiv a_0\gamma^5 + a_1\gamma^4 + a_2\gamma^3 + a_3\gamma^2 + a_4\gamma + a_5 = 0, \quad (3.12)$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ відповідні коефіцієнти. Застосовуючи критерій Льенара-Шипара асимптотичної стійкості до збурень, що описуються алгебраїчним рівнянням (3.12), встановлено, що в'язка, омічна та теплопровідна дисипація справді сприяють стабілізації течій плазми. Стабілізуючими чинниками також є однорідне магнітне поле (альфвенівський ефект), неоднорідне обертання за профілем кутової швидкості, близьким до $\Omega(R) \sim R^{-2}$ (при $\kappa^2 > 0$), а також температурний градієнт за умови $A_T < 0$.

3.2 Задача Релея-Бенара для тонкого шару замагніченої плазми, що неоднорідно обертається

У цьому розділі побудована лінійна і слабонелінійна теорія конвективної нестійкості електропровідної рідини, що неоднорідно обертається в постійному вертикальному магнітному полі [141]. Розв'язано задачу Релея-Бенара для шару електропровідної рідини, розташованого між двома обертаючимися циліндрами, який підігрівається знизу. Використовуючи вільні граничні умови, було отримано дисперсійне рівняння, за допомогою якого досліджувалися монотонні та коливальні режими конвекції. В результаті були знайдені критичні значення чисел Релея для стаціонарної та коливальної конвективної нестійкості. Проведено аналіз розвитку цих нестійкостей для різних профілів кутової швидкості обертання $\Omega(R)$. Застосовуючи метод теорії збурень за малим параметром надкритичності стаціонарного числа Релея $\varepsilon = \sqrt{(\text{RaRa}_c)/\text{Ra}_c}$, отримано нелінійне рівняння типу Гінзбурга-Ландау, що описує еволюцію кінцевої амплітуди

збурень. Використовуючи аналітичне рішення, отримане з рівняння Гінзбурга-Ландау, досліджено залежність нестационарного теплоперенесення (числа Нуссельта Nu) від профілю кутової швидкості обертання електропровідної рідини (числа Россбі Ro).

3.2.1 Загальне дисперсійне рівняння

Систему рівнянь (3.6) будемо застосовувати для опису конвективних явищ в тонкому шарі провідного середовища (плазми) товщини $h \ll (R_{out} - R_{in})$, який неоднорідно обертається. Температуру нижньої частини шару позначимо через T_d , а верхньої - T_u , причому $T_d > T_u$ - підігрів знизу. Така постановка завдання узагальнює класичну проблему Релея-Бенара для вільної конвекції. Для цього завдання характерний масштаб неоднорідності середовища в горизонтальній площині більше, ніж у вертикальному напрямі $L_R \gg L_h$. Тому ми зможемо застосувати локальний метод ВКБ для збурень, що залежать від горизонтальних координат (R, ϕ) . Розкладемо всі величини в ряд Тейлора в околиці фіксованих точок (R_0, ϕ_0) , залишаючи члени нульового порядку за локальними координатами $\tilde{R} = R - R_0$, $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$. В результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь (3.6) з постійними коефіцієнтами. Обмежимося дослідженням осесиметричних збурень $\partial/\partial\phi = 0$. Тоді всі збурення у системі рівнянь (3.6) представимо у вигляді плоских хвиль

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \\ \theta \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{H}(z) \\ \Theta(z) \\ \tilde{P}(z) \end{pmatrix} \exp(\gamma t + ik\tilde{R}) \quad (3.13)$$

після чого, у короткохвильовому наближенні $k \gg \frac{1}{R_0}$, нехтуючи членами $\frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2}$, знаходимо дисперсійне рівняння

$$\text{Ra} = \frac{\Gamma_\chi(a^2\Gamma_A^4 + \pi^2\text{Ta}(1 + \text{Ro})\Gamma_\eta^2 + \pi^4\text{Ha}^2\text{TaRoPm})}{k^2\Gamma_\eta\Gamma_A^2} \quad (3.14)$$

де введено позначення

$$\Gamma_A^2 = (\gamma + a^2)(\gamma\text{Pm} + a^2) + \pi^2\text{Ha}^2, \quad \Gamma_\chi = \gamma\text{Pr} + a^2, \quad \Gamma_\eta = \gamma\text{Pm} + a^2, \quad a^2 = \pi^2 + k^2.$$

Без урахування теплових процесів, тобто коли немає підігріву $\text{Ra} = 0$, рівняння (3.14) збігається з дисперсійним рівнянням для стандартної МОН (SMRI) з урахуванням дисипативних процесів [142]. Порогове значення гідродинамічного числа Россбі Ro визначається з умови $\gamma = 0$ і має вигляд:

$$\text{Ro}_{\text{cr}} = -\frac{a^2(a^4 + \pi^2\text{Ha}^2)^2 + \pi^2a^4\text{Ta}}{\pi^2\text{Ta}(a^4 + \pi^2\text{Ha}^2\text{Pm})}.$$

При переході до розмірних змінних

$$\frac{\pi^2\text{Ha}^2}{a^4} \rightarrow \frac{\omega_A^2}{\omega_\nu\omega_\eta}, \quad \frac{\pi^2\text{Ha}^2\text{Pm}}{a^4} \rightarrow \frac{\omega_A^2}{\omega_\eta^2}, \quad \frac{\text{Ta}}{a^4} \rightarrow \frac{4\Omega^2}{\omega_\nu^2}, \quad \frac{\pi^2}{a^2} \rightarrow \xi^2$$

знаходимо вираз для Ro_{cr} [142]:

$$\text{Ro}_{\text{cr}} = -\frac{(\omega_A^2 + \omega_\nu\omega_\eta)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_\eta^2}{4\Omega^2\xi^2(\omega_A^2 + \omega_\eta^2)},$$

тут введені позначення для в'язкісної $\omega_\nu = \nu k^2$, омічної $\omega_\eta = \eta k^2$ частоти, ω_A – альфвенівська частота: $\omega_A^2 = k_z^2 c_A^2 = \frac{k_z^2 B_0^2}{4\pi\rho_0}$.

Таким чином, у граничному випадку $\text{Ra} = 0$, виникає магнітообертальна нестійкість (МОН). Критерієм її виникнення є умова на профіль кутової швидкості обертання рідини $\Omega(R)$, тобто числа Россбі $\text{Ro} > \text{Ro}_{\text{cr}}$.

3.2.2 Монотонний та коливальний режими конвекції

Перейдемо до дослідження загального випадку, коли є нагрівання шару рідини $Ra \neq 0$ та його неоднорідне обертання $Ro \neq 0$. Розглянемо конвективну течію в плоскому шарі, що неоднорідно обертається, у вигляді валів (осередків). Величина швидкості зростання збурень γ у загальному випадку є комплексною $\gamma = \gamma_r + i\omega_i$. Зрозуміло, що система стійка, якщо $\gamma_r < 0$, і нестійка, якщо $\gamma_r > 0$. Перейдемо до визначення межі стійкості для монотонних ($\omega_i = 0$) і коливальних обурень ($\omega_i \neq 0$). На межі стійкості (нейтральні стани) $\gamma_r = 0$, тому, зробивши в рівнянні (3.14) заміну $\gamma = i\omega_i$, знаходимо:

$$Ra = Ra_r + i\omega_i Ra_i, \quad (3.15)$$

Оскільки величина Ra є дійсною, тоді уявна частина (3.15) повинна звертатися в нуль. При цьому можлива наступна ситуація $\omega_i = 0$ або $Ra_i = 0$.

3.2.2.1 Стаціонарний режим конвекції

Розглянемо випадок $\omega_i = 0$. В результаті отримуємо критичне значення числа Релея Ra_c для монотонних чи стаціонарних збурень:

$$Ra_{st} = \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2} + \frac{\pi^2(\pi^2 + k^2)Q}{k^2} + \frac{\pi^2(\pi^2 + k^2)^2 Ta}{k^2((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 Ta Ro ((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q Pm)}{k^2((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q)} \quad (3.16)$$

Мінімальне значення критичного числа Релея знаходиться з умови $\partial Ra_{st} / \partial k = 0$ і відповідає хвильовим числам $k = k_c$, які відповідають наступному рівнянню:

$$\frac{2k_c^2 - \pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4 Q}{k_c(\pi^2 + k_c^2)^2} + \frac{2\pi^2 k_c Ta(1 + Ro)}{(\pi^2 + k_c^2)((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)} - \frac{\pi^2 Ta((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2(\pi^2 + k_c^2))}{k_c((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2}$$

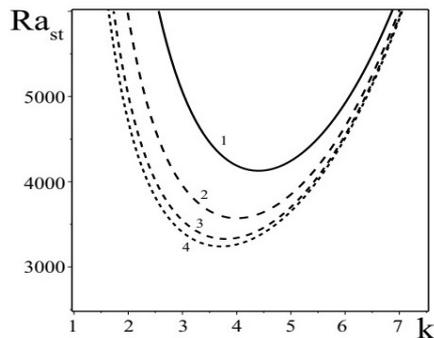


Рис. 3.1: Залежність стаціонарного числа Релея R_{st} від хвильових чисел k при постійних параметрах $Q = 150$, $Ta = 500$, $Pm = 1$: крива 1 – $Ro = 2$, крива 2 – $Ro = 0$, крива 3 – $Ro = -3/4$, крива 4 – $Ro = -1$.

$$\frac{\pi^2 Ta Ro ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q Pm) ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2 (\pi^2 + k_c^2))}{k_c (\pi^2 + k_c^2)^2 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} = 0$$

Число Ra_{st}^{\min} на графіку Рис. 3.1 відповідає точці на нейтральній кривій, що розділяє області стійких і нестійких збурень. Тут видно, що зі зростанням позитивного профілю числа Россбі Ro мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} також зростає, тобто підвищується поріг розвитку нестійкості. З іншого боку, для негативних профілів обертання: кеплерівського ($Ro = -3/4$) і релеевського ($Ro = -1$) спостерігаємо зменшення критичного числа Релея, тобто нижчий поріг розвитку нестійкості порівняно з випадками однорідного ($Ro = 0$) і неоднорідного ($Ro = 2$) обертання. У разі однорідного обертання ($Ro = 0$) критичне число Релея (3.16) було обчислено Чандрасекаром [40].

Введемо позначення для z -компоненти вихору $\xi = (\text{rot}\mathbf{U})_z = ikU_\phi$, струму $\zeta = (\text{rot}\mathbf{H})_z = ikH_\phi$ та z -компоненти швидкості $W = U_z$. У контексті цих змінних було отримано стаціонарні розв'язки для гідродинамічних (W, ξ) та магнітних (H_z, ζ) полів, які описують стаціонарні конвективні структури з нетривіальною топологією. Рухи рідини, викликані конвективними явищами в провідному середовищі, що неоднорідно обертається ($Pm \neq 0$), можуть мати ненульову спіральність. Покажемо це, обчисливши гідродинамічну \mathcal{H}_g і стру-

мову \mathcal{H}_c спіральності в циліндричному шарі, що обертається:

$$\mathcal{H}_g = 2\pi \int_{R_{in}}^{R_{out}} \int_0^1 W \cdot \xi R dR dz = -\frac{\pi\sqrt{T_1} (1 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) \text{Pm}W_0^2}{2 \text{Pr} ((1 + (R_{out} - R_{in})^{-2})^2 + Q_1)} \cdot (R_{out}^2 - R_{in}^2) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= 2\pi \int_{R_{in}}^{R_{out}} \int_0^1 H_z \cdot \zeta R dR dz = \\ &= \frac{\pi\sqrt{T_1} [(1 + \text{Ro})(1 + (R_{out} - R_{in})^{-2})^2 + Q_1 \text{PmRo}] \text{Pm}W_0^2}{2 \text{Pr}(1 + (R_{out} - R_{in})^{-2})^2 ((1 + (R_{out} - R_{in})^{-2})^2 + Q_1)} \cdot (R_{out}^2 - R_{in}^2) \quad (3.18) \end{aligned}$$

Вирази (3.17)-(3.18) отримані для великомасштабних мод з $k = \pi/(R_{out} - R_{in})$. Спіральності \mathcal{H}_g і \mathcal{H}_c ми вирахували для детермінованих полів (швидкості та магнітного поля) стаціонарної валикової конвекції за усереднення по всьому об'єму шару. Як видно з формул (3.17)-(3.18), струмова спіральність \mathcal{H}_c має протилежний знак з гідродинамічної \mathcal{H}_g спіральністю, і тим самим стабілізує роботу динамо, обумовленого генерацією гідродинамічної спіральності обертанням електропровідної рідини. Гідродинамічна спіральність відіграє важливу роль у виникненні α - ефекту, завдяки якому генеруються великомасштабні магнітні та вихрові поля (див. наприклад [52]). Оцінки коефіцієнта α для умов конвективної зони Сонця становлять від кількох см/с до 10^4 см/с, що вказує на велику міру невизначеності при перенесенні результатів розрахунків моделей динамо на реальні сонячні умови [148, 149]. Проте астрономічні спостереження [150] свідчать про те, що конвективна зона Сонця має помітну впорядкованість, а саме розвинену осередкову структуру різного масштабу. У роботі [149] проводилося чисельне моделювання осередкових течій, які схожі на реально спостерігаються, що дозволило безпосередньо розрахувати середню спіральність поля швидкостей. Усереднення спіральності в цій роботі вироблялося за об'ємом, а не по ансамблю реалізацій, оскільки поле швидкостей за такої постановки задачі є детермінованим.

Дослідження спіральності таких квазіупорядкованих конвективних течій

може зменшити розкид в оцінках, що використовуються теорією динамічних полів. Такий підхід дозволяє краще враховувати впорядковану структуру течій, що може бути важливим фактором при розгляді динаміки плазми в зорях та інших астрофізичних об'єктах.

3.2.2.2 Коливальний режим конвекції

В разі коливального збурення з $\omega_i \neq 0$ (а $\text{Ra}_i = 0$) ми можемо знаходити критичне число Релея для коливальної нестійкості. Вираз для критичного числа Релея Ra_{ci} отримуємо з рівняння (3.15) підставивши $\text{Ra}_i = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Ra}_{\text{osc}} &= \frac{a^2}{k^2(a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2)} \times \\ &\times [(a^4 + \pi^2 \text{Q} - \omega^2 \text{Pm})(a^4 + \omega^2 \text{Pm} \text{Pr}) - \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})(\text{Pr} - \text{Pm})] + \\ &+ \pi^2 \text{Ta}(1 + \text{Ro}) \cdot \frac{(a^4 - \omega_i^2 \text{Pm} \text{Pr})(a^4 + \pi^2 \text{Q} - \omega^2 \text{Pm}) + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})(\text{Pm} + \text{Pr})}{k^2((a^4 + \pi^2 \text{Q} - \omega^2 \text{Pm})^2 + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})^2)} + \\ &+ \pi^4 \text{QTaRoPm} \cdot \frac{(a^4 + \omega^2 \text{Pm} \text{Pr})(a^4 + \pi^2 \text{Q} - \omega^2 \text{Pm}) + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})(\text{Pr} - \text{Pm})}{k^2(a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2)((a^4 + \pi^2 \text{Q} - \omega^2 \text{Pm})^2 + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})^2)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

і частоту нейтральних коливань $\omega = \omega_i$, що задовольняє наступному рівнянню:

$$K_0(\omega^6) + K_1(\omega^4) + K_2(\omega^2) + K_3 = 0,$$

де

$$\begin{aligned} K_0 &= \text{Pm}^4(1 + \text{Pr}), \\ K_1 &= (a^4(1 + \text{Pm}) + (\text{Pr} - \text{Pm})(a^4 + \pi^2 \text{Q}))\text{Pm}^2 + \text{Pm}^2(1 + \text{Pr})(a^4(1 + \text{Pm})^2 - \\ &\quad - 2\text{Pm}(a^4 + \pi^2 \text{Q})) + \frac{\pi^2}{a^2} \text{Ta}(1 + \text{Ro})\text{Pm}^4(\text{Pr} - 1), \\ K_2 &= (a^4(1 + \text{Pm}) + (\text{Pr} - \text{Pm})(a^4 + \pi^2 \text{Q}))(a^4(1 + \text{Pm})^2 - \\ &\quad - 2\text{Pm}(a^4 + \pi^2 \text{Q})) + \text{Pm}^2(1 + \text{Pr})(a^4 + \pi^2 \text{Q})^2 + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{a^2} \text{Ta}(1 + \text{Ro}) (a^4 \text{Pm}^2(\text{Pr} - 1) + (a^4 + \pi^2 \text{Q})(\text{Pr} + \text{Pm})\text{Pm} - a^4(1 + \text{Pm})\text{Pm}) - \end{aligned}$$

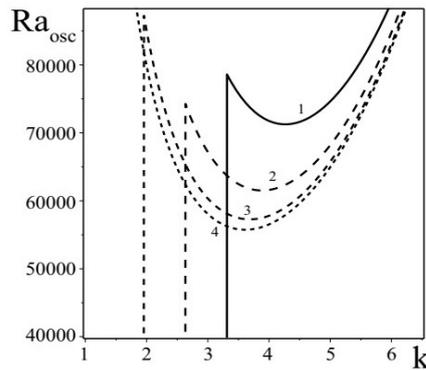


Рис. 3.2: Криві нейтральної стійкості (k, Ra_{osc}) коливальної конвекції при постійних параметрах $Q = 150$, $Ta = 500$, $Pm = 1$: крива 1 – $Ro = 2$, крива 2 – $Ro = 0$, крива 3 – $Ro = -3/4$, крива 4 – $Ro = -1$.

$$-\frac{\pi^4}{a^2} Q Ta Ro Pm (2Pm Pr + Pm^2 (Pr - 1)),$$

$$K_3 = (a^4(1 + Pm) + (Pr - Pm)(a^4 + \pi^2 Q))(a^4 + \pi^2 Q)^2 + \frac{\pi^2}{a^2} Ta(1 + Ro)a^4 \times$$

$$\times ((Pr + Pm)(a^4 + \pi^2 Q) - a^4(1 + Pm)) + \frac{\pi^4}{a^2} Q Ta Ro Pm ((Pr - Pm)(a^4 + \pi^2 Q) -$$

$$- a^4(1 + Pm)).$$

Формула (3.19), у деяких граничних випадках, містить відомі результати. Наприклад, для випадку однорідного обертання ($Ro = 0$) і не електропровідної рідини ($\sigma = 0$), Чандрасекаром [40] було отримано вираз для критичного числа Релея коливальної нестійкості:

$$Ra_{osc} = \frac{1}{k^2} \left[a^6 - \omega^2 a^2 Pr + \frac{\pi^2 Ta (a^4 + \omega^2 Pr)}{a^4 + \omega^2} \right].$$

За відсутності обертання ($Ta = 0, Ro = 0$), у замагніченій провідній рідині $Q \neq 0$, критичне число Релея Ra_{osc} для коливальної конвекції було отримано Чандрасекаром [40]:

$$Ra_{osc} = \frac{a^2}{k^2} \left[a^4 - \omega^2 Pr + \frac{\pi^2 Q (a^4 + \omega^2 Pr Pm)}{a^4 + \omega^2 Pm^2} \right].$$

Рис. 3.2 показана залежність критичного числа Релея Ra_{osc} для коливальної нестійкості від хвильових чисел π/k при різних профілях неоднорідного обертання. З графіка видно, що з негативних числах Россбі $Ro < 0$ граничне число Релея Ra_{min}^{osc} знижується.

3.2.3 Слабонелінійна теорія конвективної нестійкості

Для опису нелінійних конвективних явищ в шарі електропровідної рідини, що неоднорідно обертається, зручно перейти від циліндричної системи координат (R, φ, z) до локальної декартової (X, Y, Z) . Якщо розглянути фіксовану область шару рідини з радіусом R_0 і кутовою швидкістю обертання $\Omega_0 = \Omega(R_0)$, то координати $X = R - R_0$ відповідають радіальному напрямку, $Y = R_0(\varphi - \varphi_0)$ – азимутальному і $Z = z$ – вертикальному. У цьому випадку неоднорідне обертання шару рідини локально можна представити вигляді обертання з постійною кутовою швидкістю Ω_0 і азимутальним широм [151], профіль швидкості якого локально лінійний: $\mathbf{U}_0 = -q\Omega_0 X \mathbf{e}_y$, де $q \equiv -d \ln \Omega / d \ln R$ – безрозмірний шировий параметр, що визначається з профілю кутової швидкості обертання $\Omega(R) = \Omega_0 (R/R_0)^{-q}$. Шировий параметр q пов'язаний з гідродинамічним числом Россбі $Ro = \frac{R}{2\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial R}$ співвідношенням: $q = -2Ro$. Зазначимо, що акреційні диски з шировим параметром $q = 3/2$ ($Ro = -3/4$) відповідають Кеплерівському диску, $q = 2$ ($Ro = -1$) відповідає диску з постійним кутовим моментом або релеєвським профілем обертання. Випадок $q = 1$ ($Ro = -1/2$) відповідає системі з плоскою кривою обертання, а для $q = 0$ ($Ro = 0$) – однорідному (або твердотільному) обертанню з постійною кутовою швидкістю. Рівняння для обурень швидкості \mathbf{u} , магнітного поля \mathbf{b} і температури θ в локальній декартовій системі координат набувають наступного вигляду [141]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - q\Omega_0 X \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Y} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U}_0 + 2\Omega_0 \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = & -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{4\pi\rho_0} ((\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b}) + \\ & + g\beta\theta \mathbf{e} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - q\Omega_0 X \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial Y} - (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{U}_0 + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{u} = \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - q\Omega_0 X \frac{\partial \theta}{\partial Y} + (\mathbf{u} \nabla) T_0 + (\mathbf{u} \nabla) \theta = \chi \nabla^2 \theta$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0,$$

де тиск \tilde{p} включає збурений магнітний тиск

$$p_m = \frac{\mathbf{b}^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{b} \mathbf{B}_0}{4\pi}, \quad \tilde{p} = p + p_m.$$

Ми будемо розглядати динаміку осесиметричних збурень, коли всі збурені величини в рівняннях (3.20) залежатимуть лише від двох змінних (X, Z) . В цьому випадку векторні поля \mathbf{u} і \mathbf{b} зручно уявити через скалярні функції струму ψ та ϕ . В рівняннях (3.20) для зручності перейдемо до безрозмірних змінних, які відзначимо значком «зірочка»

$$(X, Z) = h(x^*, z^*), \quad t = \frac{h^2}{\nu} t^*, \quad \psi = \chi \psi^*, \quad \phi = h B_0 \phi^*,$$

$$v = \frac{\chi}{h} v^*, \quad \tilde{v} = B_0 \tilde{v}^*, \quad \theta = Ah \theta^*,$$

і виконуючи нескладні математичні дії, отримаємо систему нелінійних рівнянь для магнітоконвекції, що неоднорідно обертається:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \psi \right) \nabla^2 \psi + \sqrt{\operatorname{Ta}} \frac{\partial v}{\partial z} - \operatorname{Pr} \operatorname{Pm}^{-1} \operatorname{Q} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - \operatorname{Ra} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\ & = \operatorname{Pr} \operatorname{Pm}^{-1} \operatorname{Q} J(\phi, \nabla^2 \phi) - \operatorname{Pr}^{-1} J(\psi, \nabla^2 \psi), \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) v - \sqrt{\operatorname{Ta}} (1 + \operatorname{Ro}) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \operatorname{Pr} \operatorname{Pm}^{-1} \operatorname{Q} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \\ & = \operatorname{Pr} \operatorname{Pm}^{-1} \operatorname{Q} J(\phi, \tilde{v}) - \operatorname{Pr}^{-1} J(\psi, v), \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{Pm}^{-1} \nabla^2 \right) \phi - \operatorname{Pr}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\operatorname{Pr}^{-1} J(\psi, \phi), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{Pm}^{-1} \nabla^2 \right) \tilde{v} - \operatorname{Pr}^{-1} \frac{\partial v}{\partial z} + \operatorname{Ro} \sqrt{\operatorname{Ta}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \operatorname{Pr}^{-1} (J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v})),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pr}^{-1}\nabla^2\right)\theta - \text{Pr}^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\text{Pr}^{-1}J(\psi, \theta).$$

У рівняннях (3.21) опущено значок «зірочка». За відсутності теплових явищ система рівнянь (3.21) застосовувалася для дослідження нелінійного механізму насичення стандартної МОН [152]. Систему рівнянь (3.21) доповнимо наступними граничними умовами:

$$\begin{aligned} \psi = \nabla^2\psi = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \frac{d\phi}{dz} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ \psi = \nabla^2\psi = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \frac{d\phi}{dz} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В слабонелінійній теорії конвективної нестійкості взаємодію малих амплітуд конвективних осередків можна описати в такий спосіб. Нехай мала амплітуда конвективних осередків має порядок $O(\epsilon^1)$, тоді взаємодія осередків один з одним призводить до другої гармоніки і нелінійності порядку $O(\epsilon^2)$, а потім до нелінійності $O(\epsilon^3)$ і т.д. При цьому нелінійні члени в рівняннях (3.21) розглядаються як обурений відгук лінійної конвекції. У цьому випадку параметр Релея Ra , який контролює конвекцію, близький до критичного Ra_c . Так як вплив нестійких мод малий, то наше завдання полягає в тому, щоб отримати рівняння, що описують взаємодії цих мод. Загальна схема побудови слабонелінійної теорії полягає в наступному. Оскільки малим параметром нашої задачі є відносне відхилення числа Релея Ra від критичного значення Ra_c :

$$\epsilon^2 = \frac{\text{Ra} - \text{Ra}_c}{\text{Ra}_c} \ll 1,$$

всі обурені величини \mathbf{U} у рівняннях типу $\mathcal{L}\mathbf{U} = -N(\mathbf{U}|\mathbf{U})$ ($N(\dots)$ – нелінійні члени) представляються у вигляді ряду теорії збурень

$$\mathbf{U} \rightarrow \epsilon\mathbf{U}^{(1)} + \epsilon^2\mathbf{U}^{(2)} + \epsilon^3\mathbf{U}^{(3)} + \dots$$

Рівняння для збурень у різних порядках по ϵ набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\epsilon^1 : \mathcal{L}^{(0)}\mathbf{U}^{(1)} &= 0, \\ \epsilon^2 : \mathcal{L}^{(0)}\mathbf{U}^{(2)} &= -N(\mathbf{U}^{(1)}|\mathbf{U}^{(1)}), \\ \epsilon^3 : \mathcal{L}^{(0)}\mathbf{U}^{(3)} &= -\mathcal{L}^{(2)}\mathbf{U}^{(0)} - N(\mathbf{U}^{(1)}|\mathbf{U}^{(2)}) - N(\mathbf{U}^{(2)}|\mathbf{U}^{(1)}).\end{aligned}$$

Умова розв'язності цього ланцюжка нелінійних рівнянь відома як альтернатива Фредгольму (Fredholm's alternative) (див. наприклад, [153])

$$\langle \mathbf{U}^\dagger, RH \rangle = 0. \quad (3.23)$$

Тут \mathbf{U}^\dagger нетривіальне рішення лінійної самоспряженої задачі $\mathcal{L}^\dagger \mathbf{U}^\dagger = 0$, де \mathcal{L}^\dagger - самоспряжений (self-adjoint) оператор, який визначається з наступного співвідношення

$$\langle \mathbf{U}^\dagger, \mathcal{L}\mathbf{U} \rangle \equiv \langle \mathcal{L}^\dagger \mathbf{U}^\dagger, \mathbf{U} \rangle, \quad (3.24)$$

де \langle, \rangle - внутрішній добуток, який тут має наступне визначення :

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^{2\pi/k_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, dx dz,$$

де $R.H.$ - праві частини збурених рівнянь із нелінійними членами. Застосуємо ці загальні принципи розв'язання нелінійних рівнянь до нашого випадку. Для простоти враховуватимемо нелінійні члени в (3.21) тільки в рівнянні теплового балансу. У третьому порядку за ϵ ми отримали нелінійне рівняння для амплітуди $A(\tau)$, яке відповідає рівнянню Гінзбурга-Ландау з постійними коефіцієнтами:

$$\mathcal{A}_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - \mathcal{A}_2 A + \mathcal{A}_3 A^3 = 0 \quad (3.25)$$

Тут постійні коефіцієнти $\mathcal{A}_{1,2,3}$ мають вигляд

$$\mathcal{A}_1 = \frac{a^2}{\text{Pr}} + \frac{k_c^2 \text{Ra}_c}{a^4} - \frac{\pi^2 \text{QPm}}{a^2 \text{Pr}} - \frac{\pi^2 \text{Ta} \left((1 + \text{Ro})a^4 + \pi^2 \text{QPm}(\text{RoPm} - 1) \right)}{(a^4 + \pi^2 \text{Q})^2 \text{Pr}}$$

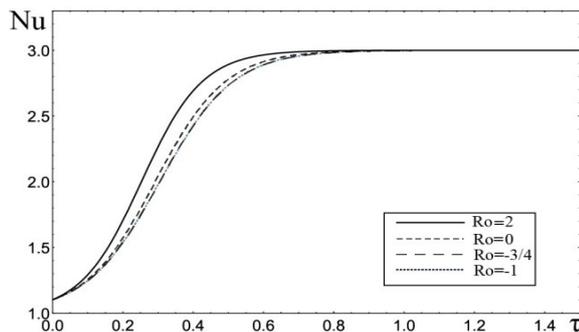


Рис. 3.3: Залежність числа Нуссельта Nu від часу τ для різних значень чисел Россбі Ro при постійних параметрах : $Q_1 = 80$, $T_1 = 10^5$, $R_1 = 9500$, $Pm = 1$, $Pr = 10$.

$$-\frac{\pi^4 Ta Ro Q P m^2}{a^4 (a^4 + \pi^2 Q) Pr}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{k_c^2 Ra_2}{a^2 Pr}, \quad \mathcal{A}_3 = \frac{k_c^4 Ra_c}{8a^4 Pr}. \quad (3.26)$$

До рівняння виду (3.25) зводиться багато задач, де досліджувався слабонелінійний режим стаціонарної конвекції (див. наприклад [154]). На відміну від попередніх досліджень, у нашому результаті (3.25) вперше враховується ефект неоднорідного обертання ($Ro \neq 0$) електропровідної рідини. Аналітичне рішення рівняння (3.25) за відомою початковою умовою $A_0 = A(0)$ має вигляд:

$$A(\tau) = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_2} A_0^2 + \left(1 - A_0^2 \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_2}\right) \exp\left(-\frac{2\tau \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\right)}} \quad (3.27)$$

Вважаючи початкову амплітуду, що дорівнює $A_0 = 0.7$ і $Ra_2 \approx Ra_c$, за допомогою рішення (3.27) ми можемо визначити зміну величини теплоперенесення (числа Нуссельта Nu) від часу τ . Графік залежності $Nu(\tau)$ показаний на Рис. 3.3. Звідси добре видно встановлення кінцевого значення $Nu(\tau)$, через зв'язок числа $Nu(\tau)$ і амплітуди $A(\tau)$ [141]:

$$Nu(\tau) = 1 + \frac{\left[\frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_c} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}}{\left[\frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_c} \left(\frac{\partial T_0}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}} = 1 + \frac{k_c^2}{4a^2} A^2(\tau).$$

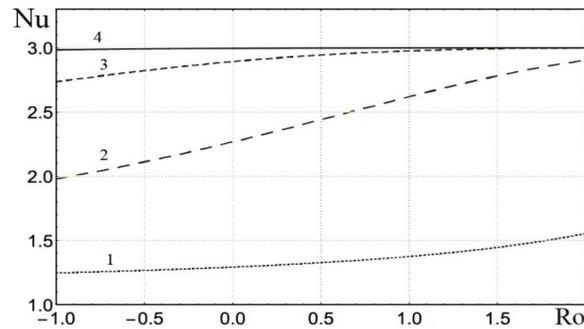


Рис. 3.4: Залежність числа Нуссельта Nu від чисел Россбі Ro при постійних параметрах : $Q_1 = 80$, $T_1 = 10^5$, $R_1 = 9500$, $Pm = 1$, $Pr = 10$; криві 1, 2, 3, 4 відповідають часом $\tau = 0.1, 0.3, 0.5, 1$.

Перевищення числа Nu над одиницею обумовлено виникненням конвекції. З Рис. 3.3 видно, що інтенсивність теплоперенесення з часом встановлюється найбільш плавно для випадку неоднорідного обертання з негативним профілем ($Ro < 0$). Рис. 3.4 наведено графік залежності числа Нуссельта Nu від числа Россбі Ro . Тут бачимо (криві 1 – 4), що інтенсивність теплопереносу збільшується убік позитивних чисел Россбі ($Ro > 0$).

3.3 Хаотична динаміка магнітної конвекції, що неоднорідно обертається

В цьому розділі для осесиметричних збурень проведено дослідження слаболінійної стадії обертання магнітоконвекції і показано, що виникає хаотичний режим, що приводить до випадкових варіацій магнітного поля [155]. За останні кілька років хаотична поведінка конвекції посилено досліджувалась у шарах рідини, що обертаються [156, 157], у провідних середовищах з однородним магнітним полем [158–160], а також у середовищах, що обертаються з магнітним полем різних речовин [161]. Однак в цих роботах не розглядалася сама динаміка магнітного поля, що відповідає безіндукційному наближенню. Такі завдання є особливо важливими для таких технологічних застосувань, як вирощування кристалів, хімічні процеси затвердіння, центробежне лиття металів і тощо,

а не для астрофізичних і геофізичних досліджень. В цьому розділі буде застосовано метод усіченого перетворення Фур'є до нелінійної системи рівнянь магнітоконвекції, що неоднорідно обертається, з метою отримання динамічної системи рівнянь типу Лоренца у шестивимірному фазовому просторі. Також буде проведено аналітичний і чисельний аналіз цієї системи рівнянь.

3.3.1 Рівняння 6D нелінійної динаміки

Використовуючи розкладання фізичних параметрів системи в усічений ряд Фур'є для моделювання вільної конвекції в атмосфері, було отримано динамічну систему рівнянь Лоренца з невеликою кількістю внутрішніх параметрів. Наслідуючи роботу [162], ми застосуємо цю методику до вивчення слабонелінійної стадії розвитку конвективної нестійкості, що описується рівняннями (3.21). Тоді всі збурення можна уявити у рівняннях (3.21) у вигляді наступного розкладання Фур'є:

$$\begin{aligned}\psi(x, z, t) &= A_1(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \\ v &= V_1(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \phi(x, z, t) &= B_1(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \tilde{v} &= W_1(t) \sin(kx) \sin(\pi z),\end{aligned}\tag{3.28}$$

$$\theta(x, y, t) = C_1(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + C_2(t) \sin(2\pi z),$$

де k безрозмірне хвильове число; A_1 , V_1 , B_1 , W_1 , C_1 і C_2 — амплітуди збурень. В результаті підстановки розкладання (3.28) у рівняння (3.21), та проведення інтегрування по всій області з урахуванням властивості ортогональності функцій

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq n \\ 1/2, & \text{якщо } m = n \end{cases}$$

ми отримаємо рівняння нелінійної динаміки наступного виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -X + RY - TV - HU \\ \dot{V} = -V + HW + \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro})X \\ \dot{U} = -\text{Pm}^{-1}U + \text{Pr}^{-1}X \\ \dot{W} = -\text{Pm}^{-1}W - \text{Pr}^{-1}V + \text{Ro}\sqrt{\text{Ta}}U \\ \dot{Y} = \text{Pr}^{-1}(-Y + X - XZ) \\ \dot{Z} = \text{Pr}^{-1}(-bZ + XY) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

де точка зверху позначає диференціювання за редукованим часом $\tilde{t} = a^2t$, $a = \sqrt{k^2 + \pi^2}$ – загальне хвильове число. Тут для зручності введено позначення:

$$R = \frac{k^2 \text{Ra}}{a^6}, \quad T = \frac{\pi^2 \sqrt{\text{Ta}}}{a^6}, \quad H = \frac{\pi^2 \text{QPr}}{a^4 \text{Pm}}, \quad b = \frac{4\pi^2}{a^2}$$

та перемасштабовані амплітуди збурень у вигляді:

$$X(\tilde{t}) = \frac{k\pi}{a^2\sqrt{2}}A_1(\tilde{t}), \quad V(\tilde{t}) = \frac{kV_1(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, \quad U(\tilde{t}) = \frac{kB_1(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, \quad W(\tilde{t}) = \frac{a^2k}{\pi\sqrt{2}}W_1(\tilde{t}),$$

$$Y(\tilde{t}) = \frac{\pi C_1(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, \quad Z(\tilde{t}) = -\pi C_2(\tilde{t}).$$

Останні два нелінійних рівняння в системі (3.29) мають схожість з аналогічними рівняннями в системі Лоренца [162]. Тому нелінійна система рівнянь (3.29) відноситься до рівнянь типу Лоренца для шестивимірного фазового простору $6D$. Рівняння (3.29) мають величезне різноманіття режимів поведінки. Вони можуть реалізовуватися усі можливі переходи до хаосу залежно від області зміни різних безрозмірних параметрів. В роботі [155] проведено аналітичний і чисельний аналіз динамічної системи рівнянь (3.29), у результаті якого було визначено типи нерухомих точок, умови виникнення хаотичного режиму та побудовано фазові портрети атракторів.

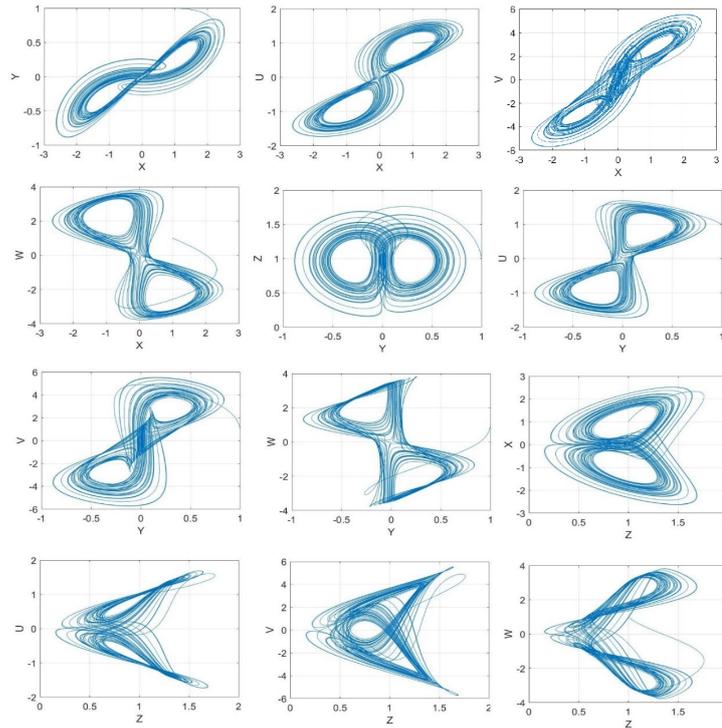


Рис. 3.5: Фазові портрети хаотичних атракторів у різних площинах, отримані в середовищі Matlab-Simulink.

3.3.2 Комп'ютерне моделювання рівнянь 6D хаотичної динаміки

Одним із важливих критеріїв, що характеризують хаотичну поведінку нелінійної динамічної системи, є спектр показників Ляпунова. За допомогою показників Ляпунова визначається швидкість сходження чи розходження траєкторій у фазовому просторі. Наявність у спектрі показників Ляпунова хоча б одного позитивного значення вказує на наявність у системі хаотичних коливань. Число показників Ляпунова відповідає розмірності фазового простору нелінійної динамічної системи. Для нашої системи (3.29) число таких показників дорівнює шести. Ми використовуємо метод обчислення показників Ляпунова, заснований на алгоритмі Бенетинна-Вольфа [164, 165]. Згідно з методикою робіт [166, 167], ми обчислили показники Ляпунова для системи рівнянь (3.29) при $R = 58$ і $H = 2$, $Ta = 1080$, $\Gamma = 0.1$, $Pm = 1$, $Pr = 10$, $b = 8/3$, $Ro = -3/4$:

$$L_1 = 0.0988591, \quad L_2 = 0.0109865 \approx 0, \quad L_3 = -0.544226,$$

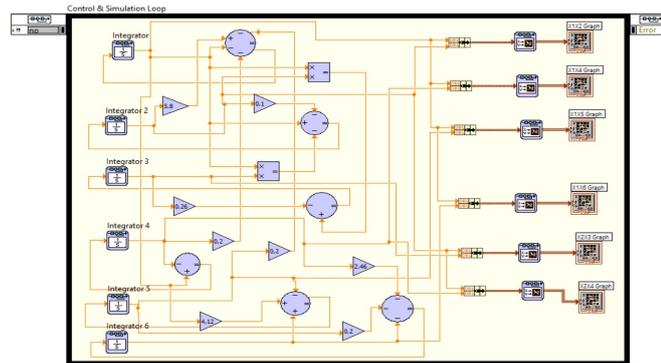


Рис. 3.6: Блок-схема реалізації хаотичної системи (3.29) у LabVIEW.

$$L_4 = -1.00557, \quad L_5 = -1.15581, \quad L_6 = -1.77091. \quad (3.30)$$

Звідси випливає, що система (3.30) має принаймні один додатний показник Ляпунова, а отже, демонструє хаотичну поведінку. Максимальний показник Ляпунова нової хаотичної системи (3.30) відповідає значенню $L_{1max} = 0.0988591$. Оскільки $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 = -4.36667 < 0$, то нова хаотична система (3.29) дисипативна. Розмірність Каплана-Йорка нової хаотичної системи (3.30) обчислюється за формулою

$$D_{KY} = M + \frac{1}{|L_{M+1}|} \sum_{i=1}^M L_i, \quad (3.31)$$

де M найбільше ціле число, для якого

$$\sum_{i=1}^M L_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{M+1} L_i < 0.$$

Розмір розмірності Каплана-Йорка виявляється не цілим числом $D_{KY} \approx 2.20184$, а дробовим або фрактальним. У роботі [163] проведено комп'ютерне моделювання 6D хаотичної динамічної системи (3.29) з використанням середовища Matlab-Simulink (див. Рис. 3.5) та програмного пакета LabVIEW (див. Рис. 3.6). Для схемної реалізації нового генератора хаосу використовується пакет NI Multisim (див. Рис. 3.7), де хаотична динаміка ілюструється осцилограмами сигналів та фазовими портретами атракторів. Крім того, у роботі [163] запропонова-

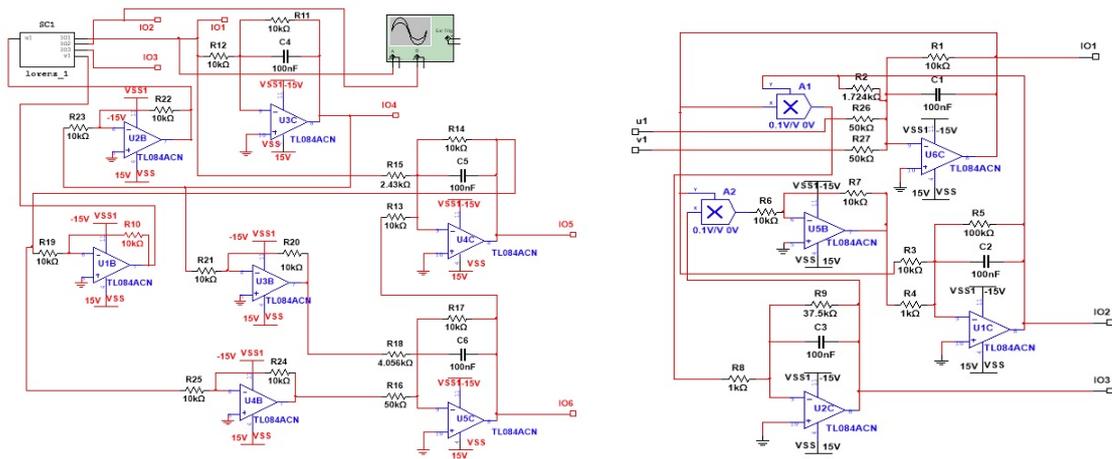


Рис. 3.7: а) Електронна схема генератора хаотичних коливань на основі системи рівнянь (3.29); б) електронна схема підсистеми SC1.

но схему захищеного зв'язку з хаотичною модуляцією, засновану на хаотичній синхронізації нової 6D хаотичної системи. Було показано, що запропонована схема хаотичного маскування та декодування сигналів, реалізована за допомогою аналогової електронної схеми, відрізняється високою точністю та хорошою надійністю.

У роботах [168, 169] була запропонована нова 6-вимірна (6D) динамічна система, яка містить найменшу кількість членів (всього 11) серед відомих у літературі аналогів:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(-x_1 + x_2) + x_4 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_3 \operatorname{sgn}(x_1) \\ \frac{dx_3}{dt} = -1 + |x_1| \\ \frac{dx_4}{dt} = -bx_1 \\ \frac{dx_5}{dt} = -x_5 + x_1x_4 \\ \frac{dx_6}{dt} = -x_6 + x_1x_3 \end{cases} \quad (3.32)$$

Система (3.32) демонструє широкий спектр динамічних характеристик, зокрема наявність прихованих атракторів і дисипативну поведінку. Було встановлено, що система (3.32) є гіперхаотичною за значень параметрів $a = 0.77$ та $b = 0.45$.

При цих значеннях параметрів і початкових умовах

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = 1, \quad (3.33)$$

система демонструє наявність кількох додатних показників Ляпунова

$$LE_1 = 0.13238, \quad LE_2 = 0.01280, \quad LE_3 = 0.00580 \approx 0, \quad LE_4 = -0.88594,$$

$$LE_5 = -1.01495, \quad LE_6 = -1.02017,$$

що підтверджує гіперхаотичний режим. Відповідно до формули (3.31) розмірність Каплана-Йорку дорівнює $D_{KY} = 3.17$. Для 6D гіперхаотичної системи була розроблена електронна схема генератора хаотичних коливань у комп'ютерному середовищі Multisim. Крім того, синхронізацію двох ідентичних 6D гіперхаотичних систем було успішно здійснено за допомогою методу активного керування [170].

Розвиток проектування електронних схем відкриває можливість створення фізичних моделей нейронних мереж, які відіграють ключову роль у наукових дослідженнях. Такі моделі сприяють глибшому розумінню принципів функціонування біологічних нейронних мереж і можуть бути основою для розробки інноваційних архітектур штучних нейронних мереж. У роботах [171] представлено моделювання п'ятивимірної (5D) системи штучної нейронної мережі з активаційною функцією гіперболічного тангенсу, реалізоване у середовищах Matlab-Simulink та LabVIEW. Зі зміною параметра система демонструє різноманітні типи динаміки, включаючи періодичну та хаотичну поведінку. На основі результатів, отриманих у середовищах Matlab-Simulink та LabVIEW, у Multisim була реалізована електронна схема генератора хаотичних сигналів для 5D-системи. Моделювання в Multisim підтвердило узгодженість із результатами, отриманими в Matlab-Simulink і LabVIEW, що засвідчує відтворюваність і достовірність хаотичної динаміки моделі.

3.4 Дослідження теплоперенесення під впливом модуляції зовнішніх полів

Загалом, модуляція зовнішніх полів означає навмисну періодичну зміну певних параметрів або умов, що впливають на конвективні процеси. Дослідження впливу модуляції на конвекцію є важливим для розуміння того, як зовнішні збурення або варіації параметрів можуть змінювати структуру течій і процеси перенесення. Для розв'язання цієї проблеми зазвичай застосовують кілька типів модуляції, щоб дослідити вплив зовнішніх збурень на конвективний потік. Деякі з найпоширеніших методів модуляції в конвекції Релея-Бенара (РБК) включають:

- 1. Температурна модуляція.** Вона передбачає періодичну зміну температурного градієнта в рідинному шарі — або через зміну максимальної температури в часі, або шляхом модуляції теплового потоку чи відведення тепла з системи. Температурну модуляцію можна реалізувати різними методами, зокрема синусоїдальними змінами [172], прямокутною модуляцією або модуляцією градієнта температури [173].
- 2. Гравітаційна модуляція.** У цьому методі гравітаційне поле, що діє на рідинний шар, змінюється періодично. Це можна здійснити шляхом вібрації всієї системи або впливом зовнішніх сил чи полів, що змінюються в часі, що, у свою чергу, призводить до коливань ефективної сили тяжіння [174].
- 3. Модуляція обертання.** Цей тип модуляції передбачає періодичну зміну швидкості або кутової швидкості обертання системи. Вона може бути реалізована через зміну швидкості обертання, введення переривчастого обертання або варіацію крутного моменту [175].
- 4. Модуляція магнітного поля.** Цей метод передбачає зміну зовнішнього магнітного поля в системі, що перебуває у стані конвективного теплообміну [176]. Зараз дослідники широко використовують ці типи модуляції для вивчення характеристик теплопередачі в різних конвективних середовищах. Нещодавно,

різні типи модуляції зовнішніх полів, такі як обертання [175, 177, 178], гравітація [179, 180], температура [181, 182], магнітне поле [183, 184], були досліджені для стаціонарної слабонелінійної конвекції в різних середовищах, таких як пористі середовища та нанорідини. Кіран і Нарасимхулу [185, 186] ввели поняття несинфазної модуляції і модуляції нижньої межі в наноконвекції, і їх висновки показали, що модуляція впливає не тільки на явища переносу, але і на хаотичну конвекцію. Крім того, Кіран та співавт. [187] досліджував вплив вертикального потоку на конвекцію нанорідини і виявив, що вертикальний потік, чи то приплив чи відтік, може збільшувати, або зменшувати передачу енергії в середовищі. Зовсім недавно Кіран [188–190] досліджував вплив модуляції гравітаційного поля (g -jitter) на конвекцію Дарсі-Релея-Бенара. Кіран та ін. [191] проаналізували вплив гравітаційної модуляції на конвекцію в нанорідині за допомогою моделі Гінзбурга-Ландау (ГЛ). За допомогою нелінійного аналізу було обчислено теплове та концентраційне числа Нуссельта залежно від інших фізичних параметрів. Вплив гравітаційної модуляції та обертання на теплову нестійкість у горизонтальному шарі нанорідини досліджено Манджулою та ін. [192].

Попередні дослідження здебільшого зосереджувалися на плоскій геометрії задачі, використовуючи декартову систему координат. Однак у лабораторних експериментах надзвичайно важливу роль відіграють течії Куетта між двома циліндрами, що обертаються з різними кутовими швидкостями. Відсутність у літературі моделі Гінзбурга-Ландау (ГЛ) для нелінійної магнітної конвекції в шарі електропровідної рідини (а також нанорідини), що нерівномірно обертається під дією модуляції зовнішніх полів, стала основною мотивацією для проведення досліджень у роботах [193, 194].

3.4.1 Постановка проблеми

Розглянемо потік електропровідної рідини, який неоднорідно обертається, що знаходиться між двома непроникними горизонтальними площинами $z = 0$

і $z = h$, які нагріваються знизу і охолоджуються зверху за періодичним законом, тобто температура нижньої і верхньої горизонтальної межі модулюється по гармонійному в часі закону [172]:

$$T_1 = T_0 + \frac{\Delta T}{2} [1 + \epsilon^2 \delta_1 \cos(\tilde{\omega}_T t)] \quad \text{при } z = 0 \quad (3.34)$$

$$T_2 = T_0 - \frac{\Delta T}{2} [1 - \epsilon^2 \delta_1 \cos(\tilde{\omega}_T t + \varphi)] \quad \text{при } z = h,$$

де $T_0 = \text{const}$ – температура щодо якої відбуваються коливання з частотою $\tilde{\omega}_T$ і фазовим зсувом φ , ΔT – різниця температур між нижньою та верхньою площиною за відсутності модуляції, δ_1 – амплітуда теплової модуляції, ϵ – малий параметр. У циліндричній системі координат електропровідне середовище (плазма) обертається в азимутальному напрямку зі швидкістю $v_\phi = R\Omega(R, t)$, де $\Omega(R, t)$ – кутова швидкість обертання, яка здійснює малі осциляції у часі за періодичним законом:

$$\Omega(R, t) = \Omega(R)(1 + \epsilon^2 \delta_2 \cos(\tilde{\omega}_R t)), \quad (3.35)$$

де $\tilde{\omega}_R$ – частота модуляції обертання, δ_2 – амплітуда обертальної модуляції.

Для опису нелінійних конвективних явищ в шарі електропровідної рідини, що неоднорідно обертається, зручно перейти від циліндричної системи координат (R, φ, z) до локальної декартової (X, Y, Z) . Якщо розглянути фіксовану область шару рідини з радіусом R_0 і кутовою швидкістю обертання

$$\Omega_0(t) = \Omega(R_0, t) = \Omega_{00}(1 + \epsilon^2 \delta_2 \cos(\tilde{\omega}_R t)), \quad \Omega_{00} = \text{const},$$

то координати $X = R - R_0$ відповідають радіальному напрямку, $Y = R_0(\varphi - \varphi_0)$ – азимутальному і $Z = z$ – вертикальному. У цьому випадку неоднорідне обертання шару рідини локально можна представити вигляді обертання з кутовою швидкістю $\Omega_0(t)$ і азимутальним широм $\mathbf{U}_0 = -q\Omega_0(t)X\mathbf{e}_Y$ [151].

Вважаємо, що напрямок зовнішнього магнітного поля \mathbf{B}_0 збігається з віс-

сю обертання рідини $\boldsymbol{\Omega} \parallel OZ$. Крім того, зовнішнє магнітне поле \mathbf{B}_0 і вектор гравітаційного прискорення $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ змінюються згодом за гармонічним законом

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_0 &= B_{00}(1 + \epsilon^2 \delta_3 \cos(\tilde{\omega}_B t)) \mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{g} &= -g_0(1 + \epsilon^2 \delta_4 \cos(\tilde{\omega}_g t)) \mathbf{e}_Z,\end{aligned}\quad (3.36)$$

де δ_3, δ_4 – малі амплітуди магнітної та гравітаційної модуляції, $B_{00} = \text{const}$, $\tilde{\omega}_B, \tilde{\omega}_g$ – частоти модуляції магнітного та гравітаційного полів.

Вплив модуляції зовнішніх полів будемо розглядати на основі рівнянь магнітної гідродинаміки в наближенні Бусінеска (3.20). У рівняннях (3.20) всі величини були представлені у вигляді суми основного та збуреного стану: $\mathbf{v} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, $P = p_0 + p$, $T = T_b + \theta$. Рівняння для основного стану мають вигляд:

$$\frac{dp_0}{dZ} = \rho_0 g \beta T_b \quad (3.37)$$

$$-2q\Omega_0^2 X = \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dX} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} = \frac{d^2 T_b}{dZ^2} \quad (3.39)$$

Рішення рівняння (3.39) з граничними умовами (3.34) має вигляд [165]:

$$T_b(z, t) = T_S(z) + \epsilon^2 \delta_1 \cdot f_1(z, t) \Delta T, \quad (3.40)$$

де

$$T_S(z) = T_0 + \frac{\Delta T}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right),$$

$$f_1(z, t) = \text{Re} \left\{ [a(\lambda) e^{\frac{\lambda z}{h}} + a(-\lambda) e^{-\frac{\lambda z}{h}}] e^{-i\tilde{\omega} t} \right\}, \quad \lambda^2 = -\frac{i\tilde{\omega} T h^2}{\chi}, \quad a(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-i\varphi} - e^{-\lambda}}{e^\lambda - e^{-\lambda}}.$$

Тут $T_S(z)$ – стаціонарна температура, $f_1(z, t)$ – осцилююча частина T_b , символ Re позначає реальну частину.

Далі, розглядаючи динаміку тільки осесиметричних збурень, тобто коли збурені величини залежать від двох змінних (X, Z) , отримаємо основні рівняння

в термінах функцій струму - гідродинамічного ψ і магнітного ϕ :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi + \sqrt{\text{Ta}} \cdot f_R \frac{\partial v}{\partial z} - \text{Pr Pm}^{-1} Q f_m \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - \text{Ra} \cdot f_g \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\
& = \text{Pr Pm}^{-1} Q \cdot J(\phi, \nabla^2 \phi) - \text{Pr}^{-1} \cdot J(\psi, \nabla^2 \psi) \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) v - \sqrt{\text{Ta}} \cdot f_R (1 + \text{Ro}) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \text{Pr Pm}^{-1} Q f_m \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \\
& = \text{Pr Pm}^{-1} Q \cdot J(\phi, \tilde{v}) - \text{Pr}^{-1} \cdot J(\psi, v) \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2 \right) \phi - \text{Pr}^{-1} f_m \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\text{Pr}^{-1} J(\psi, \phi) \tag{3.41} \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2 \right) \tilde{v} - \text{Pr}^{-1} f_m \frac{\partial v}{\partial z} + \text{Ro} \sqrt{\text{Ta}} \cdot f_R \frac{\partial \phi}{\partial z} = \text{Pr}^{-1} (J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v})) \\
& \left(\text{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \theta - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(1 - \epsilon^2 \delta_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) = -J(\psi, \theta),
\end{aligned}$$

У разі, коли $\text{Ra} \neq 0$ і модуляція зовнішніх полів відсутня $\delta_{1,2,3,4} = 0$, система рівнянь (3.41) застосовувалася для дослідження слабонелінійного і хаотичного режимів стаціонарної конвекції в неоднорідно обертається магнітоактивного електропровідного середовища [155, 193].

Далі ми проведемо аналіз нелінійної стадії стаціонарної конвекції в електропровідному середовищі, що неоднорідно обертається, в однорідному магнітному полі під впливом малих осциляцій: а) температурного поля на межах шару; б) гравітаційного поля; в) зовнішнього магнітного поля; г) кутової швидкості обертання. Усі ці ефекти розглянемо окремо, а далі проведемо порівняльний аналіз інтенсивності теплоперенесення, вираженої через число Нуссельта, для кожного типу модуляції. Тобто кількісно оцінимо ефективність теплопереносу в термінах кінцевих амплітуд. Ці амплітуди виникають унаслідок взаємодії кількох мод збурень. Таку взаємодію можна описати лише в межах нелінійної або слабонелінійної теорії, що ґрунтується на методі теорії збурень. У цьому дослідженні ми використовуватимемо слабонелінійну теорію, описану в підрозділі 3.2.3.

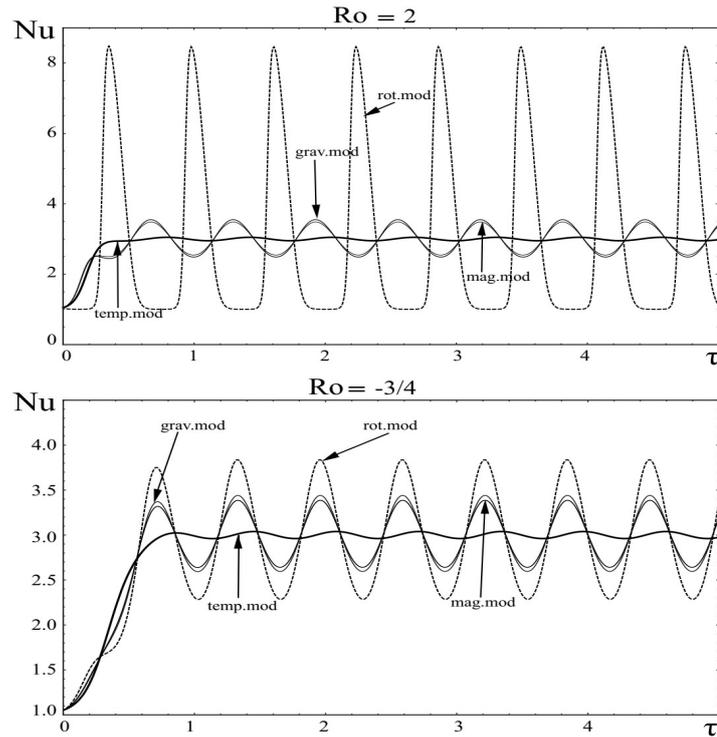


Рис. 3.8: Залежність числа Нуссельта Nu від τ до різних типів модуляції при позитивних $Ro = 2$ і негативних $Ro = -3/4$ числах Россбі.

3.4.2 Порівняння різних видів параметричного впливу на стаціонарну магнітоконвекцію, що неоднорідно обертається

На Рис. 3.8 наведено результати чисельного моделювання різних типів параметричного впливу на стаціонарну магнітоконвекцію, що неоднорідно обертається, для фіксованих параметрів конвекції.

$$Q/\pi^2 = Q_1 = 80, \quad Ta/\pi^4 = T_1 = 10^5, \quad Ra_c/\pi^4 = R_1 = 9500,$$

$$Pm = 1, \quad Pr = 10, \quad A_0 = 0.5.$$

Частоти і амплітуди всіх типів модуляції вважалися рівними: $\omega_T = \omega_g = \omega_B = \omega_R = 10$ і $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.3$, фаза $\varphi = \pi$. З Рис. 3.8 видно, що з позитивного ($Ro = 2$) і негативного профілів ($Ro = -3/4$) обертання найбільше впливом геть зміна теплопотуку у системі надає обертальна модуляція. Гравітаційна модуляція трохи перевищує магнітну модуляцію: $\Delta Nu|_{grav.mod} \geq \Delta Nu|_{mag.mod}$. Теплова фазова модуляція, в порівнянні з іншими типами модуляцій, має менший

вплив на теплоперенесення:

$$\Delta \text{Nu}|_{\text{temp.mod}} < \Delta \text{Nu}|_{\text{mag.mod}} \leq \Delta \text{Nu}|_{\text{grav.mod}} < \Delta \text{Nu}|_{\text{rot.mod}}.$$

3.4.3 Вплив гравітаційної модуляції на слабонелінійну магнітоконвекцію в шарі нанорідини, що нерівномірно обертається

В цьому підрозділі досліджується вплив гравітаційної модуляції на слабонелінійну магнітоконвекцію в шарі нанорідини з нерівномірним обертанням [194]. Для аналізу використовуються основні рівняння у декартовому поданні течії Куетта з наближенням Буссінеска та врахуванням гравітаційної модуляції. Слабонелінійний режим конвекції досліджується методом збурень за малим параметром надкритичності числа Релея з урахуванням ефектів броунівського руху та термофорезу в шарі нанорідини. Тепло- та масоперенесення оцінюються на основі кінцевих амплітуд та чисел Нуссельта для рідини й об'ємної концентрації наночастинок. Для опису нелінійних конвективних течій використовуємо декартову апроксимацію течії Куетта. В цьому випадку шар електропровідної нанорідини розташований між двома горизонтальними площинами $Z = 0$ і $Z = h$ і нагрівається знизу і охолоджується зверху, де $T_d = T_0 + \Delta T$ — температура на нижній межі горизонтального шару, а $T_u = T_0$ температура на верхньому кордоні горизонтального шару. Вважатимемо, що об'ємна частка наночастинок також постійна на межах і має відповідні значення: ϕ_0 при $Z = 0$ і ϕ_1 при $Z = h$. Якщо $\phi_1 > \phi_0$, ми маємо конфігурацію наночастинок з важким верхом (top-heavy) у нанорідості, а в іншому випадку, для $\phi_1 < \phi_0$, ми маємо конфігурацію наночастинок з важким низом (bottom-heavy) в нанорідини. Ефект модуляції гравітаційного поля будемо розглядати на основі рівнянь магнітогідродинаміки в системі координат, що обертається, для електропровідної нано рідини в наближенні Буссінеска [194]. Для дослідження слабонелінійної стадії конвективної нестійкості ми застосуємо підхід, описаний у підрозділі 3.2.3. Застосовуючи умову дозвільності (альтернатива Фредгольма [153]) для рі-

шень третього порядку, знаходимо рівняння Гінзбурга-Ландау з періодичними за часом коефіцієнтами у наступному вигляді:

$$A_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - A_2(\tau)A + A_3 A^3 = 0, \quad (3.42)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a^2}{\text{Pr}} + \frac{k_c^2}{a^4} \text{Ra}_c + \frac{k_c^2}{a^4} \text{RnLe}(Le + N_A) - \frac{\pi^2 \text{QPm}}{a^2 \text{Pr}} - \\ &\quad - \frac{\pi^2 \text{Ta} \left((1 + \text{Ro})a^4 + \pi^2 \text{QPm}(\text{RoPm} - 1) \right)}{\text{Pr}(a^4 + \pi^2 \text{Q})^2} - \frac{\pi^4 \text{TaRoQPm}^2}{a^4(a^4 + \pi^2 \text{Q})\text{Pr}}, \\ A_2(\tau) &= \frac{k_c^2}{a^2} \text{Ra}_c \left(\frac{\text{Ra}_2}{\text{Ra}_c} + \delta \cos(\Omega\tau) \right) + \frac{k_c^2}{a^2} \text{Rn}(Le + N_A) \delta \cos(\Omega\tau), \\ A_3 &= \frac{k_c^4}{8a^4} (\text{Ra}_c + \text{RnLe}^2(Le + N_A)). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Для аналізу інтенсивності теплопередачі введемо усереднений по горизонталі тепловий потік на межі шару електропровідної нанорідини, відомий як число Нуссельта:

$$\text{Nu}(\tau) = 1 + \frac{\left[\frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_c} \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}}{\left[\frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_c} \left(\frac{\partial T_b}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}} = 1 + \frac{k_c^2}{4a^2} A^2(\tau) \quad (3.44)$$

Число Нуссельта в концентрації наночастинок, що позначається як $\text{Nu}_\phi(\tau)$ визначається так само, як і число Нуссельта. Це можна виразити так:

$$\text{Nu}_\phi(\tau) = 1 + \frac{k_c^2 A^2(\tau)}{4a^2} \text{Le}(Le + N_A) \quad (3.45)$$

Рівняння Гінзбурга-Ландау (ГЛ) (3.42) ми розв'язуємо за допомогою програмного забезпечення Mathematica. За відсутності нерівномірного обертання та зовнішнього магнітного поля неавтономне рівняння Гінзбурга-Ландау для непровідної нано рідини було отримано Кіраном та ін. [191].

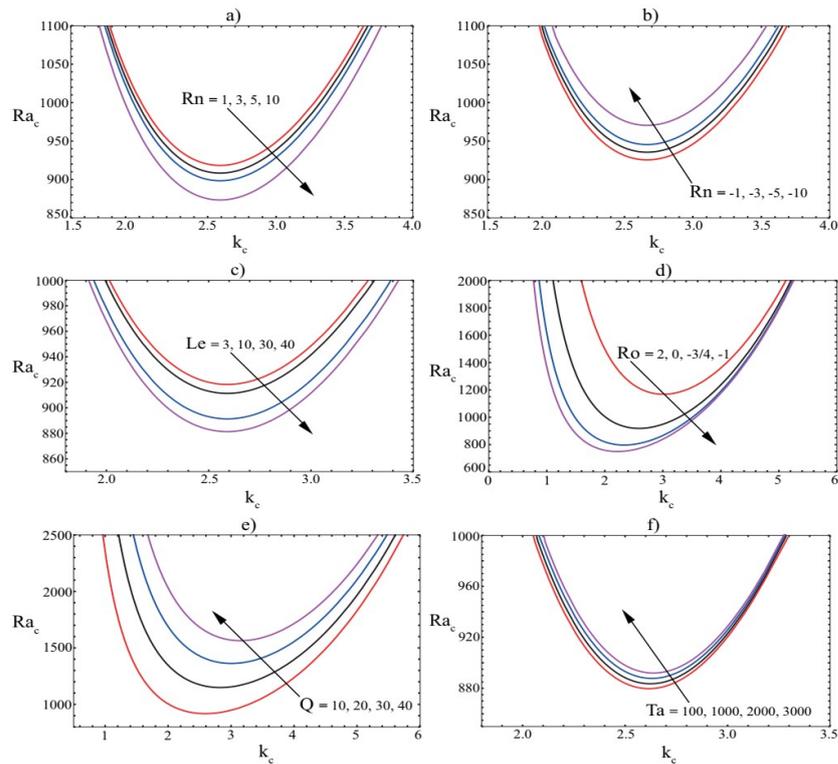


Рис. 3.9: Графіки залежності критичного числа Релея Ra_c (3.46) від хвильових чисел k_c .

3.4.4. Обговорення чисельних результатів

Криві стійкості стаціонарного числа Релея у лінійній теорії

$$Ra_c = \frac{a^6}{k_c^2} + \frac{\pi^2 a^2}{k_c^2} Q + \frac{\pi^2 a^4 Ta}{k_c^2 (a^4 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 Ta Ro (a^4 + \pi^2 Q Pm)}{k_c^2 (a^4 + \pi^2 Q)} - Rn (Le + N_A) \quad (3.46)$$

показано на Рис. 3.9. З Рис. 3.9а і 3.9с видно, що зі збільшенням параметра $Rn > 0$ (концентрація наночастинок вище верхньої межі ніж нижньої) і Le мінімальні значення чисел Релея зменшуються. Тому збільшення параметрів $Rn > 0$ і Le дестабілізує вплив на виникнення конвекції. З Рис. 3.9b видно, що у разі конфігурації нанорідина ($Rn < 0$, $N_A < 0$) (концентрація наночастинок вище на нижній межі ніж на верхній) збільшення параметрів Rn стабілізує вплив на виникнення конвекції. З Рис. 3.9d можна помітити, що при позитивному профілі числа Россбі ($Ro > 0$) мінімальне значення критичного числа Релея (Ra_{min}) вище, порівняно з негативними профілями обертання. В результаті

негативні профілі обертання мають нижчий поріг розвитку нестійкості проти однорідним ($Ro = 0$) і неоднорідним ($Ro = 2$) профілями обертання. На Рис. 3.9e число Релея показано по відношенню до безрозмірного хвильового числа для різних значень вертикального магнітного поля (число Чандрасекара). Рис. 3.9e показує, що зі збільшенням значень магнітного поля (числа Чадрасекара Q) збільшується і число Релея, що призводить до стабілізації стаціонарної конвекції. Рис. 3.9f показує, що зі збільшенням значень числа Тейлора Ta збільшується число Релея, що призводить також до стабілізації стаціонарної конвекції.

Проведемо аналіз залежності теплообміну Nu та масопереносу Nu_ϕ від безрозмірного параметра часу τ . Варіюючи параметри нанорідкості, такі як Pr , Rn , Ro , і Le , а також параметри модуляції (δ, Ω) , ми можемо досліджувати їх вплив на характеристики тепло- та масообміну. Припускаємо, що в'язкість шару рідини невелика, тому у розрахунках використовуються помірні значення Pr . Значення δ також малі через низьку амплітудну модуляцію. Крім того, передбачається, що гравітаційна модуляція має низьку частоту Ω , що максимізує її вплив на конвекцію і перенесення тепла на більш низьких частотах.

Збільшення концентрації наночастинок на нижній гарячій межі збільшує теплопровідність рідини. Наночастинок зазвичай мають вищу теплопровідність, ніж базова рідина, і ця вища теплопровідність сприяє передачі тепла від нижньої гарячої межі до навколишньої рідини. В результаті покращується конвективний теплообмін, що призводить до збільшення теплового і концентраційного числа Нуссельта. Примітно, що Rn грає двояку роль у регулюванні тепломасообмінних властивостей середовища. Позитивні значення $Rn > 0$ можуть викликати зворотний характер тепломасоперенесення всередині шару. Коли концентрація наночастинок збільшується на на верхній холодній межі, вони можуть підвищити загальну теплопровідність шару рідини. Ця підвищена теплопровідність полегшує передачу тепла за допомогою провідності зменшуючи залежність від конвективної теплопередачі. Тоді теплове число Нуссельта змен-

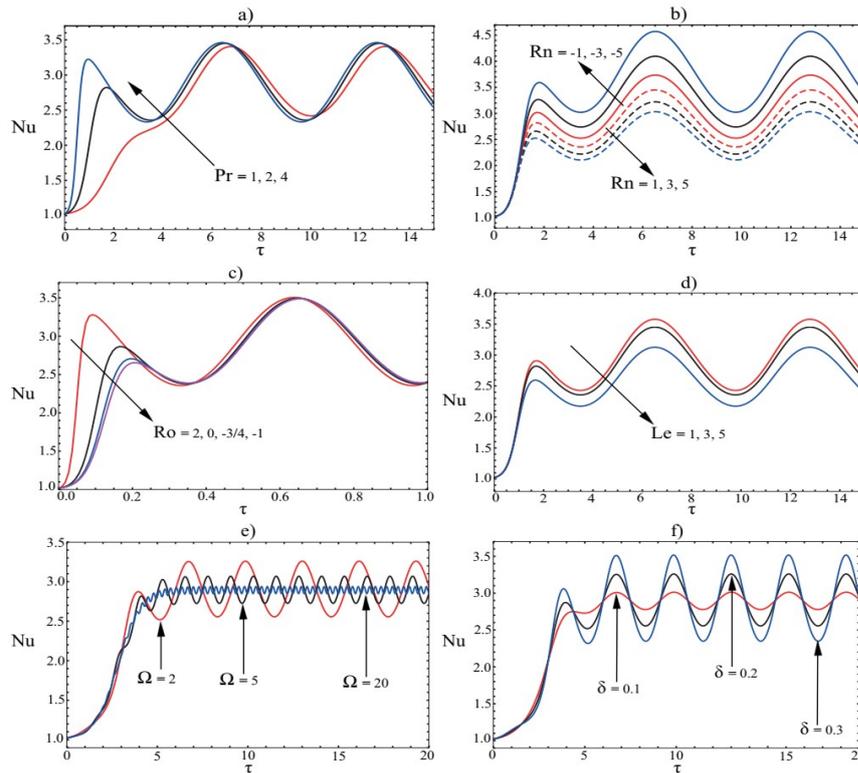


Рис. 3.10: Залежність числа Нуссельта Nu від часу τ для варіацій: а) Pr , б) Rn , в) Ro , г) Le , е) Ω , ф) δ .

шується. Наявність наночастинок може порушити потік рідини та утруднити її рух. Цей утруднений рух рідини знижує конвективну швидкість тепло- та масопереносу. Отже, концентраційне число Нуссельта, що характеризує масоперенос, зменшується. Важливо, що ці ефекти можна спостерігати всім профілів обертання, а чи не лише позитивних.

На Рис. 3.10с і 3.11с показані тимчасові зміни числа Нуссельта Nu та числа нано-Нуссельта Nu_ϕ для різних профілів обертання $Ro = 2, 0, -3/4, -1$ електропровідної нанорідини, що знаходиться під дією гравітаційного поля, що осцилює, з частотою $\Omega = 10$ і амплітудою $\delta = 0.3$ з фіксованими параметрами $Pr = 1, Le = 3$. Результати, представлені на цих графіках, демонструють, що тепло- та масоперенесення в нанорідині підсилюється за умов нерівномірного обертання, яке характеризується додатним числом Россбі ($Ro = 2$). Це демонструє корисний вплив неоднорідного обертання на загальні процеси перенесення тепла та концентрації.

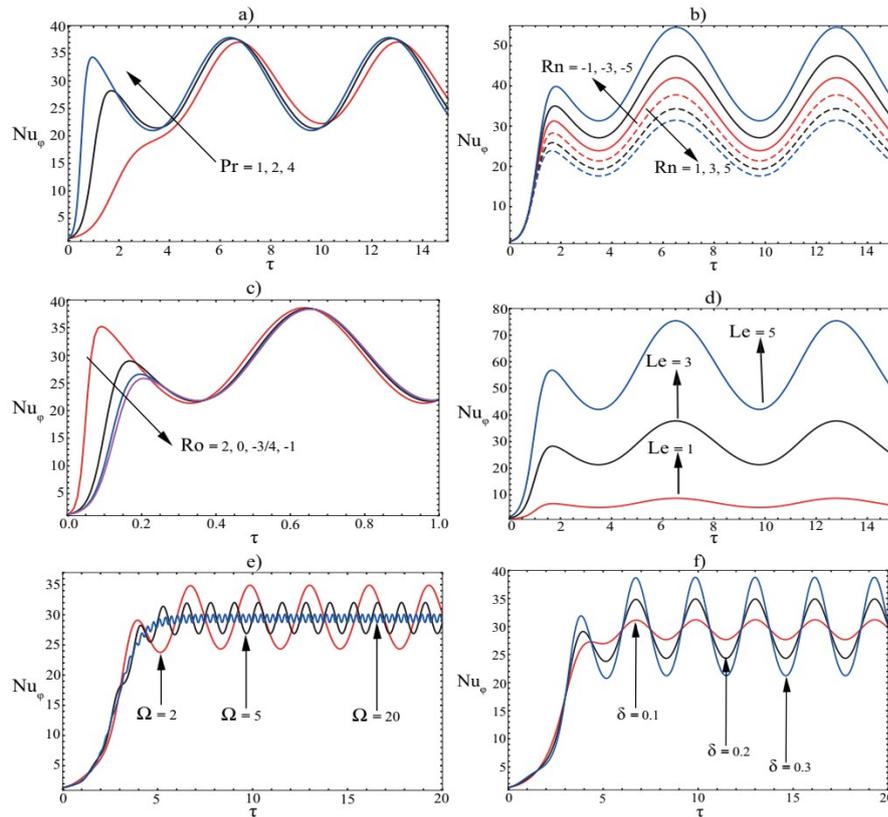


Рис. 3.11: Залежність нано-числа Нуссельта Nu_ϕ від часу τ для варіацій: а) Pr ; б) Rn ; с) Ro , д) Le , е) Ω , ф) δ .

На Рис. 3.10d показано вплив зміни числа Льюїса Le на теплообмін при фіксованих інших параметрах: $Rn = 1, Pr = 2, Ro = 2, \Omega = 1, \delta = 0.3$. Було відмічено, що зі збільшенням числа Льюїса Le тепловіддача знижується. Навпаки, зростання посилює транспорт концентрації, як показано на Рис. 3.11d. Ці результати у добрій згоді з висновками робіт [195, 196].

Вплив частоти модуляції Ω показано на рисунках 3.10e та 3.11e. Зокрема, при більш низьких швидкостях модуляції, відповідних низькочастотним випадкам ($\Omega = 2$) досягається більш висока тепло-і масоперенос порівняно з більш високими швидкостями вібрації ($\Omega = 20$). На Рис. 3.10f та Рис. 3.11f показано вплив амплітуди модуляції на тепломасоперенесення. Діапазон δ розглянутих у дослідженні значень від 0.1 до 0.5 спрямований на посилення тепломасообміну. Варто зазначити, що частота модуляції Ω зменшує вплив на тепло- і масоперенос, що узгоджується з даними [193] і [174] для випадку звичайної рідини. Ці

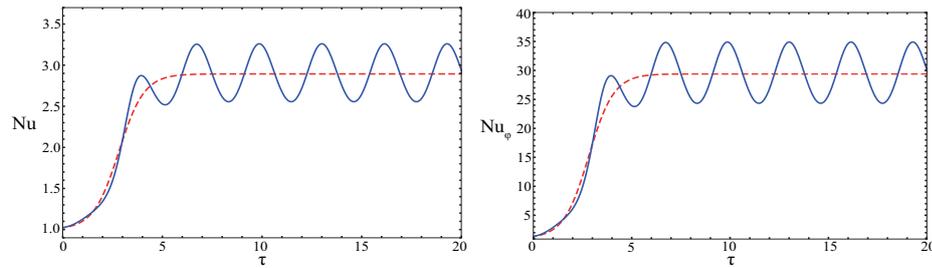


Рис. 3.12: Варіації чисел Нуссельта $Nu(\tau)$ і $Nu_\phi(\tau)$ за відсутності $\delta = 0$ (пунктирна лінія) і наявності $\delta = 0.3$, $\Omega = 2$ (суцільна лінія) модуляції гравітаційного поля.

результати наголошують на важливості обліку низькочастотного g -джиттера (g -jitter) для оптимізації процесу передачі. Результати, отримані в результаті нашого дослідження нанорідин, також можна порівняти з дослідженнями, проведеними в [188–191] та [197].

Порівняння між модульованою системою та немодульованою системою показано на Рис. 3.12. Графік показує, що відбувається раптове збільшення $Nu(\tau)$ і $Nu_\phi(\tau)$ для низьких значень тимчасового параметра τ , і стабілізується для більш високих значень τ . Однак у разі модульованої системи обидва $Nu(\tau)$ і $Nu_\phi(\tau)$ демонструють коливальну поведінку.

3.5 Магнітна конвекція в тонкому шарі електропровідної нанорідини, що неоднорідно обертається, з урахуванням впливу ефекту Холла

В цьому підрозділі досліджується спільний вплив струму Холла та вертикального магнітного поля на критерій виникнення конвекції у шарі електропровідної нанорідини, що неоднорідно обертається, з урахуванням ефектів броунівської дифузії і термофорезу [198]. Тут будуть розглянуті нові види гідромагнітних нестійкостей в шарі електропровідної нанорідини, що неоднорідно обертається, з урахуванням ефектів струму Холла, броунівської дифузії і термофорезу.

3.5.1 Дисперсійне рівняння у локальному ВКБ наближенні

Ми розглядаємо шар несжимаемой в'язкої електропровідної нанорідини товщини h , яка укладена між двома циліндрами, що обертаються, з внутрішнім радіусом R_{in} і зовнішнім R_{out} , причому $h \ll (R_{out} - R_{in})$. У вертикальному напрямку нанорідина обмежена двома паралельними площинами $z = 0$ і $z = h$, де температура та об'ємна частка наночастинок підтримуються постійними:

$$\begin{aligned} T &= T_d, \quad \phi = \phi_d \quad \text{при} \quad z = 0 \\ T &= T_u, \quad \phi = \phi_u \quad \text{при} \quad z = h, \end{aligned} \quad (3.47)$$

причому температура T_d нижньої площини перевищує температуру T_u верхньої площини: $T_d > T_u$, а об'ємна частка наночастинок: $\phi_u > \phi_d$.

Зазначимо, що наночастинок, що використовуються в рідині-носії, не є магнітними. Нанорідина знаходиться у постійному гравітаційному полі \mathbf{g} , спрямованим по осі OZ вертикально вниз $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, і обертається з кутовою швидкістю $\mathbf{\Omega}$, спрямованої вертикально вгору по осі OZ . Обертання нанорідкості створює стаціонарний потік в азимутальному напрямку: $\mathbf{V}_0 = \mathbf{e}_\phi \Omega(R)R$, де $\Omega(R)$ - кутова швидкість обертання з довільною залежністю від координати R . Крім того, ми вважаємо, що нано рідина знаходиться у зовнішньому однорідному аксіальному магнітному полі $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$. При описі даного типу течії зручно використовувати циліндричну систему координат (R, ϕ, z) , вибір якої обумовлений можливістю практичного застосування теорії, що розвивається. Застосовуючи локальний метод ВКБ, описаний у розділі 3.2.1, отримаємо дисперсійне рівняння:

$$\begin{aligned} \text{Ra} &= \frac{\Gamma_\chi}{k^2 \Gamma_\eta \Gamma_{A2}^2 (\Gamma_A^2 - 2\pi^2 M m_0)} \left[a^2 \Gamma_{A2}^2 (\Gamma_{A1}^2 \Gamma_{A3}^2 + k^2 \pi^4 M^3 q m_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^4 Q}{q} (\sqrt{\text{Ta}} + a^2 q M) (\sqrt{\text{Ta}} (1 + \text{Ro}) + m_0) (\Gamma_{A3}^2 + \pi^2 k^2 M^2 q) + \right. \end{aligned}$$

$$+\pi^4 k^2 M Q \Gamma_A^2 (\sqrt{\text{Ta}} + a^2 q M) \Big] - \frac{R_n}{\Gamma_\phi} (\Gamma_\chi L_e + a^2 N_A) \quad (3.48)$$

де

$$q = \frac{\pi^2 Q}{\Gamma_\eta^2 + \pi^2 M (\text{PmRo} \sqrt{\text{Ta}} + \pi^2 M) + \pi^2 k^2 M^2}, \quad m_0 = q (\text{PmRo} \sqrt{\text{Ta}} + \pi^2 M),$$

$$\Gamma_A^2 = (\gamma + a^2)(\gamma \text{Pm} + a^2) + \pi^2 Q, \quad \Gamma_{A1}^2 = \Gamma_A^2 - \pi^2 M m_0, \quad \Gamma_{A2}^2 = \pi^2 Q \left(1 + \frac{\gamma + a^2}{q \Gamma_\eta} \right),$$

$$\Gamma_{A3}^2 = \Gamma_A^2 - \pi^2 k^2 M^2 q, \quad \Gamma_\chi = \gamma \text{Pr} + a^2, \quad \Gamma_\eta = \gamma \text{Pm} + a^2,$$

$$\Gamma_\phi = \gamma \text{Pr} L_e + a^2, \quad a^2 = \pi^2 + k^2.$$

У відсутність наночастинок $R_n = L_e = 0$ і незначному впливі струму Холла $M = 0$ вираз (3.48) збігається з результатом [141]. Якщо вплив струму Холла $M = 0$ мало і $\text{Ro} = 0$, вираз (3.48) збігається з результатом [199].

3.5.2 Магнітообертальна нестійкість (МОН) з урахуванням холлівського струму в тонкому шарі нанорідини

Тут розглянемо випадок, коли градієнт температури дорівнює нулю ($\text{Ra} = N_A = 0$). Тоді з рівняння (3.48) ми отримуємо дисперсійне рівняння для МВН у тонкому шарі нанорідини

$$\Gamma_\eta^5 \Gamma_A^2 [\Gamma_\chi \Gamma_\phi (a^2 \Gamma_A^4 + \pi^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^2 + \pi^4 \text{Ta} \text{Ro} \text{Pm} Q) - k^2 R_n \Gamma_\chi L_e \Gamma_A^2 \Gamma_\eta] +$$

$$+ \Gamma_\chi \Gamma_\phi [a^2 (\Gamma_A^2 \Gamma_\eta X_{0M} + (\gamma + a^2) X_0 \widetilde{M}) + \Gamma_\eta^3 X_{1M} + \widetilde{M} \Gamma_\eta X_1] - k^2 R_n \Gamma_\chi L_e X_{2M} = 0, \quad (3.49)$$

де

$$\widetilde{M} = \pi^2 M (\text{PmRo} \sqrt{\text{Ta}} + \pi^2 M) + \pi^2 k^2 M^2, \quad X_{0M} = \Gamma_A^4 (2 \Gamma_\eta^2 \widetilde{M} + \widetilde{M}^2) -$$

$$- \pi^2 Q \Gamma_A^2 \widetilde{M} (\Gamma_\eta^2 + \widetilde{M}) + 2 \pi^8 k^2 M^3 Q^2 (\text{PmRo} \sqrt{\text{Ta}} + \pi^2 M),$$

$$X_0 = \Gamma_\eta^4 \Gamma_A^4 + X_{0M}, \quad X_{1M} = \pi^2 \Gamma_A^2 [\text{Ta} (1 + \text{Ro}) (2 \Gamma_\eta^2 \widetilde{M} + \widetilde{M}^2) +$$

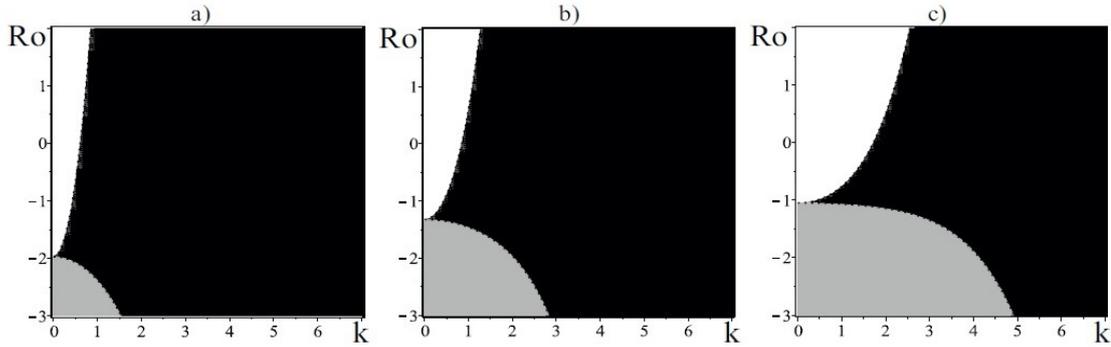


Рис. 3.13: Чорним кольором показані області, де виникає МОН з урахуванням холлівського струму у нанорідини, а сірим кольором – в «чистої» рідини. Графіки побудовані для чисел Тейлора: а) $Ta = 100$; б) $Ta = 300$; в) $Ta = 2000$ при фіксованих параметрах: $M = 5$, $Q = 10$, $Pm = 1$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$.

$$\begin{aligned}
& +\pi^2 Q M \sqrt{Ta} (\pi^2 + a^2 (1 + Ro)) \Gamma_\eta^2 + \\
& +\pi^2 Q \widetilde{M} (Pm Ro Ta + (\pi^2 + a^2 (1 + Ro)) M \sqrt{Ta}) + \pi^4 Q M \Gamma_A^2 [\pi^2 a^2 Q (Pm Ro \sqrt{Ta} + \pi^2 M) + \\
& + k^2 (\sqrt{Ta} (\Gamma_\eta^2 + \widetilde{M}) + \pi^2 a^2 M Q)], \\
X_1 & = \pi^2 \Gamma_A^2 \Gamma_\eta^2 [Ta (1 + Ro) \Gamma_\eta^2 + \pi^2 Ta Ro Pm Q] + X_{1M}, \\
X_{2M} & = \Gamma_A^2 \Gamma_\eta^4 m_1 + \Gamma_A^2 \Gamma_\eta^2 m_2 + m_1 m_2, \\
m_1 & = \Gamma_A^2 \widetilde{M} - 2\pi^4 M Q (Pm Ro \sqrt{Ta} + \pi^2 M), \\
m_2 & = (\gamma + a^2) \widetilde{M} \Gamma_\eta^3 + \widetilde{M} \Gamma_\eta^2 \Gamma_A^2 + (\gamma + a^2) \widetilde{M}^2 \Gamma_\eta.
\end{aligned}$$

При малому параметрі Холла дисперсійне рівняння (3.49) набуває наступного вигляду

$$\Gamma_\eta^5 \Gamma_A^2 [\Gamma_\chi \Gamma_\phi (a^2 \Gamma_A^4 + \pi^2 Ta (1 + Ro)) \Gamma_\eta^2 + \pi^4 Na^2 Ta Ro Pm] - k^2 R_n (\Gamma_\chi L_e + a^2 N_A) \Gamma_A^2 \Gamma_\eta = 0 \quad (3.50)$$

Вирази перед квадратною дужкою в (3.50) описують згасання збурень на омічній в'язкості ($\Gamma_\eta = 0$) і згасання альфвенівських хвиль ($\Gamma_A^2 = 0$) на в'язкій і омічній дисипації. Вираз у квадратних дужках відповідає дисперсійному рівнянню для МОН у постійному вертикальному магнітному полі, отримано-

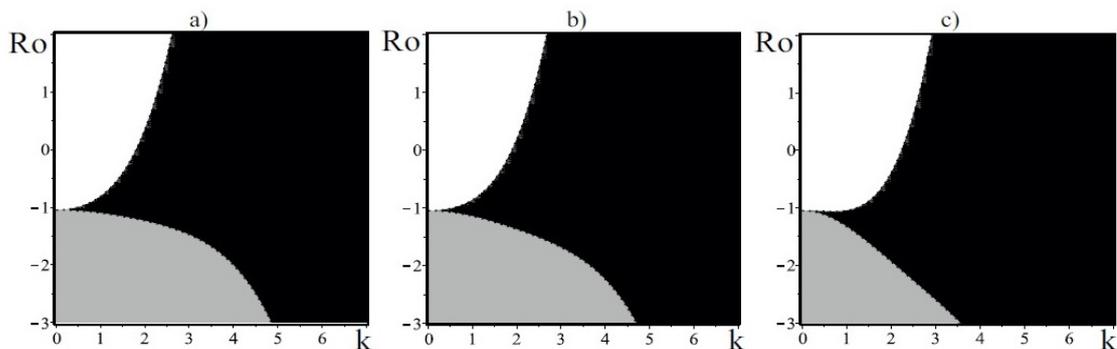


Рис. 3.14: Чорним кольором показані області, де виникає МОН з урахуванням холлівського струму у нанорідини, а сірим кольором – в «чистій» рідині. Графіки побудовані для чисел Чандрасекара: а) $Q = 50$; б) $Q = 100$, в) $Q = 300$ при фіксованих параметрах: $M = 5$, $Ta = 2000$, $Pm = 1$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$.

му [141]. У розкритому вигляді це рівняння представляє поліном шостого ступеня γ :

$$\mathcal{P}(\gamma) \equiv a_0\gamma^6 + a_1\gamma^5 + a_2\gamma^4 + a_3\gamma^3 + a_4\gamma^2 + a_5\gamma + a_6 = 0.$$

Загалом аналітичне рішення такого рівняння неможливо. Тому для аналізу стійкості збурень застосовувався критерій стійкості Лієнара-Шипара [147]. З урахуванням холлівського струму дисперсійне рівняння (3.49) можна записати як поліном тринадцятого ступеня по γ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\gamma) \equiv & b_0\gamma^{13} + b_1\gamma^{12} + b_2\gamma^{11} + b_3\gamma^{10} + b_4\gamma^9 + b_5\gamma^8 + \\ & + b_6\gamma^7 + b_7\gamma^6 + b_8\gamma^5 + b_9\gamma^4 + b_{10}\gamma^3 + b_{11}\gamma^2 + b_{12}\gamma + b_{13} = 0 \end{aligned}$$

Через високий показник ступеня (γ) і дуже громіздких виразів для коефіцієнтів, застосування критерію стійкості Лієнара-Шипара до рівняння (3.49) дуже важко. Однак, у разі великих значень параметра Холла ($M \gg 1$) ми обмежимося лише пропорційними виразами M^6 . Тоді умову стійкості $b_{13} > 0$ можна уявити, використовуючи параметр Россбі Ro у такому вигляді:

$$Ro > -\frac{a^4((a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^2 Ta) - k^2 a^2 (a^4 + \pi^2 Q) R_n L_e}{\pi^2 Ta (a^2 (a^4 + \pi^2 Q Pm) + \pi^6 M^6)} +$$

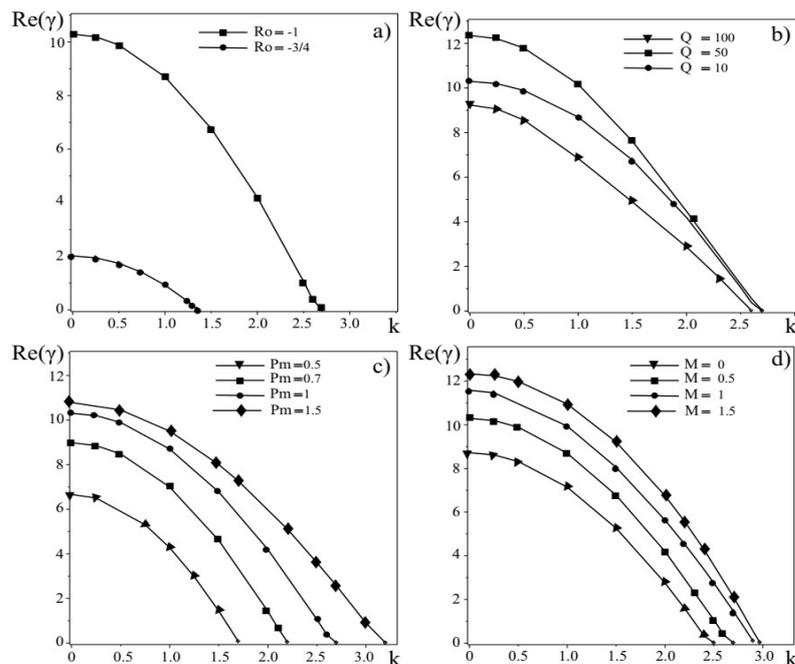


Рис. 3.15: Залежність інкременту ($\text{Re}(\gamma) > 0$) МОН у нанорідині від радіального хвильового числа k : а) релеєвський ($Ro = -1$) і кеплерівський ($Ro = -3/4$) профілі обертання; б) різні значення аксіального магнітного поля ($Q = 10, 50, 100$); в) магнітне число Прандтля ($Pm = 0.5, 0.7, 1, 1.5$); д) параметр Холла ($M = 0, 0.5, 1, 1.5$).

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\pi^6 M^6}{\pi^2 a^2 \text{Ta} (a^2 (a^4 + \pi^2 Q Pm) + \pi^6 M^6)} \times \\
 \times & \left[-\pi^2 a^2 \text{Ta} - \frac{a^8 (a^4 + \pi^2 Q) + 2\pi^6 k^2 Q^2}{a^4 + \pi^2 Q} + \frac{a^2 (a^4 + \pi^2 Q) - 2\pi^4 Q}{a^4 + \pi^2 Q} \cdot k^2 R_n L_e \right] = Ro_{cr},
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

де параметр Ro_{cr} – критичне число Россбі на межі стійкості, що відповідає нейтральному стану $\gamma = 0$.

Визначимо галузі розвитку МОН у нанорідині з урахуванням впливу холлівського струму, використовуючи вираз для критичного числа Россбі Ro_{cr} . Значення параметрів $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $Pr = 5$ для нанорідини Al_2O_3 -вода взяті з роботи [137]. На Рис. 3.13 показані області нестійкості для чисел Россбі $Ro < Ro_{cr}$ при зміні параметра обертання Ta (числа Тейлора) у площині (k, Ro) , де k – безрозмірне радіальне хвильове число. Чорним кольором на Рис. 3.13 показані області нестійкості в нанорідині з урахуванням холлівського стру-

му, а сірим кольором області нестійкості в чистій рідині. З графіків Рис. 3.13 видно, що область МОН в нанорідині з урахуванням холлівського струму більше, ніж у чистій рідині. Зі зростанням параметра обертання Ta область МОН з урахуванням холлівського струму для чистої рідини також збільшується.

Рис. 3.14 показані області нестійкості для чисел Россбі $Ro < Ro_{cr}$ при зміні величини зовнішнього магнітного поля Q (числа Чандрасекара) у площині (k, Ro) . Чорним кольором на Рис. 3.14 показані області нестійкості в нанорідині з урахуванням холлівського струму, а сірим кольором області нестійкості в чистій рідині. З графіків Рис. 3.14 видно, що область МОН в нанорідині з урахуванням холлівського струму більше, ніж у чистій рідині. Зі зростанням параметра магнітного поля Q область МОН з урахуванням холлівського струму для чистої рідини зменшується. Таким чином, за наявності концентрації наночастинок область розвитку МОН з урахуванням холлівського струму значно збільшується в площині (k, Ro) .

Проведемо численний аналіз дисперсійного рівняння (3.49), використовувачи фізическими параметрами наножидкості Al_2O_3 -вода из работ [137, 200]:

$$\phi_u - \phi_d = 0.01, \quad \rho_f = 1000 kg/m^3, \quad \mu = 10^{-3} Pas,$$

$$\rho_d = 4 \cdot 10^3 kg/m^3, \quad D_B = 4 \cdot 10^{-11} m^2/s,$$

$$D_T = 6 \cdot 10^{-11} m^2/s, \quad \chi_f = 2 \cdot 10^{-7} m^2/s, \quad (\rho c)_p = 3.1 \cdot 10^6 J/m^3, \quad (\rho c)_f = 4 \cdot 10^6 J/m^3,$$

$$\beta = 3.4 \cdot 10^{-3} 1/K, \quad T_d - T_u = 1K, \quad T_u = 300K, \quad L_e = 5000,$$

$$Pr = 5, \quad Pm = 1, \quad R_n = 0.122, \quad M = 0.5. \quad (3.52)$$

Значення параметрів Ta, Q, R_n можна регулювати, змінюючи відстань між межами шару нанорідини. Використовуючи значення параметрів з (3.52), і зафіксувавши число Тейлора $Ta = 2000$ і число Чандрасекара $Q = 10$, визначимо темпи зростання МОН $Re(\gamma) > 0$, залежно від радіального хвильового числа k .

На Рис. 3.15а ми бачимо, що темпи зростання осесиметричних збурень у

разі релєївського профілю обертання ($Ro = -1$) вищі, ніж для випадку кепле-рівського ($Ro = -3/4$) профілю обертання. Рис. 3.15b показані темпи зростання МОН за зміни величини аксіального магнітного поля $Q = 10, 50, 100$ на випадок релєєвського профілю обертання ($Ro = -1$). Тут бачимо, що збільшення напруженості аксіального магнітного поля H_{0z} може наводити, як до збільшення інкременту нестійкості ($Q = 10 \rightarrow Q = 50$), так і до зменшення інкременту при $Q = 50 \rightarrow Q = 100$. Варіації магнітного числа Прандтля Pm також можуть суттєво вплинути на розвиток МОН в нанорідини (див. Рис. 3.15c). Для фіксованих параметрів $Ta = 2000, Q = 10, M = 0.5, Ro = -1$ ми спостерігаємо, що темпи зростання збурень значно нижчі за числа Прандтля $Pm \ll 1$. Рис. 3.15d показані темпи зростання МВН за зміни параметра Холла $M = 0, 0.5, 1, 1.5$. Тут видно, що зі збільшенням параметра Холла темпи зростання МОН також збільшуються. Таким чином, ефект холлівського струму має дестабілізуючий вплив на розвиток МОН у нанорідині.

3.5.3 Стаціонарний режим конвекції з урахуванням холлівського струму в тонкому шарі нанорідини

Приступимо до дослідження випадку, коли є різниця температур і концентрації наночастинок на межах шару нанорідини $Ra \neq 0, N_A \neq 0$, який неоднорідно обертається $Ro \neq 0$ у постійному вертикальному магнітному полі \mathbf{H}_0 . Розглянемо випадок стаціонарної конвекції. В результаті ми отримуємо значення числа Релея Ra для монотонних або стаціонарних збурень:

$$Ra_{st} = \frac{1}{k^2 \pi^2 Q (1 + \tilde{q}^{-1}) (a^4 + \pi^2 Q - 2\pi^2 M \tilde{m}_0)} \times$$

$$(a^2 \pi^2 Q (1 + \tilde{q}^{-1}) (\pi^4 M^3 k^2 \tilde{q} \tilde{m}_0 + (a^4 + \pi^2 Q - \pi^2 M \tilde{m}_0) (a^4 + \pi^2 Q - \pi^2 M^2 k^2 \tilde{q})) +$$

$$+ \pi^4 Q (\sqrt{Ta} + a^2 \tilde{q} M) (\sqrt{Ta} (1 + Ro) + \tilde{m}_0) (a^4 + \pi^2 Q) \tilde{q}^{-1} +$$

$$+ \pi^4 M k^2 Q (a^4 + \pi^2 Q) (\sqrt{Ta} + a^2 \tilde{q} M)) - R_n (L_e + N_A),$$

$$\tilde{q} = \frac{\pi^2 Q}{\alpha^4 + \pi^2 M (\text{PmRo} \sqrt{\text{Ta}} + M \pi^2) + M^2 \pi^2 k^2}, \quad (3.53)$$

$$\tilde{m}_0 = \frac{\pi^2 Q (\text{PmRo} \sqrt{\text{Ta}} + M \pi^2)}{\alpha^4 + \pi^2 M (\text{PmRo} \sqrt{\text{Ta}} + M \pi^2) + M^2 \pi^2 k^2}.$$

Критичні хвильові числа початку конвекції випливають з умови $(\frac{\partial \text{Ra}_{st}}{\partial k})_{k=k_{cr}} = 0$. Підставляючи вираз (3.53), ми отримуємо рівняння для визначення k_{cr} . Це рівняння має досить громіздкий вигляд, тому ми його не наводимо. Однак ми можемо зробити висновок, що критичне хвильове число k_{cr} не залежить від параметрів нанорідина (R_n, L_e, N_A), а залежить від безрозмірних параметрів $Q, \text{Pm}, \text{Ta}, \text{Ro}, M$.

Проведемо аналіз залежності стаціонарного числа Релея Ra_{st} від хвильового числа k для варіацій різних параметрів $\text{Ro}, M, Q, \text{Ta}, \text{R}_n, N_A, L_e$. При цьому мінімальним значенням критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} відповідає точка на нейтральній кривій, що розділяє області стійких і нестійких збурень. Рис. 3.16а показано, що для позитивного профілю числа Росбі $\text{Ro} \geq 0$ мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} вище, ніж негативних профілів обертання: кеплерівського ($\text{Ro} = -3/4$) і релеевського ($\text{Ro} = -1$). Отже, для негативних профілів обертання ми отримуємо нижчий поріг розвитку нестійкості порівняно з випадком однорідного ($\text{Ro} = 0$) та неоднорідного ($\text{Ro} = 2$) обертання. Фізична інтерпретація отриманого результату ось у чому. Сила Коріоліса може надавати дестабілізуючу дію на конвекцію залежно від профілю кутової швидкості обертання [141]. Для релеевського профілю обертання $\text{Ro} = -1$ кутова швидкість зменшується з відстанню $\Omega = \text{const} \cdot R^{-2}$, навпаки при позитивних $\text{Ro} > 0$, наприклад при $\text{Ro} = 1$, кутова швидкість обертання збільшується з відстанню $\Omega = \text{const} \cdot R^2$. Таким чином, обертання з $\text{Ro} > 0$ стабілізує конвекцію, а при $\text{Ro} < 0$ – дестабілізує. Для електропровідної рідини з кінцевою електропровідністю має місце часткова «вмороженість» магнітного поля, та неоднорідне обертання призводить до спотворення силових ліній магнітного поля.

Ta	Q	a) Ra_{st}^{min}	a) k_{cr}	b) Ra_{st}^{min}	b) k_{cr}
100	5	314.27	2.66	314.27	2.66
	10	415.85	2.74	415.85	2.74
	100	2069.03	3.71	2069.03	3.707
	500	7976.08	4.1	7976.08	4.99
500	5	709.92	3.21	709.92	3.21
	10	764.66	3.18	764.66	3.18
	100	2172.54	3.73	2172.54	3.73
	500	8007.29	4.50	8007.29	4.50

Табл. 3.1: Порівняння критичних чисел Релея Ra_{st}^{min} і критичних хвильових чисел k_{cr} для різних значень Ta і Q з вільними межами для нанорідини із статті а) Ядав та ін. [199] б) це дослідження для випадку $M = 0$, $Ro = 0$.

У випадку $Ro > 0$ лінії магнітного поля зміщуються від осі обертання, тобто у бік збільшення Ω , навпаки при $Ro < 0$ відбувається зміщення до осі обертання. Ефект впливу неоднорідного (диференціального) обертання на магнітне поле, і як наслідок на конвекцію, відповідають члени $\sim RoPm$.

Графіки Рис. 3.16а побудовані для фіксованих параметрів: $M = 1$, $Q = 100$, $Pm = 1$, $Ta = 300$, $R_n = 0.122$, $N_A = 5$, $L_e = 5000$. Далі вплив варіацій різних фізичних величин на стаціонарну конвекцію будемо досліджувати при релеєвському профілі обертання ($Ro = -1$) як найбільш реалізованому в лабораторних експериментах.

Рис. 3.16б побудовано число Релея Ra_{st} залежно від хвильового числа k для різних значень параметра Холла $M = (1, 1.5, 2, 2.5)$ та фіксованих значень параметрів $Q = 100$, $Pm = 1$, $Ta = 300$, $R_n = 0.122$, $N_A = 5$, $L_e = 5000$. Тут ми бачимо, що зі збільшенням значення параметра струму Холла, значення числа Релея збільшується, тобто параметр струму Холла стабілізує вплив на систему.

Вплив магнітного поля (число Чандрасекара Q) на конвективну стійкість системи представлено графічно на Рис. 3.16с. Звідси, що коли число Чандрасекара Q зростає, то зростає критичне число Релея Ra_{st}^{min} . Це означає, що система

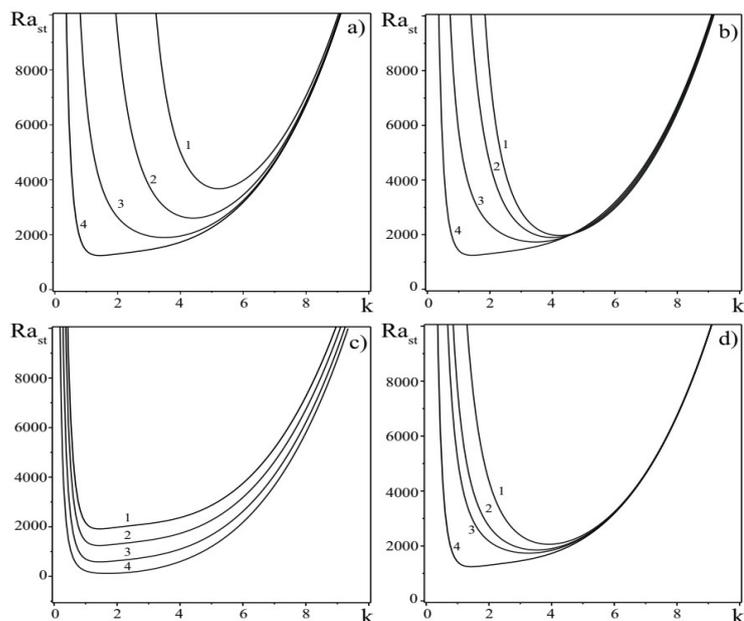


Рис. 3.16: Залежність числа Релея від k для варіацій параметрів: а) $Ro = (2, 0, -3/4, -1)$ – криві (1,2,3,4); б) $M = (1, 1.5, 2, 2.5)$ – криві (1,2,3,4); в) $Q = (150, 100, 50, 10)$ – криві (1,2,3,4); д) $Ta = (50, 150, 200, 300)$ – криві (1,2,3,4).

стає більш стійкою. Це пов'язано з тим, що варіація Q призводить до зміни сили Лоренца. Ця сила чинить опір течії провідної рідини. Отже магнітне поле має стабілізуючий вплив на стійкість системи. Оскільки магнітне поле гальмує рух провідної рідини (нано рідини), воно цілком може надавати стабілізуючу дію. У свою чергу взаємодія між полем і струмами, що індукуються в середовищі, що рухається, впливає на конвективний рух, тобто на стійкість рівноваги середовища, що підігрівається знизу. На Рис. 3.16d показано вплив ефекту обертання (число Тейлора Ta) на стаціонарну конвекцію. З Рис. 3.16d видно, що зі збільшенням параметра обертання Ta , зменшується критичне число Релея Ra_{st}^{\min} . Таким чином, при негативних числах Росбі $Ro < 0$ ми отримуємо дестабілізуючий ефект обертання системи. Рис. 3.17а, Рис. 3.17б та Рис. 3.17с показують, відповідно, вплив концентрації числа Релея R_n , числа Льюїса L_e та модифікованого коефіцієнта дифузії N_A на стаціонарну конвекцію системи. Легко побачити, що збільшення концентраційних значень числа Релея R_n , числа Льюїса L_e та модифікованого коефіцієнта дифузії N_A призводить до змен-

M	Ro	Ra_{st}^{min}	k_{cr}	Ro	Ra_{st}^{min}	k_{cr}	Ro	Ra_{st}^{min}	k_{cr}
1	-1	1244.42	1.43	0	2605.47	4.40	1	3209.47	4.91
1.5	-1	1730.77	3.47	0	2744.13	4.66	1	3364.76	5.105
2.0	-1	1895.66	3.99	0	2794.50	4.80	1	3407.66	5.20
2.5	-1	1968.36	4.23	0	2791.13	4.88	1	3388.16	5.24
5	-1	1983.68	4.55	0	2594.63	4.95	1	3094.84	5.23
10	-1	1936.93	4.61	0	2371.44	4.89	1	2751.12	5.11

Табл. 3.2: Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і критичні хвильові числа k_{cr} для різних значень струму Холла M і числа Россбі Ro при фіксованих параметрах $Ta = 300$, $Q = 100$.

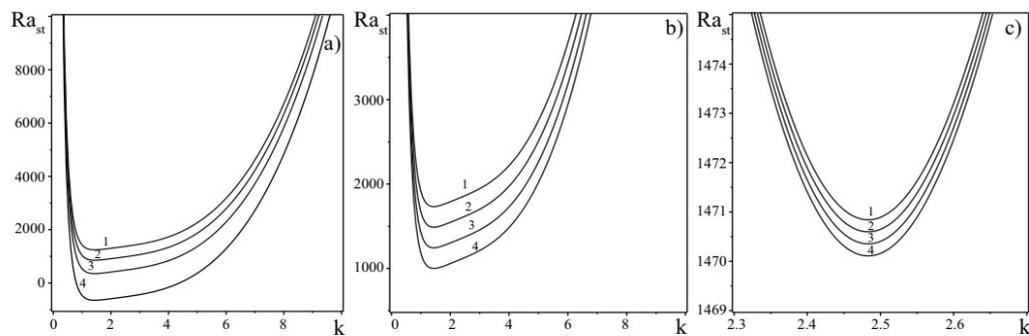


Рис. 3.17: Залежність числа Релея від k для варіацій параметрів: а) $R_n = (0.122, 0.2, 0.3, 0.5)$ – криві (1,2,3,4); б) $L_e = (1000, 3000, 5000, 7000)$ – криві (1,2,3,4); в) $N_A = (2, 4, 6, 8)$ – криві (1,2,3,4).

шення значення критичного числа Релея Ra_{st}^{min} . Отже, параметри наночастинок (R_n, L_e, N_A) дестабілізують вплив на стійкість системи. Інакше кажучи, зі збільшенням об'ємної частки наночастинок збільшується броунівський рух наночастинок, що викликає дестабілізуючу дію параметрів (R_n, L_e, N_A) . Зауважимо, що з виразу (3.53) у деяких окремих випадках можна отримати раніше відомі результати. Для випадку $(Ro = 0)$ і $R_n = M = 0$ ми отримуємо класичний результат Чандрасекара [40]. Без обертання і магнітного поля $(Ta = Q = 0)$ вираз (3.53) дає результат роботи [201]. Не враховуючи вплив струму Холла $M = 0$ і наночастинок $R_n = 0$ у виразі (3.53) отримуємо результат роботи [141]. Якщо ми вважаємо $(Ro = 0)$ і $M = 0$ (3.53), то отримаємо результат [199]. Кри-

тичні числа Релея Ra_{st}^{min} і відповідні критичні хвильові числа k_{cr} для різних значень Ta і Q без струму Холла $M = 0$ і $Ro = 0$ отримані та порівнюються з результатами Ядав та ін. [199] як показано в таблиці 6.3.

Як видно з таблиці 6.3, результати статті [199] добре узгоджуються з нашими результатами для випадку $M = 0$, $Ro = 0$. Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і відповідні критичні хвильові числа k_{cr} для різних значень струму Холла M і числа Россбі Ro рівні показано в таблиці 3.2.

Як видно з результатів таблиці 3.2, вплив струму Холла стабілізує вплив на виникнення конвекції при малих значеннях параметрів $M < 5$ і дестабілізуючий вплив при великих $M \geq 5$. Крім того, граничне значення виникнення конвекції для релеївського профілю обертання ($Ro = -1$) значно нижче, ніж випадків однорідного ($Ro = 0$) і неоднорідного ($Ro = 1$) обертання.

3.6 Висновки до розділу 3

Наведемо основні результати, отримані у цьому розділі.

- 1) Побудовано лінійну теорію конвективної нестійкості в тонких шарах електропровідної рідини, що неоднорідно обертається, в постійному вертикальному магнітному полі для осесиметричних збурень. Отримано критерії стійкості течій плазми, з яких встановлено, що окрім дисипативних процесів, стабілізуючими факторами є однорідне магнітне поле $B_0 = \text{const}$, неоднорідне обертання з дійсною епіциклічною частотою $\kappa^2 = 4\Omega^2(1 + Ro) > 0$, а також градієнт температури $dT_0/dz > 0$, якщо він спрямований вертикально вгору.
- 2) Встановлено, що для профілів неоднорідного обертання з негативними числами Россбі Ro пороги стаціонарної та коливальної конвективної нестійкості (мінімальні критичні числа Релея) знижуються. Отримано вирази для гідродинамічної та магнітної спіральності квазіупорядкованих конвективних течій, які можуть використовуватися в теорії динамо.
- 3) Побудовано слабонелінійну теорію стаціонарної конвективної нестійкості в

шарі електропровідної рідини, що неоднорідно обертається, у вертикальному однорідному магнітному полі за допомогою методу теорії збурень за малим параметром надкритичності стаціонарного числа Релея. Отримано нелінійне рівняння типу Гінзбурга-Ландау, що описує еволюцію кінцевої амплітуди збурень. Знайдено рішення цього рівняння, яке показує, що за час встановлення стаціонарного рівня теплопередачі інтенсивність теплоперенесення збільшується для профілів обертання середовища з позитивними числами Россбі $Ro > 0$.

4) Отримано нову динамічну систему нелінійних рівнянь 6D фазового простору. Виявлено дивний атрактор у 6D фазовому просторі, що визначає статистичні властивості хаотичних структур. Проведено комп'ютерне моделювання 6D рівнянь хаотичної динаміки у комп'ютерному середовищі Matlab-Simulink і LabVIEW. В середовищі Multisim на основі цих рівнянь побудовано електронні схеми генераторів хаосу. Практична реалізація цих генераторів буде корисною для систем прихованої передачі інформації.

5) Встановлено, що в магнітній конвекції, що неоднорідно обертається, найбільший внесок у теплоперенесення робить ефект модуляції обертання. Ефект модуляції поля тяжіння трохи перевищує ефект модуляції магнітного поля на теплоперенесення в системі. Найменший внесок у теплоперенесення даної системи надає модуляція температури в порівнянні з іншими типами модуляції.

6) Під час дослідження впливу гравітаційної модуляції на стаціонарну конвекцію в нанорідині, що неоднорідно обертається у постійному вертикальному магнітному полі, було встановлено, що збільшення частоти модуляції Ω призводить до зменшення тепло- й масоперенесення як для позитивних ($Ro > 0$), так і для негативних ($Ro < 0$) профілів обертання. Водночас, незалежно від характеру обертання, збільшення амплітуди модуляції δ сприяє посиленню тепло- та масоперенесення.

7) Для стаціонарної магнітної конвекції в шарі нанорідини, що неоднорідно обертається, з урахуванням ефекту струму Холла було встановлено, що

- а) зі збільшенням параметра Холла зростають темпи розвитку магнітообертальної нестійкості;
- б) струм Холла стабілізує вплив на виникнення конвекції при малих значеннях параметрів $M < 5$ і дестабілізуючий вплив при великих параметрах $M \geq 5$;
- в) негативний профіль обертання $Ro < 0$ знижує поріг виникнення конвективної нестійкості;
- г) збільшення аксіального (вертикального) магнітного поля стримує виникнення конвекції;
- д) конвективна нестійкість дестабілізується зі збільшенням параметра обертання Ta при негативному профілі обертання $Ro < 0$;
- е) критичні числа Релея Ra_{st}^{min} знижуються зі збільшенням концентрації наночастинок, що сприяє виникненню конвективної нестійкості.

Отримані в цьому розділі результати опубліковані у роботах [141, 155, 163, 168, 169, 171, 193, 194, 198].

РОЗДІЛ 4

ТЕПЛОВА КОНВЕКЦІЯ В ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ, В СПІРАЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Відомо, що в конвективних зонах Сонця та інших зірок, а також в ядрі Землі і планет, розташованих в екваторіальній області об'єкта, що обертається, істотну роль грають азимутальне (або тороїдальне) магнітне поле [40]. Вперше, нестійкість адіабатичних збурень у стійко-стратифікованих зірках у тороїдальному (азимутальному) магнітному полі була відкрита Тайлером [202]. Там же, за допомогою енергетичного методу (див. наприклад [203]), знайшли необхідні і достатні умови стійкості. У роботі [204] проведено узагальнення нестійкості Тайлера з урахуванням дифузії і обертання, і були отримані критерії стійкості гравітаційно-стратифікованої в'язкої рідини, що неоднорідно обертається, в азимутальному магнітному полі. Огляд цих результатів щодо зірок можна також знайти в роботі [205].

Фундаментальність проблеми акреції речовини в астрофізиці сприяла до активних спроб її моделювання у лабораторних умовах. Рідкі метали (натрій, галій) [206] і низькотемпературна плазма [207] використовувалися як провідне середовище, що обертається. У цих експериментах вивчалася стійкість течії Куетта між двома обертовими співвісними циліндрами в постійному зовнішньому магнітному полі, спрямованому вздовж осі циліндрів. Експериментальні дослідження, присвячені вивченню течії рідкого металу в азимутальному магнітному полі, розглянуто у низці наукових робіт [208, 209]. Течії рідкого металу в спіральному магнітному полі активно вивчаються у зв'язку з експериментом PROMISE (Россендорф, Німеччина) [210]. Результати дослідження спектральних характеристик турбулентної течії рідкого металу важливі для процесів змішування та кристалізації рідкого металу. У зв'язку з тим, що вивчення таких явищ необхідно сучасним процесам лиття металів. В даний час експеримен-

ти щодо взаємодії спірального магнітного поля з потоками нанорідини ще не проводилися. Зважаючи на те, що теплофізичні властивості нанорідин можна експериментально підібрати шляхом синтезу наночастинок з різних матеріалів [211], то виникла ідея використовувати електропровідні нанорідини (у тому числі гібридні) у лабораторних експериментах з вивчення гідромагнітних нестійкостей у спіральних магнітних полях. На нашу думку, застосування концепції спірального магнітного поля допоможе просунути технології розробки нових наноматеріалів.

Враховуючи актуальність дослідження впливу спірального магнітного поля на динаміку потоків електропровідних рідин і нанорідин, у цьому розділі буде розглянуто завдання з урахуванням спільного впливу ефектів неоднорідного обертання середовища та зовнішнього спірального магнітного поля на процеси теплової конвекції.

4.1 Магнітна конвекція в електропровідному середовищі, що неоднорідно обертається, в зовнішньому спіральному магнітному полі

В цьому розділі досліджується лінійна і слабо-нелінійна теорія магнітної конвекції в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається, у зовнішньому спіральному магнітному полі. Виклад теорії заснований на роботі [212], де вперше розглядалася конвективна нестійкість шару електропровідної рідини, що неоднорідно обертається, в спіральному магнітному полі. Результати роботи показали, що за відсутності градієнта температури $Ra = 0$, тобто коли немає підігріву, критерії конвективної нестійкості переходять у відомі критерії виникнення стандартної та спіральної магнітообертальної нестійкості (МОН) електропровідного середовища (плазми) (див. наприклад [213, 214]).

4.1.1 Постановка задачі та загальне дисперсійне рівняння

Розглянемо конвективні течії в шарі, що неоднорідно обертається, товщини h несжимаємої в'язкою електропровідної рідини (плазми), яка укладена між двома обертовими циліндрами з внутрішнім радіусом R_{in} і зовнішнім R_{out} , причому $h \ll (R_{out} - R_{in})$. На нижній площині шару підтримується більш висока температура T_d , ніж на верхній площині T_u : $T_d > T_u$ – підігрів знизу. Електропровідна рідина обертається із кутовою швидкістю Ω , спрямованою вертикально вгору по осі OZ , де обертання рідини створює стаціонарний потік в азимутальному напрямку: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_\phi \Omega(R)R$, де $\Omega(R)$ - кутова швидкість обертання з довільною залежністю від координати R . Крім того, ми вважаємо, що плазма знаходиться в спіральному магнітному полі \mathbf{B}_0 , яке представимо у вигляді суми неоднорідного азимутального $B_{0\phi}(R)$ і однорідного аксіального B_{0z} полів:

$$\mathbf{B}_0 = B_{0\phi}(R)\mathbf{e}_\phi + B_{0z}\mathbf{e}_z, \quad B_{0z} = \text{const.} \quad (4.1)$$

Топологічною характеристикою силових ліній спірального магнітного поля (4.1) є псевдоскалярна величина - магнітна спіральність (див. наприклад [?]), яка представлена у вигляді суми неоднорідного азимутального $B_{0\phi}(R)$ і однорідного аксіального B_{0z} полів:

$$\mathbf{B}_0 \cdot \text{rot}\mathbf{B}_0 = \frac{B_{0z}}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RB_{0\phi}) \quad (4.2)$$

Для дослідження руху в'язкої незжимаємої електропровідної рідини в наближенні Буссінеска доцільно використовувати циліндричну систему координат (R, ϕ, z) , вибір якої зумовлений можливістю практичного застосування розробленої теорії. Застосовуючи методику, викладену в розділі 3.2.1, у рамках одномодового наближення було отримано загальне дисперсійне рівняння [212]:

$$\text{Ra} = \frac{\Gamma_\chi(a^2\Gamma_A^4 + \pi^2\text{Ta}(1 + \text{Ro})\Gamma_\eta^2 + \pi^4\text{Q}\text{Ta}\text{Ro}\text{Pm} - 4\pi^4\text{Q}^2\xi^2 - 4\pi^2\text{Q}\xi^2\Gamma_A^2\text{Rb})}{k^2\Gamma_\eta\Gamma_A^2}, \quad (4.3)$$

де $\xi = \frac{B_{0\phi}h}{R_0B_0}$ – відношення азимутального магнітного поля до аксіального, R_0 – фіксована точка радіальної компоненти R . Для кількісної оцінки неоднорідності азимутального магнітного поля введено магнітне число Россбі:

$$\text{Rb} = \frac{R}{2H_{0\phi}R^{-1}} \frac{d}{dR} (H_{0\phi}R^{-1}).$$

Для випадку, коли азимутальне магнітне поле відсутнє $\xi = 0$, дисперсійне рівняння (4.3) було отримано роботи [155]. Без урахування теплових процесів ($\text{Ra} = 0$) та $\xi = 0$ рівняння (4.3) збігається з дисперсійним рівнянням стандартної МОН (SMRI) з урахуванням диссипативних процесів [213, 214].

4.1.1.1 Стаціонарний режим конвекції

Якщо $\gamma = 0$ з формули (4.3) знайдемо критичне значення числа Релея Ra_{st} для стаціонарної конвекції:

$$\text{Ra}_{st} = \frac{a^6}{k^2} + \frac{\pi^2 a^2 Q}{k^2} + \frac{\pi^2 a^4 \text{Ta}}{k^2(a^4 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 \text{TaRo}(a^4 + \pi^2 Q \text{Pm}) - 4\pi^4 \xi^2 Q^2}{k^2(a^4 + \pi^2 Q)} - \frac{4\pi^2}{k^2} \cdot \xi^2 Q \text{Rb} \quad (4.4)$$

Мінімальне значення критичного числа Релея перебуває з умови $\partial \text{Ra}_{st} / \partial k = 0$ і відповідає хвильовим числам $k = k_c$. На Рис. 4.1 показана залежність стаціонарного числа Релея Ra_{st} від хвильових чисел k для різних профілів неоднорідного обертання (Ro) і магнітного поля (Rb). Мінімальному числу Ra_{st}^{\min} на графіках (Рис. 4.1) відповідає точка на нейтральній кривій, що розділяє області стійких та нестійких збурень.

На Рис. 4.1а показаний випадок, коли азимутального магнітного поля немає ($\xi = 0$). Тут видно, що зі зростанням позитивного профілю числа Россбі Ro мінімальне значення стаціонарного числа Релея Ra_{st}^{\min} також зростає, тобто підвищується поріг розвитку нестійкості. З іншого боку, для негативних профілів обертання: кеплерівського ($\text{Ro} = -3/4$) і релеєвського ($\text{Ro} = -1$) спостерігаємо зменшення критичного числа Релея, тобто нижчий поріг розвитку нестій-

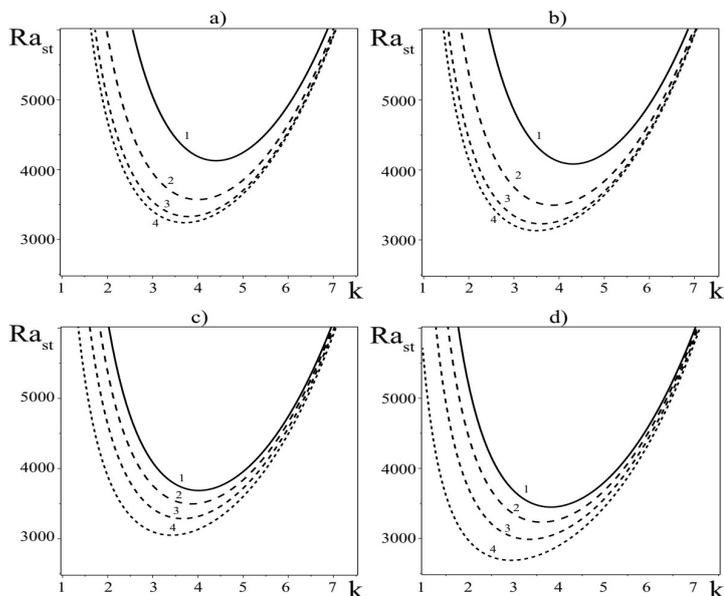


Рис. 4.1: Залежність R_{st} від k при $Q = 150$, $Ta = 500$, $Pm = 1$: а) $Ro = (2, 0, -3/4, -1)$ при $\xi = 0$ – криві (1,2,3,4); б) $Ro = (2, 0, -3/4, -1)$ при $Rb = -1/2$, $\xi = 1$ – криві (1,2,3,4); в) $Rb = (-1, -1/2, 0, 1/2)$ при $Ro = 0$, $\xi = 1$ – криві (1,2,3,4); д) $Rb = (-1, -1/2, 0, 1/2)$ при $Ro = -3/4$, $\xi = 1$ – криві (1,2,3,4).

кості порівняно з випадками однорідного ($Ro = 0$) і неоднорідного ($Ro = 2$) обертання. Ці результати узгоджуються з роботою [141]. Випадок однорідного ($Rb = -1/2$) азимутального магнітного поля з параметром $\xi = 1$ показаний на Рис. 4.1б. Звідси видно, що однорідне азимутальне магнітне поле сприяє зниженню порога нестійкості, тобто мінімальні критичні числа Релея для різних профілів обертання (числа Россбі Ro) менше, ніж при $\xi = 0$ (див. Рис. 4.1а). Наприклад, порівняємо мінімальні значення критичних чисел Релея для $Ro = 2$ на графіках Рис. 4.1а та Рис. 4.1б: $Ra_{st(a)}^{\min} \approx 4136 > Ra_{st(b)}^{\min} \approx 4085$. З Рис. 4.1б ($\xi = 1$, $Rb = -1/2$) бачимо, що негативні профілі обертання ($Ro < 0$) (криві 3,4) мають критичні числа Релея, які є меншими за величину, ніж для позитивних профілів обертання ($Ro \geq 0$) (криві 1,2). Досліджуємо вплив азимутального магнітного поля на стаціонарну конвекцію, фіксуючи параметр Ro для різних магнітних чисел Россбі ($Rb = -1, -1/2, 0, 1/2$) і $\xi = 1$. Рис. 4.1с показані результати для випадку однорідного обертання $Ro = 0$. Тут бачимо,

що з позитивних чисел $Rb \geq 0$ (криві 3,4) критичні числа Релея менше, ніж негативних чисел $Rb < 0$ (криві 1,2). Отже, залежно від профілю неоднорідності азимутального магнітного поля $B_{0\phi}(R) = CR^\alpha$ ($C = \text{const}$, α – довільне речове число) може або збільшуватися поріг нестійкості ($Rb < 0$), або зменшуватися ($Rb > 0$). Аналогічна картина спостерігається для кеплерівського профілю обертання $Ro = -3/4$ (див. Рис. 4.1d). Порівнюючи результати на Рис. 4.1c та Рис. 4.1d, можна побачити, що при профілі обертання $Ro = -3/4$ пороги нестійкості менше, ніж для випадку $Ro = 0$ при будь-яких профілях неоднорідності азимутального магнітного поля. Вираз для стаціонарного числа Релея (4.4) в граничному випадку однорідного аксіального магнітного поля ($\xi = 0$) збігається з результатами робіт [141, 155], а межі однорідного обертання ($Ro = 0$ і $\xi = 0$) з результатом Чандрасекара [40].

4.1.1.2 Коливальний режим конвекції

У випадку коливальних збурень ($\omega_i \neq 0$, $Im(Ra) = 0$) з формули (4.3) ми знаходимо критичне число Релея для коливальної нестійкості

$$\begin{aligned}
 Ra_{\text{osc}} &= \frac{a^2}{k^2(a^4 + \omega^2 Pm^2)} \times \\
 &\times [(a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 Pm)(a^4 + \omega^2 Pm Pr) - \omega^2 a^4(1 + Pm)(Pr - Pm)] + \\
 + \pi^2 Ta(1 + Ro) \cdot &\frac{(a^4 - \omega^2 Pm Pr)(a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 Pm) + \omega^2 a^4(1 + Pm)(Pm + Pr)}{k^2((a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 Pm)^2 + \omega^2 a^4(1 + Pm)^2)} + \\
 &+ \pi^4 Q(Ta Ro Pm - 4Q\xi^2) \times \\
 &\times \frac{(a^4 + \omega^2 Pm Pr)(a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 Pm) + \omega^2 a^4(1 + Pm)(Pr - Pm)}{k^2(a^4 + \omega^2 Pm^2)((a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 Pm)^2 + \omega^2 a^4(1 + Pm)^2)} - \\
 &- 4\pi^2 \xi^2 Q Rb \cdot \frac{a^4 + \omega^2 Pr Pm}{k^2(a^4 + \omega^2 Pm^2)}, \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Формула (4.5) у деяких граничних випадках містить відомі результати. Наприклад, для випадку однорідного обертання ($Ro = 0$) і рідини, яка не проводить струму ($\sigma = 0$), Чандрасекаром [40] було отримано вираз для критичного числа

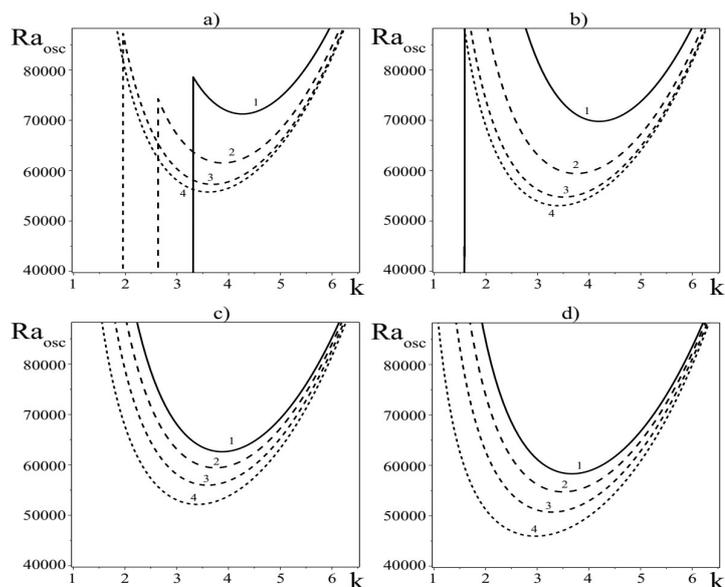


Рис. 4.2: Криві нейтральної стійкості (k, Ra_{osc}) при $Q = 150$, $Ta = 500$, $Pm = 1$: а) $Ro = (2, 0, -3/4, -1)$ при $\xi = 0$ – криві (1,2,3,4); б) $Ro = (2, 0, -3/4, -1)$ при $Rb = -1/2$, $\xi = 1$ – криві (1,2,3,4); в) $Rb = (-1, -1/2, 0, 1/2)$ при $Ro = 0$, $\xi = 1$ – криві (1,2,3,4); г) $Rb = (-1, -1/2, 0, 1/2)$ при $Ro = -3/4$, $\xi = 1$ – криві (1,2,3,4).

Релея для коливальної нестійкості:

$$Ra_{osc} = \frac{1}{k^2} \left[a^6 - \omega^2 a^2 Pr + \frac{\pi^2 Ta (a^4 + \omega^2 Pr)}{a^4 + \omega^2} \right].$$

У відсутність обертання ($Ta = 0$, $Ro = 0$), для замагніченої провідної рідини ($Q \neq 0$), критичне число Релея Ra_{osc} для коливальної конвекції також було отримано Чандрасекаром [40]:

$$Ra_{osc} = \frac{a^2}{k^2} \left[a^4 - \omega^2 Pr + \frac{\pi^2 Q (a^4 + \omega^2 Pr Pm)}{a^4 + \omega^2 Pm^2} \right].$$

Рис. 4.2 показана залежність критичного числа Релея Ra_{osc} для коливальної нестійкості від хвильових чисел k при різних профілях неоднорідного обертання Ro та неоднорідного магнітного поля Rb . На графіку Рис. 4.2а показаний випадок, коли азимутального магнітного поля немає $\xi = 0$, що відповідає результатам роботи [155]. З яких випливає, що при негативних числах Росбі $Ro < 0$ граничне число Релея Ra_{min}^{osc} знижується. На графіку Рис. 4.2б показаний ви-

падок однорідного азимутального магнітного поля ($Rb = -1/2$) з параметром $\xi = 1$. Як і у випадку стаціонарної конвекції, однорідне азимутальне магнітне поле сприяє зниженню порога коливальної нестійкості, тобто мінімальні критичні числа профілів обертання (числа Россбі Ro) менше, ніж при $xi = 0$ (див. Рис. 4.2а). Крім того, з Рис. 4.2b ($\xi = 1, Rb = -1/2$) бачимо, що негативні профілі обертання $Ro < 0$ (криві 3,4) мають критичні числа Релея, які менші за величиною, ніж для позитивних профілів обертання $Ro \geq 0$ (криві 1,2). Досліджуємо вплив азимутального магнітного поля на коливальну конвекцію, фіксуючи параметр Ro для різних магнітних чисел Россбі ($Rb = -1, -1/2, 0, 1/2$) та $\xi = 1$. Тут ми також отримуємо аналогічні результати, як у випадку стаціонарної конвекції. Рис. 4.2с показані результати випадку однорідного обертання $Ro = 0$. Звідси видно, що з позитивних чисел $Rb \geq 0$ (криві 3,4) критичні числа Релея менше, ніж негативних чисел $Rb < 0$ (криві 1,2). Отже, залежно від профілю неоднорідності азимутального магнітного поля може збільшуватися поріг коливальної нестійкості, або зменшуватися. Аналогічна картина спостерігається для кеплерівського профілю обертання $Ro = -3/4$ (див. Рис. 4.2d). Порівнюючи результати на Рис. 4.2с та Рис. 4.2d можна побачити, що з профілю обертання $Ro = -3/4$ пороги нестійкості менше, ніж для випадку $Ro = 0$ за будь-яких профілях неоднорідного азимутального магнітного поля.

Таким чином, пороги стаціонарної та коливальної нестійкості для конвекції в спіральному магнітному полі нижче, ніж для конвекції в постійному аксіальному магнітному полі за будь-яких профілів неоднорідного обертання (числах Россбі Ro).

4.2 Хаотична динаміка магнітної конвекції, що неоднорідно обертається, в спіральному магнітному полі

В цьому розділі буде досліджено слабонелінійний режим конвекції шляхом застосування розкладання фізичних величин у зрізаний ряд Фур'є до неліній-

ної системи рівнянь магнітоконвекції в середовищі, що неоднорідно обертається, у присутності спірального магнітного поля. В результаті такого підходу отримано динамічну систему рівнянь типу Лоренца у восьмивимірному фазовому просторі. Проведений аналітичний та чисельний аналіз цієї системи показав наявність хаотичних режимів поведінки магнітного поля, а також можливість інверсії магнітного поля системи [212].

4.2.1 Рівняння 8D нелінійної динаміки

Для опису нелінійних конвективних явищ у шару електропровідної рідини, що неоднорідно обертається, зручно перейти від циліндричної системи координат (R, φ, z) до локальної декартової (X, Y, Z) . Якщо розглянути фіксовану область шару рідини з радіусом R_0 та кутовою швидкістю обертання $\Omega_0 = \Omega(R_0)$, то координати $X = R - R_0$ відповідають радіальному напрямку, $Y = R_0(\varphi - \varphi_0)$ - азимутальному і $Z = z$ - вертикальному. Тоді неоднорідне обертання шару рідини локально можна уявити вигляді обертання з постійною кутовою швидкістю $\mathbf{\Omega}_0$ і азимутальним широм $\mathbf{U}_0 = -q\Omega_0 X \mathbf{e}_y$, де $q \equiv -d \ln \Omega / d \ln R$ - безрозмірний ширивий параметр, що визначається з профілю кутової швидкості обертання $\Omega(R) = \Omega_0(R/R_0)^{-q}$. При переході від циліндричної до локальної декартової системи координат ми отримали нелінійну систему безрозмірних рівнянь у термінах функції струму ψ та магнітного потенціалу φ [212]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial v}{\partial z} - \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - \text{Ra} \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2\xi \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \\ = \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \cdot J(\phi, \nabla^2 \phi) - \text{Pr}^{-1} \cdot J(\psi, \nabla^2 \psi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) v - \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro}) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + 2\xi \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q}(1 + \text{Rb}) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \\ = \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \cdot J(\phi, \tilde{v}) - \text{Pr}^{-1} \cdot J(\psi, v) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2 \right) \phi - \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\text{Pr}^{-1} J(\psi, \phi) \quad (4.8)$$

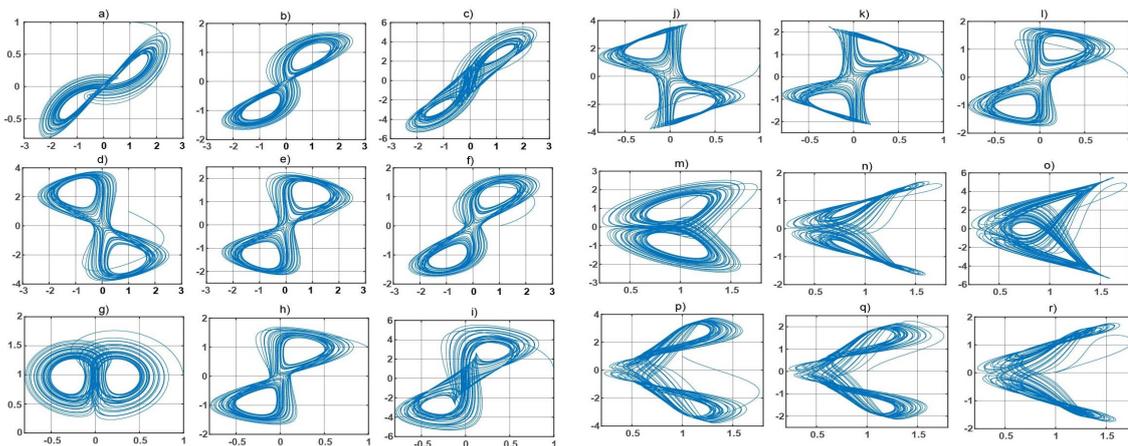


Рис. 4.3: Фазові траєкторії системи (4.14) для параметра Релея $R = 58$ у різних площинах.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \text{Pr}^{-1} \nabla^2 \right) \tilde{v} - \text{Pr}^{-1} \frac{\partial v}{\partial z} + \text{Ro} \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \phi}{\partial z} - 2\xi \text{Pr}^{-1} \text{Rb} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ = \text{Pr}^{-1} (J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v})) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \theta - \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\text{Pr}^{-1} J(\psi, \theta) \quad (4.10)$$

Систему рівнянь (4.6)-(4.10) доповнимо такими граничними умовами:

$$\psi = \nabla^2 \psi = \theta = \frac{d\phi}{dz} = 0, \quad \text{при } z = (0, 1)$$

$$\psi = \nabla^2 \psi = v = \tilde{v} = \phi = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = (0, L/h) \quad (4.11)$$

У разі коли зовнішнє азимутальне магнітне поле відсутнє ($\xi = 0$) система рівнянь (4.6)-(4.10) збігається з результатами роботи [131]. Представимо всі збурення в рівняннях (4.6)-(4.10) у вигляді ряду Фур'є з урахуванням граничних умов (4.11):

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}(t) \sin(mkx) \sin(n\pi z) \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin(mkx) \cos(n\pi z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{V}_{mn}(t) \sin(mkx) \sin(n\pi z) \\ \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}(t) \sin(mkx) \cos(n\pi z) \end{aligned} \quad (4.12)$$

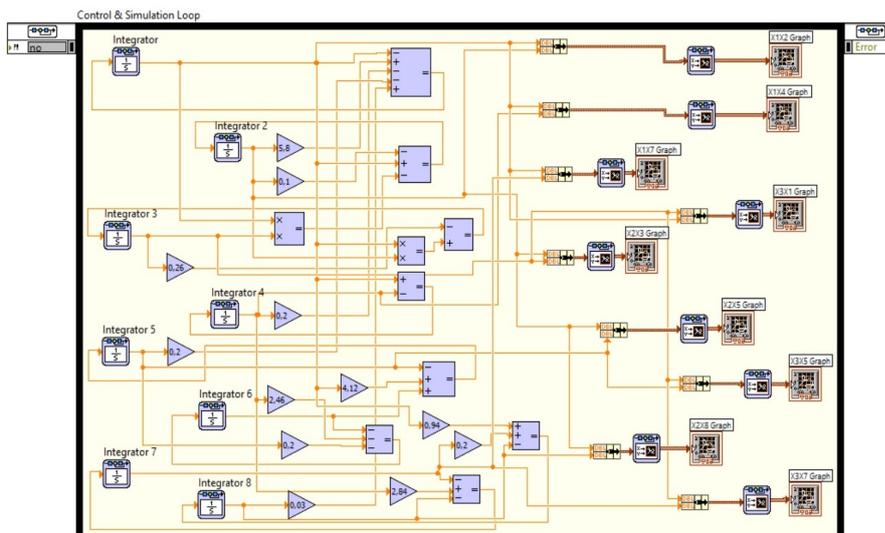


Рис. 4.4: Блок-схема реалізації хаотичної системи (4.14) у LabVIEW.

$$\tilde{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin(mkx) \sin(n\pi z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{W}_{mn}(t) \sin(mkx) \cos(n\pi z)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}(t) \cos(mkx) \sin(n\pi z)$$

Обмежимося мінімальним порядком розкладання Фур'є, саме для функції струму ψ розглянемо моди $(1, 1)$, y -компоненти швидкості $v - (1, 1) + (1, 1)$, ϕ магнітного потенціалу $-(1, 1)$, y -компоненти збурень магнітного поля $\tilde{v} - (1, 1) + (1, 1)$ і збурень температури $\theta - (1, 1) + (0, 2)$:

$$\psi(x, z, t) = A(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \quad A(t) = A_{11}(t)$$

$$v = V(t) \sin(kx) \cos(\pi z) + \tilde{V}(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \quad V(t) = V_{11}(t), \quad \tilde{V}(t) = \tilde{V}_{11}(t),$$

$$\phi(x, z, t) = B(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \quad B(t) = B_{11}(t) \quad (4.13)$$

$$\tilde{v} = W(t) \sin(kx) \sin(\pi z) + \tilde{W}(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \quad W(t) = W_{11}(t), \quad \tilde{W}(t) = \tilde{W}_{11}(t),$$

$$\theta(x, y, t) = C_1(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + C_2(t) \sin(2\pi z), \quad C_1(t) = C_{11}(t), \quad C_2(t) = C_{02}(t).$$

В результаті підстановки розкладання (4.13) у рівняння (4.6)-(4.10) отримаємо

нелінійну динамічну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -X + RY - TV - HU + \tilde{H}\tilde{W} \\ \dot{\mathcal{V}} = -\mathcal{V} + H\mathcal{W} + \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro})X \\ \dot{\tilde{\mathcal{V}}} = -\tilde{\mathcal{V}} + \tilde{\xi}H(1 + \text{Rb})U - H\tilde{W} \\ \dot{U} = -\text{Pm}^{-1}U + \text{Pr}^{-1}X \\ \dot{\mathcal{W}} = -\text{Pm}^{-1}\mathcal{W} - \text{Pr}^{-1}\mathcal{V} + \text{Ro}\sqrt{\text{Ta}}U \\ \dot{\tilde{\mathcal{W}}} = -\text{Pm}^{-1}\tilde{\mathcal{W}} + \text{Pr}^{-1}\tilde{\mathcal{V}} + \tilde{\xi}\text{Pr}^{-1}\text{Rb}X \\ \dot{Y} = \text{Pr}^{-1}(-Y + X - XZ) \\ \dot{Z} = \text{Pr}^{-1}(-bZ + XY) \end{array} \right. \quad (4.14)$$

де точка зверху означає диференціювання за часом \tilde{t} . У рівнянні (4.14) введено нові позначення для безрозмірних параметрів

$$\tilde{H} = \frac{2\xi\pi}{a^4}H, \quad \tilde{\xi} = \frac{2\xi a^2}{\pi},$$

та премасштабованих змінних

$$\tilde{\mathcal{V}}(\tilde{t}) = \frac{k\tilde{V}(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{t}) = \frac{a^2k}{\pi\sqrt{2}}\tilde{W}(\tilde{t}).$$

Останні два нелінійних рівняння в системі (4.14) мають схожість з аналогічними рівняннями в системі Лоренца [162]. Тому отриману нами нелінійну систему рівнянь (4.14) віднесемо до рівнянь типу Лоренца для восьмимірною ($8D$) фазового простору. У граничному випадку, коли є тільки постійне зовнішнє аксіальне магнітне поле, рівняння (4.14) переходять до рівнянь Лоренца для шестимірною ($6D$) фазового простору (3.29). Нелінійна система рівнянь (4.14) визначає рух траєкторії в ($8D$)-мірному фазовому просторі і залежить від великої кількості безрозмірних параметрів (11 параметрів). З цієї причини вона повинна мати величезне різноманіття режимів поведінки. В роботі [212] проведено аналітичний і чисельний аналіз динамічної системи рівнянь (4.14), у результаті якого

визначено типи нерухомих точок, встановлено умови виникнення хаотичного режиму та побудовано фазові портрети атракторів.

4.2.2 Комп'ютерне моделювання 8D лоренцеподібної хаотичної системи

Рівняння (4.14) доповнимо початковими умовами: $X(0) = Y(0) = Z(0) = U(0) = \mathcal{V}(0) = \tilde{\mathcal{V}}(0) = \mathcal{W}(0) = \tilde{\mathcal{W}}(0) = 1$. Для дослідження хаотичної поведінки системи (4.14) можна вирахувати показники Ляпунова, які використовуються для кількісної оцінки ступеня хаосу в системі, а також розмірність Каплана-Йорка, що характеризує фрактальну структуру дивного атрактора. Для системи рівнянь (4.14) при $R = 58$ обчислено максимальний показник Ляпунова: $L_{\max} = 0.0974135$. Крім того, використовуючи ортогоналізацію Грама-Шмідта, визначено всі показники Ляпунова [215]:

$$L_1 = 0.0914666, \quad L_2 = 0.0232093 \approx 0, \quad L_3 = -0.549477,$$

$$L_4 = -0.983332, \quad L_5 = -1.01154, \quad L_6 = -1.01105,$$

$$L_7 = -1.15546, \quad L_8 = -1.77049.$$

Спектр показників Ляпунова містить один додатний показник, що свідчить про хаотичну поведінку системи (4.14). Максимальний показник Ляпунова (MLE) нової хаотичної системи (4.14) відповідає значення $L_{1max} = 0.0914666$. Оскільки $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 = -6.36667 < 0$, то нова хаотична система (4.14) дисипативна. Розмір Каплана-Йорка нової хаотичної системи (4.14) обчислюється за формулою 3.31. Розмір розмірності Каплана-Йорка виявляється не цілим числом $D_{KY} \approx 2.2087$, а дробовим або фрактальним. Отже, ця система поводить хаотично. Результати моделювання рівнянь (4.14) в середовищі Matlab-Simulink наведено на Рис. 4.3. Чітко спостерігається хаотична поведінка змінних стану. На Рис. 4.4 представлено блок-схему хаотичної системи (4.14), реалізовану за допомогою інструментального набору Control & Simulation у се-

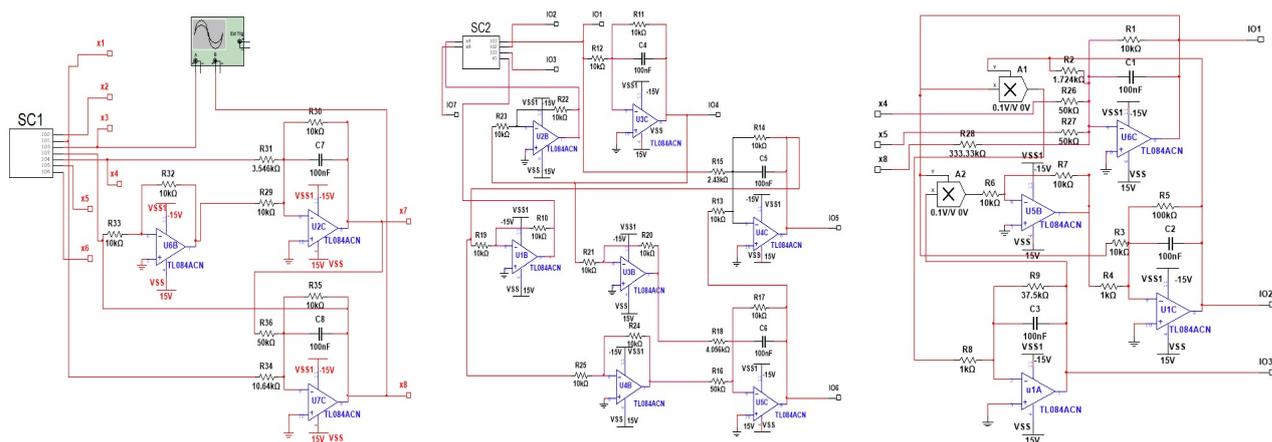


Рис. 4.5: Електронна схема генератора 8D хаотичних коливань на основі системи рівнянь (4.14).

редовищі LabVIEW. У роботі [215] показано, що результати моделювання хаотичної системи (4.14) в Matlab-Simulink та LabVIEW узгоджуються. Крім того, у роботі [215] представлено схемну реалізацію системи (4.14) в середовищі Multisim (див. Рис. 4.5). Розроблений генератор хаотичних сигналів може бути використаний як для експериментальної перевірки його хаотичних властивостей, так і для застосувань у захищеному зв'язку.

4.3 Магнітна конвекція в шарі нанорідини, що нерівномірно обертається в спіральному магнітному полі

У цьому розділі буде досліджено стійкість замагнічених потоків шару електропровідної нанорідини, що неоднорідно обертається, з урахуванням ефектів броунівської дифузії та термофорезу [216]. Для випадку, коли буде відсутній градієнт температури, будуть розглянуті нові види магнітообертальної нестійкості в аксіальному, азимутальному та спіральному магнітних полях у тонких шарах нанорідини. Будуть отримані інкременти та області розвитку цих нестійкостей залежно від профілю кутової швидкості обертання (числа Россбі Ro) та радіального хвильового числа k . За наявності градієнтів температури і концентрації наночастинок будуть досліджені стаціонарні режими конвекції, що

неоднорідно обертається, в аксіальному і спіральному магнітних полях. Будуть отримані вирази для критичних чисел Релея Ra_{st} і побудовані криві нейтральної стійкості залежно від профілю кутової швидкості обертання, профілю зовнішнього азимутального магнітного поля (магнітного числа Россбі Rb) і радіального хвильового числа k . Будуть визначені умови стабілізації та дестабілізації стаціонарної конвекції в аксіальному та спіральному магнітних полях.

4.3.1 Постановка задачі та загальне дисперсійне рівняння

Розглянемо шар нестисненої в'язкої електропровідної нанорідини товщиною h , укладений між двома обертовими циліндрами з внутрішнім радіусом R_{in} і зовнішнім R_{out} , причому $h \ll (R_{out} - R_{in})$. Нанорідина розташована між двома паралельними площинами $z = 0$ і $z = h$, де підтримуються сталі температура та об'ємна частка наночастинок: $T = T_d, \phi = \phi_d$ при $z = 0$ і $T = T_u, \phi = \phi_u$ при $z = h$, причому $T_d > T_u, \phi_u > \phi_d$. Вважаємо, що рідина перебуває в постійному гравітаційному полі \mathbf{g} , спрямованому уздовж осі OZ вертикально вниз: $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Електропровідна рідина обертається з кутовою швидкістю Ω , спрямованою вертикально вгору уздовж осі OZ . Обертання рідини створює стаціонарний потік в азимутальному напрямі: $\mathbf{V}_0 = \mathbf{e}_\varphi \Omega(R)R$, де $\Omega(R)$ — кутова швидкість обертання, що довільно змінюється залежно від координати R . Крім того, ми вважаємо, що нанорідина знаходиться в спіральному магнітному полі \mathbf{H}_0 , яке подамо у вигляді суми неоднорідного азимутального $H_{0\varphi}(R)$ і однорідного аксіального H_{0z} полів (4.1). Для опису конвективних процесів використовуватимемо рівняння гідродинаміки Буссінеска-Обербека для електропровідної стисливої нанорідини [217], записані в циліндричній системі координат. Застосовуючи методику, викладену в розділі 3.2.1, у рамках одномодового наближення, було отримано загальне дисперсійне рівняння такого вигляду:

$$Ra = [a^2 \Gamma_A^4 \Gamma_\eta (a^2 \Gamma_A^2 \Gamma_\phi^2 \Gamma_\chi - m_0) + a^2 \Gamma_A^2 \Gamma_\phi^2 \Gamma_\chi m_1 -$$

$$\begin{aligned}
& -\pi^2 a^2 \Gamma_A^2 \Gamma_\phi \left(\frac{N_B}{L_e} (1 - 2N_A) \Gamma_\phi + \frac{N_A N_B}{L_e} a^2 \right) \cdot m_2 \Big] \times \\
& \times \left[k^2 \Gamma_\eta \Gamma_\phi (a^2 \Gamma_\eta \Gamma_\phi \Gamma_A^4 + \frac{\pi^2}{L_e} (N_B - N_A) \cdot m_2) \right]^{-1}, \quad (4.15)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\Gamma_A^2 &= (\gamma + a^2)(\gamma \text{Pm} + a^2) + \pi^2 \text{Q}, \quad \Gamma_\chi = \gamma \text{Pr} + a^2, \quad \Gamma_\eta = \gamma \text{Pm} + a^2, \\
\Gamma_\phi &= \gamma \text{Pr} L_e + a^2, \quad a^2 = \pi^2 + k^2, \quad m_0 = k^2 \text{R}_n \Gamma_\eta \Gamma_\phi (L_e \Gamma_\chi + a^2 N_A), \\
m_1 &= \pi^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^3 + \pi^4 \text{Q} \text{Ta} \text{Ro} \text{Pm} \Gamma_\eta - 4\pi^4 \text{Q}^2 \xi^2 \Gamma_\eta - 4\pi^2 \text{Q} \xi^2 \Gamma_A^2 \text{Rb} \Gamma_\eta, \\
m_2 &= 2\pi^2 \text{Q} \xi \sqrt{\text{Ta}} [(2 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^2 + \text{Pm} \text{Ro} (\pi^2 \text{Q} - \Gamma_A^2)].
\end{aligned}$$

У відсутності азимутального магнітного поля ($\xi = \frac{H_{0z} h}{R_0 H_0}$) і наночастинок ($\text{R}_n = N_B = 0$) дисперсійне рівняння (4.15) збігається з результатами роботи [155], а при $\xi \neq 0$ і $\text{R}_n \neq 0$ воно збігається з результатами роботи [212].

4.3.1.1 Стандартна МОН у тонких шарах нанорідини

Розглянемо випадок, коли температура на межах шару нанорідин є однаковою ($\text{Ra} = N_A = 0$), а зовнішнє азимутальне магнітне поле відсутнє ($\xi = 0$). Тоді з рівняння (4.15) отримуємо дисперсійне рівняння для стандартної магнітної конвекції у тонкому шарі нанорідини у вигляді полінома шостого ступеня відносно γ :

$$\mathcal{P}(\gamma) \equiv a_0 \gamma^6 + a_1 \gamma^5 + a_2 \gamma^4 + a_3 \gamma^3 + a_4 \gamma^2 + a_5 \gamma + a_6 = 0, \quad (4.16)$$

де a_j ($j = 0 \dots 6$) – коефіцієнти. Для «чистої» електропровідної рідини з дисперсійного рівняння (4.16) ми отримуємо результати роботи [141]. Висновок про стійкість обурень, що описуються рівнянням (4.16) з дійсними коефіцієнтами, можна зробити шляхом аналізу цих коефіцієнтів, застосовуючи критерій Рауса-Гурвіца або Льенара-Шипара [147]. Згідно з цими критеріями, дисипативні процеси сприяють стабілізації стійкості течій нанорідини. Додатковими стабілізую-

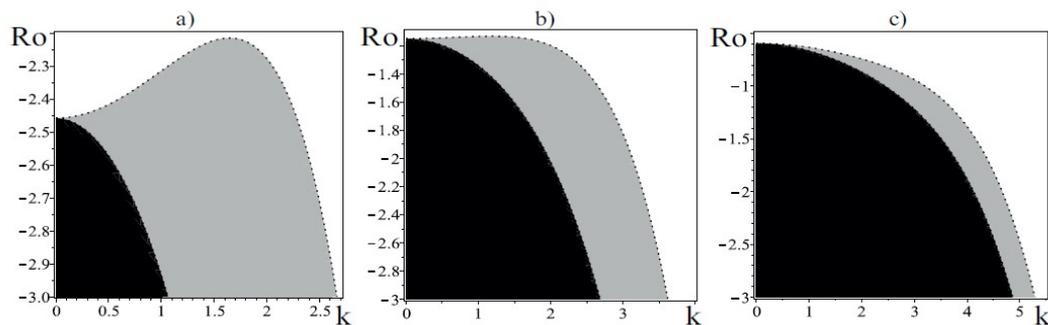


Рис. 4.6: Чорним кольором показана область, в якій виникає стандартна МОН в «чистої» рідини і сірим кольором в нанорідини для параметрів: $Q = 10$, $Pm = 1$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$. Графіки побудовані для чисел Тейлора: а) $Ta = 100$, б) $Ta = 300$, в) $Ta = 2000$.

чими факторами є однорідне магнітне поле та неоднорідне обертання за умови, що профіль кутової швидкості відповідає позитивним числам Россбі ($Ro > 0$). Натомість концентрація наночастинок спричиняє дестабілізацію течії нанорідини. Нерівність $a_6 > 0$ запишемо у вигляді:

$$Ro > -\frac{a^2(a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^4 Ta}{\pi^2 Ta(a^4 + \pi^2 Q Pm)} + \frac{k^2(a^4 + \pi^2 Q)R_n L_e}{\pi^2 Ta(a^4 + \pi^2 Q Pm)} = Ro_{cr}, \quad (4.17)$$

де параметр Ro_{cr} — критичне число Россбі на межі стійкості, що відповідає нейтральному стану $\gamma = 0$. Вираз (4.17) у граничному випадку «чистої» електропровідної рідини набуває відомого вигляду для критичного числа Россбі Ro , отриманого в [214]

$$Ro_{cr} = -\frac{a^2(a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^4 Ta}{\pi^2 Ta(a^4 + \pi^2 Q Pm)}.$$

Використовуючи вираз для критичного числа Россбі (4.17), чисельним методом визначимо області розвитку стандартної МОН у «чистій» рідині та нанорідині. На Рис. 4.6 виділено області нестійкості для чисел Россбі $Ro < Ro_{cr}$ при зміні параметра обертання Ta (числа Тейлора) у площині (k, Ta) . Чорним кольором на Рис. 4.6 показано області нестійкості в «чистій» рідині, а сірим кольором — області нестійкості в нанорідині. Із графіків (Рис. 4.6) видно, що за невеликих

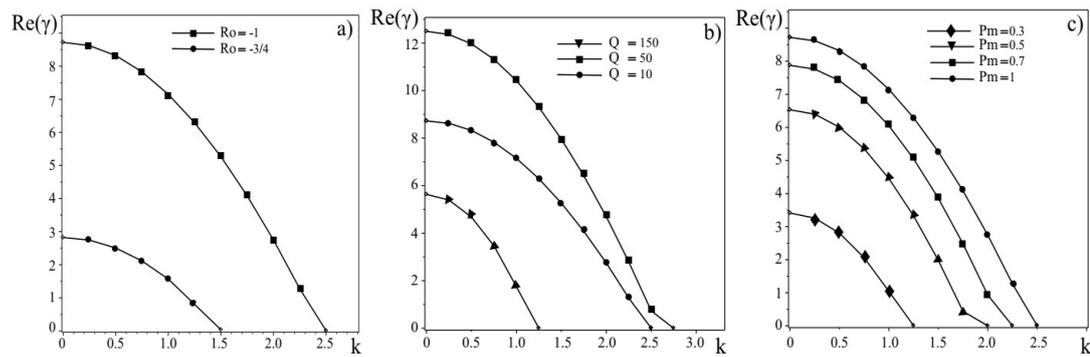


Рис. 4.7: Залежність інкременту ($\text{Re}(\gamma) > 0$) стандартної МОН у нанорідині від k : а) профілі обертання $\text{Ro} = (-1, -3/4)$; б) аксіальне магнітне поле $Q = (10, 50, 150)$; с) магнітне число Прандтля $\text{Pm} = (0.3, 0.5, 0.7, 1)$.

значень числа Тейлора ($\text{Ta} = 100, 300$) область розвитку стандартної МОН в нанорідині (Рис. 4.6а–б) значно більша за область нестійкості для «чистої» рідини. Навпаки, при великих значеннях числа Тейлора ($\text{Ta} = 2000$) області нестійкості для нанорідині та «чистої» рідини вже не так сильно відрізняються. Значення параметрів нанорідині (наприклад, Al_2O_3 -вода) [199]: $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $\text{Pr} = 5$, $N_A = 5$, $N_B = 7.5 \times 10^{-4}$.

На Рис. 4.7 представлено чисельні результати для темпу зростання стандартної МОН, тобто для позитивного дійсного кореня ($\text{Re}(\gamma) > 0$) дисперсійного рівняння (4.16), залежно від радіального хвильового числа k . Вважаючи параметри нанорідині фіксованими ($\text{Pr} = 5$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$), на Рис. 4.7а) видно, що темпи зростання осесиметричних збурень у разі релеєвського профілю обертання ($\text{Ro} = -1$) вищі, ніж у випадку кеплерівського профілю обертання ($\text{Ro} = -3/4$) при певних значеннях числа Тейлора Ta . На Рис. 4.7б) показано темпи зростання стандартної МОН за різних значень аксіального магнітного поля ($Q = 10, 50, 150$) для релеєвського профілю обертання ($\text{Ro} = -1$) та числа Тейлора $\text{Ta} = 2000$. Тут спостерігаємо, що збільшення напруженості аксіального магнітного поля H_{0z} може як підвищувати інкремент нестійкості ($Q = 10 \rightarrow Q = 50$), так і знижувати його при подальшому збільшенні ($Q = 50 \rightarrow 150$). Варіації магнітного числа Прандтля Pm також можуть сут-

тево впливати на розвиток стандартної МОН в нанорідині (див. Рис. 4.7с)). Для фіксованих параметрів $Ta = 2000$, $Q = 10$, $Ro = -1$ спостерігається, що темпи зростання збурень значно знижуються за малих значень числа Прандтля ($Pm \ll 1$). Зазначимо, що змінюючи фізичні характеристики нанорідини, зокрема електропровідність σ , теплопровідність χ та в'язкість ν , які визначають безрозмірні параметри Q , Pr , Pm , Ta , Ro , цілком можливий розвиток стандартної МОН.

4.3.1.2 Азимутальна МОН у тонких шарах нанорідини

Розглянемо шар, що неоднорідно обертається, нанорідини з постійною і однаковою температурою на межах шару в зовнішньому азимутальному магнітному полі $H_{0\varphi}$. У цьому випадку осьове магнітне поле дорівнює нулю $H_{0z} = 0$ і $Ra = N_A = 0$. При цьому стаціонарний потік нанорідини збігається із напрямком магнітного поля. Таким чином, така геометрія задачі відповідає азимутальній МОН [213]. Дисперсійне рівняння для азимутальної МОН у тонких шарах нанорідини отримаємо з рівняння (4.15), вважаючи $H_{0z} = 0$. З аналізу отриманого дисперсійного рівняння випливає, що неоднорідне обертання з позитивними числами Россбі ($Ro > 0$) чинить стабілізуючий вплив, тоді як концентрація наночастинок (члени з концентраційним числом Релея R_n) сприяє дестабілізації. Азимутальне магнітне поле $H_{0\varphi}$ може мати як стабілізуючий, так і дестабілізуючий вплив залежно від знака магнітного числа Россбі R_b . Умова $a_6 > 0$ дає наступний критерій стійкості:

$$Ro > -1 - \frac{a^6}{\pi^2 Ta} + \frac{k^2 R_n L_e}{\pi^2 Ta} + \frac{4Q_\varphi R_b}{Ta} = Ro_{cr} \quad (4.18)$$

або у розмірних змінних

$$Ro > -1 - \frac{\omega_\nu^2}{4\alpha^2 \Omega^2} + R_b \frac{\omega_{A\varphi}^2 \omega_\nu}{\Omega^2 \omega_\eta} + (1 - \alpha^2) \frac{R_n L_e \omega_\nu^2}{4\alpha^2 \Omega^2 (|\mathbf{k}|h)^4}.$$

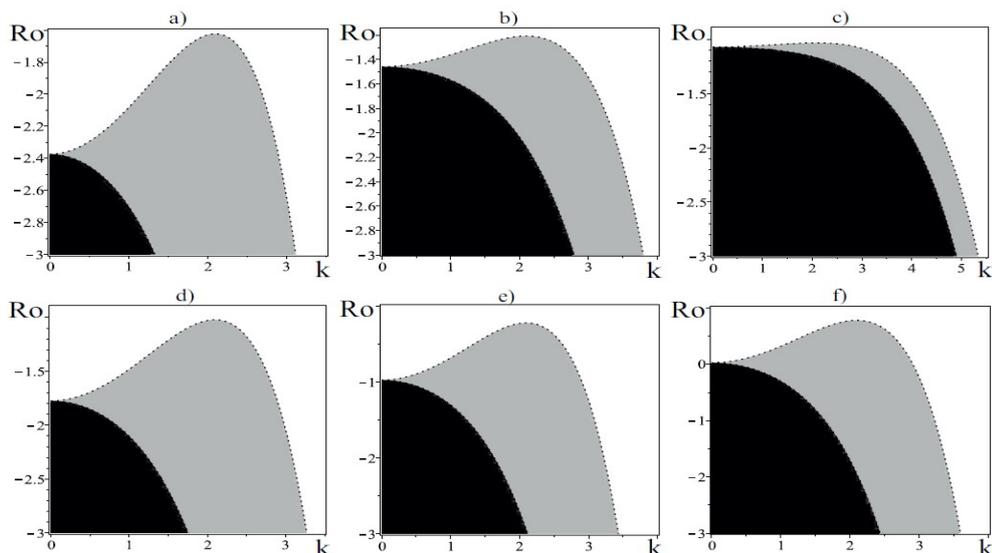


Рис. 4.8: Чорним кольором показана область, в якій виникає азимутальна МОН в чистій рідині і сірим кольором в нанорідині. Верхні графіки побудовані для чисел Тейлора: а) $Ta = 100$, б) $Ta = 300$, в) $Ta = 2000$ при фіксованих параметрах $Q_\varphi = 10$, $Rb = -1$, R . Нижні графіки побудовані для азимутальних чисел Чандрасекара: д) $Q_\varphi = 10$; е) $Q_\varphi = 50$, ф) $Q_\varphi = 100$ при фіксованих параметрах $Ta = 100$, $Rb = 1/2$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$.

Тут $Q_\varphi = \frac{\mu_e H_0 \varphi^2 h^4}{4\pi \rho_0 R_0^2 \nu \eta}$ – азимутальне число Чандрасекара. Для випадку «чистої» електропровідної рідини критерій стійкості (4.18) при $R_n = 0$ спрощується до більш простого виразу, отриманого в роботі [218]. При $\omega_{A\varphi} = 0$ і $R_n = 0$ критерій стійкості (4.18) узгоджується з результатами роботи [219]. Очевидно, що потік ідеальної нанорідини, що обертається, при $\omega_\nu = \omega_\eta$ і $\omega_\nu \rightarrow 0$, на який діє азимутальне магнітне поле, залишається стійким щодо осесиметричних збурень, якщо виконується нерівність

$$Ro > -1 + Rb \frac{\omega_{A\varphi}^2}{\Omega^2} \quad (4.19)$$

Течія ідеальної «чистої» рідини була розглянута в [121], де кінетична та магнітна енергії є рівними: $\frac{\rho_0(\Omega R)^2}{2} = \frac{H_{0\varphi}^2}{4\pi}$. В роботі [121] було знайдено точне стаціонарне розв'язок рівнянь ідеальної магнітної гідродинаміки: $\Omega = H_{0\varphi}/R\sqrt{2\pi\rho_0}$, $P = \text{const}$, яке називається чандрасекарівською еквіпартицією. Там же було доведено, що таке течія є маргінально стійкою. З еквіпартиції Чандрасекара впливає,

що [213]:

$$\omega_{A\varphi} = \frac{\mu_e H_{0\varphi}^2}{4\pi\rho_0 R_0^2} = \Omega, \quad \text{Ro} = \text{Rb} = -1 \quad (4.20)$$

Випадок чандрасекарівської еквіпартиції (4.20) задовольняє нерівності (4.19). Отже, критерії стійкості для ідеальних нанорідин та «чистих рідин» збігаються з (4.19).

Побудуємо області розвитку азимутальної МОН для різних значень параметрів обертання Ta (числа Тейлора), азимутального магнітного поля Q_φ (азимутальне число Чандрасекара) та магнітного числа Россбі Rb . Для параметрів $Rb = -1, Q_\varphi = 10, R_n = 0.122, L_e = 5000$ на Рис. 4.8a)-c) показано області розвитку азимутальної МОН у площині (k, Ro) для різних чисел Тейлора $Ta = 100, 300, 2000$. З Рис. 4.8a)-c) видно, що наявність концентрації наночастинок сприяє збільшенню області нестійкості порівняно з «чистим» електропровідним середовищем. Рис. 4.8d)-f) показано області розвитку азимутальної МОН з позитивним профілем неоднорідного магнітного поля $Rb = 1/2$ у площині (k, Ro) для різних азимутальних чисел Чандрасекара $Q_\varphi = 10, 50, 100$. Інші параметри: $Ta = 100, R_n = 0.122, L_e = 5000$ вважалися фіксованими. Тут також видно (див. Рис. 4.8d)-f)), що наявність концентрації наночастинок сприяє збільшенню області нестійкості порівняно з чистим електропровідним середовищем. З іншого боку, зі збільшенням величини азимутального магнітного поля (числа Q_φ) межа області нестійкості зміщується в бік позитивних чисел Россбі ($Ro > 0$).

З чисельного аналізу дисперсійного рівняння визначимо залежність інкременту ($\text{Re}(\gamma) > 0$) азимутальної МОН від радіального хвильового числа k для раніше наведених параметрів нанорідини. Рис. 4.9a) показано вплив різних профілів неоднорідного азимутального магнітного поля (магнітні числа Россбі $Rb = -1, 0, 1/2$) на інкремент АМОН для наступних параметрів: $Ta = 2000, Ro = -1.2, Q_\varphi = 10, P_m = 1$. Звідси бачимо, що темпи зростання збурень тут вищі для позитивних магнітних чисел Россбі $Rb > 0$. Далі, дослі-

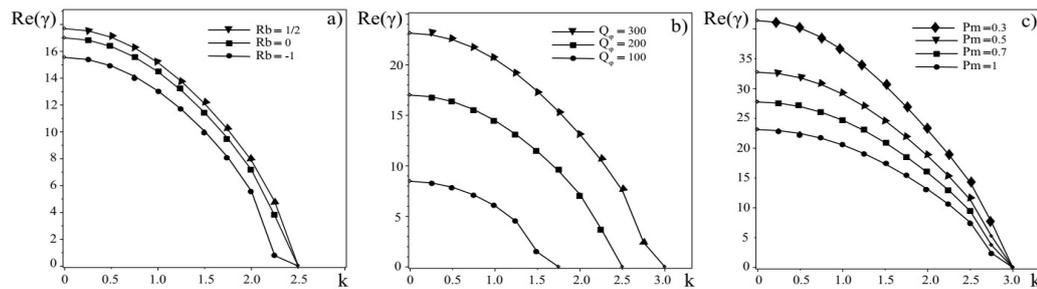


Рис. 4.9: Залежність інкременту ($\text{Re}(\gamma) > 0$) азимутальної МОН нанорідини від радіального хвильового числа k . На графіках а), б), с) показані відповідно ефекти впливу неоднорідного магнітного поля азимутального при $Rb = -1, 0, 1/2$, величини азимутального магнітного поля при $Q_\varphi = 100, 200, 300$ і магнітного числа Прандтля при $Pm = 0.3, 0.5, 0.7, 1$ на азимутальну МОН.

джуємо вплив ефекту посилення азимутального магнітного поля (азимутальні числа Chandrasekhara $Q_\varphi = 100, 200, 300$) на розвиток АМОН для фіксованих параметрів: $Ta = 300, Ro = -1, Rb = 1/2, Pm = 1$. Відповідно до результатів, показаних на Рис. 4.9б), темпи зростання збурень стають вищими із збільшенням напруженості азимутального магнітного поля $H_{0\varphi}$. Рис. 4.9с) наведено чисельні результати для інкременту АМОН $\text{Re}\gamma(k)$, отримані для різних значень магнітного числа Прандтля $Pm = 0.3, 0.5, 0.7, 1$ фіксованих значеннях: $Ta = 300, Ro = -1, Rb = 1/2$. Як видно з Рис. 4.9с), темпи зростання збурень збільшуються для магнітних чисел Прандтля $Pm < 1$. Таким чином, АМОН в нанорідини реалізується при збільшенні неоднорідного азимутального магнітного поля $H_{0\varphi} = CR^\alpha$ (де $\alpha > 1$) з позитивним профілем $Rb > 0$ для магнітних чисел Прандтля $Pm \leq 1$.

4.3.1.3 Спіральна МОН у тонких шарах нанорідини

У разі, коли $Ra = N_A = 0$ з рівняння (4.15) ми отримаємо дисперсійне рівняння для спіральної МОН (СМОН) у тонких шарах нанорідини. З аналізу отриманого дисперсійного рівняння випливає, що дестабілізація осесиметричних збурень може бути викликана неоднорідним обертанням з негативним

профілем ($Ro < 0$), спіральним магнітним полем з позитивним профілем неоднорідного азимутального магнітного поля ($Rb > 0$), а також спільним ефектом спірального магнітного поля та приросту наночастинок ($N_B \neq 0$), якщо магнітне число Прандтля $Pm \neq 1$. Оскільки перехід до нестійкості відбувається через точку $\gamma = 0$, отримуємо необхідну і достатню умову стійкості нанорідкості, що обертається, щодо осесиметричних обурень.

$$Ro > \frac{-a^2(a^4 + \pi^2 Q)^2 - \pi^2 a^4 Ta + k^2(a^4 + \pi^2 Q)R_n L_e}{\pi^2 Ta(a^4 + \pi^2 Q Pm) - 2\pi^4 Q \xi \sqrt{Ta} \frac{N_B}{L_e} (1 - Pm)} + \frac{4Q\xi^2(Rb(a^4 + \pi^2 Q) + \pi^2 Q) + 4\pi^2 Q \xi \sqrt{Ta} \frac{N_B}{L_e}}{Ta(a^4 + \pi^2 Q Pm) - 2\pi^2 Q \xi \sqrt{Ta} \frac{N_B}{L_e} (1 - Pm)} = Ro_{cr}, \quad (4.21)$$

або у розмірних змінних

$$Ro > \frac{-(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)^2 - 4\alpha^2 \Omega^2 \omega_\eta^2 + (1 - \alpha^2)(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)R_n L_e \frac{\omega_\nu \omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)^4}}{4\alpha^2 \Omega^2 (\omega_A^2 + \omega_\eta^2) - 4\alpha^3 \Omega \omega_A \omega_{A\varphi} \frac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)} \frac{N_B}{L_e} (1 - Pm)} + \frac{\omega_{A\varphi}^2 (Rb(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta) + \omega_A^2) + 2\alpha \Omega \omega_A \omega_{A\varphi} \frac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)} \frac{N_B}{L_e}}{\Omega^2 (\omega_A^2 + \omega_\eta^2) - \alpha \Omega \omega_A \omega_{A\varphi} \frac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)} \frac{N_B}{L_e} (1 - Pm)} = Ro_{cr}.$$

Умова стійкості (4.21) включає, отримані в попередніх розділах, критерії стійкості для стандартної МОН при $H_{0\varphi} = 0$ і азимутальної МВН при $H_{0z} = 0$. Якщо $Ro = 0$ і $Ta = 0$, то необхідна і достатня умова стійкості нанорідини до осесиметричних збурень дає обмеження на профіль неоднорідного азимутального магнітного поля

$$Rb > \frac{a^2(a^4 + \pi^2 Q)^2 - 4\pi^4 Q^2 \xi^2 - k^2 R_n L_e (a^4 + \pi^2 Q)}{4\pi^2 Q \xi^2 (a^4 + \pi^2 Q)} = Rb_{cr} \quad (4.22)$$

або у розмірних змінних

$$Rb > \frac{(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)^2 - 4\alpha^2 \omega_A^2 \omega_{A\varphi}^2 - (1 - \alpha^2) \frac{\omega_\nu \omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)^4} R_n L_e (\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)}{4\alpha^2 \omega_{A\varphi}^2 (\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)} = Rb_{cr}.$$

Вираз (4.22) перетворюється на відомий вираз для критичного магнітного числа Россбі Rb_{cr} у межовому випадку чистої рідини при $R_n = 0$, який був отриманий

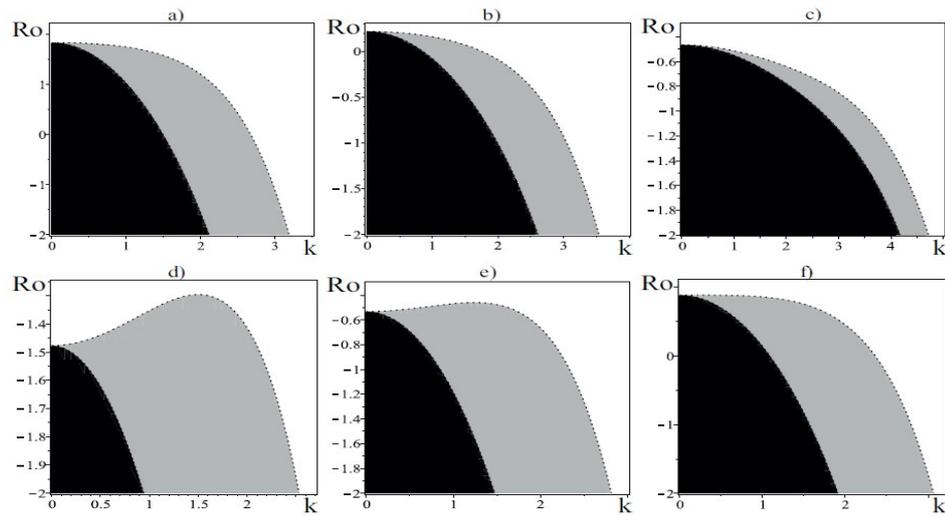


Рис. 4.10: Чорним кольором показана область, в якій виникає спіральна МОН в чистій рідині і сірим кольором в нанорідині. Верхні графіки побудовані для чисел Тейлора: а) $Ta = 100$; б) $Ta = 300$; в) $Ta = 2000$ при фіксованих параметрах $Q = 10$, $Q_\varphi = 100$, $Pm = 0.7$, $Rb = 1/2$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$. Нижні графіки побудовані для азимутального числа Chandrasekara: д) $Q_\varphi = 30$; е) $Q_\varphi = 50$; ф) $Q_\varphi = 80$ при фіксованих параметрах $Q = 10$, $Ta = 100$, $Pm = 0.7$, $Rb = 1/2$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$.

у роботі [220]. Визначимо галузі розвитку СМОН в «чистій» рідині та нанорідині за допомогою чисельного аналізу, з виразу (4.21) для критичного числа Россбі. Рис. 4.10а)-с) сірим кольором виділені області нестійкості нанорідини для числа Россбі $Ro < Ro_{crit}$ при зміні параметра обертання $Ta = 100, 300, 2000$ (число Тейлора) у площині (k, Ro) . Інші параметри нанорідини вважалися фіксованими: $Q = 10$, $Q_\varphi = 100$, $Pm = 0.7$, $Rb = 1/2$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$. З Рис. 4.10а)-с) видно, що наявність концентрації наночастинок сприяє збільшенню області нестійкості в порівнянні з «чистим» електропровідним середовищем, для якої області нестійкості показані чорним кольором на Рис. 4.10. Рис. 4.10д)-ф) показані області розвитку спіральної МОН з позитивним профілем неоднорідного магнітного поля $Rb = 1/2$ у площині (k, Ro) для різних азимутальних чисел Chandrasekara Q_φ . При фіксованих параметрах: $Q = 10$, $Ta = 100$, $Pm = 0.7$, $Rb = 1/2$, $R_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$. Тут ми також бачимо (див. Рис. 4.10д)-ф)), що наявність концентрації нано-

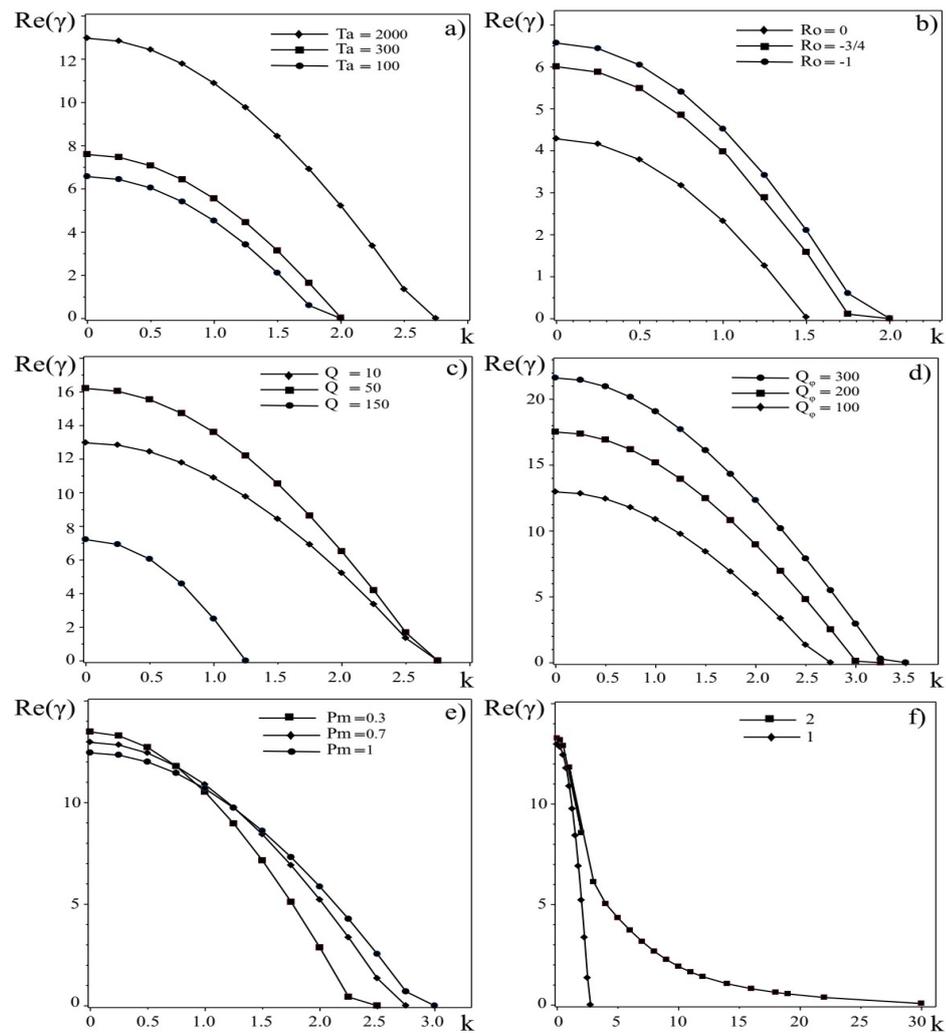


Рис. 4.11: Залежність інкременту ($\text{Re}(\gamma) > 0$) СМОН в нанорідини від k . На графіках показано вплив: а) $Ta = 100, 300, 2000$; б) $Ro = 0, -3/4, -1$; в) $Q = 10, 50, 150$; д) $Q_\varphi = 100, 200, 300$; е) $Pm = 0.3, 0.7, 1$; ф) концентрації наночастинок на СМОН.

частинок сприяє збільшенню області нестійкості порівняно з чистим електропровідним середовищем. Крім того, при збільшенні величини азимутального магнітного поля (числа Q_φ), як і у випадку з АМОН, межа області нестійкості зміщується у бік позитивних чисел Россбі ($Ro > 0$). Приступимо до чисельного аналізу дисперсійного рівняння для спіральної МОН. Рис. 4.11 показано залежність інкременту СМОН від радіальних хвильових чисел k для різних варіацій фізичних параметрів нанорідини. З графіків Рис. 4.11а видно, що темпи зростання збурень підвищуються зі збільшенням ефекту обертання – числа

Тейлора $Ta = (100, 300, 2000)$. Інші параметри нанорідини вважалися фіксованими: $Q = 10, Q_\varphi = 100, Pm = 0.7, Pr = 5, Rb = 1/2, Ro = -1, R_n = 0.125$. Для цих параметрів на Рис. 4.11b показані графіки інкременту СМОН для нанорідини, що обертається, з числом Тейлора $Ta = 100$ і різними числами Россбі $Ro = 0, -3/4, -1$. Звідси випливає, що темпи зростання осесиметричних збурень вищі для негативних чисел Россбі ($Ro < 0$), ніж у разі однорідного обертання ($Ro = 0$):

$$\gamma(k)|_{Ro=-1} > \gamma(k)|_{Ro=-3/4} > \gamma(k)|_{Ro=0}.$$

Рис. 4.11c показані темпи зростання СМОН при різних значеннях аксіального магнітного поля $Q = (10, 50, 150)$ для релеєвського профілю обертання ($Ro = -1$) та числа Тейлора $Ta = 2000$. Звідси ми бачимо, що збільшення напруженості аксіального магнітного поля H_{0z} може призводити як до збільшення інкременту нестійкості ($Q = 10 \rightarrow Q = 50$), так і до зменшення інкременту при $Q = 50 \rightarrow Q = 150$. Аналогічна ситуація спостерігалася і для стандартної МОН. Ефект впливу азимутального магнітного поля $Q_\varphi = (100, 200, 300)$ на СМОН для параметрів $Ta = 2000$ і $Ro = -1$ показаний на Рис. 4.11d. Тут, як і для випадку АМОН, темпи зростання збурень стають вищими із збільшенням напруженості азимутального магнітного поля $H_{0\varphi}$. Рис. 4.11e показані графіки інкременту СМОН для різних значень магнітного числа Прандтля $Pm = (0.3, 0.7, 1)$. З цих результатів випливає, що збільшення темпів зростання $Re\gamma(k)$ для магнітних чисел Прандтля $Pm < 1$ відбувається при зміщенні в довгохвильову (малі k) область спектра збурень. Результати впливу на СМОН ефекту концентрації наночастинок наведені на Рис. 4.11f. Крива 1 побудована для наступних параметрів нанорідини: $Q = 10, Q_\varphi = 100, Ta = 2000, Pm = 0.7, Pr = 5, R_n = 0.122, L_e = 5000, N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$. При збільшенні концентрації наночастинок, тобто при збільшенні об'ємної частки наночастинок на верхній межі шару φ_u , ми приймаємо, що змінюються параметри для наступних величин:

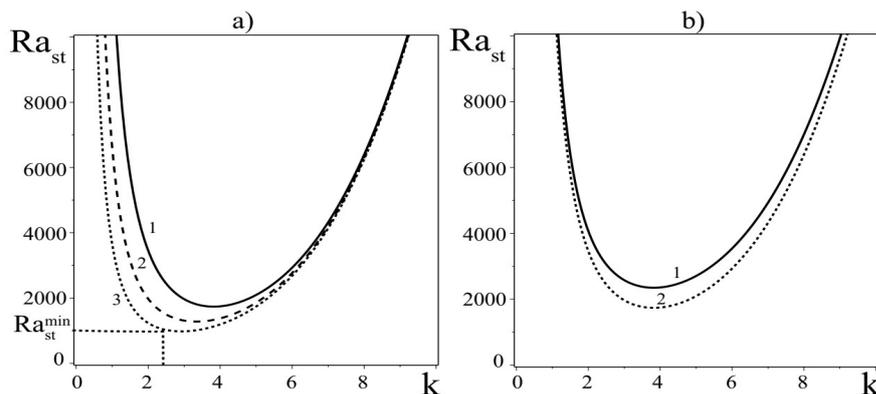


Рис. 4.12: Залежність Ra_{st} від k з фіксованими параметрами: $Ta = 300, Q = 50, Pm = 1, R_n = 0.122, L_e = 5000, N_A = 5$: а) крива 1 відповідає числам Россбі $Ro = 2$, крива 2 – $Ro = 0$, крива 3 – $Ro = -1$; б) крива 1 відповідає «чистої» електропровідної рідини, крива 2 – електропровідної нанорідини. Обидві криві (1, 2) побудовані числа Россбі $Ro = 2$.

концентраційного числа Релея $R_n = 1200$, числа $(Q, Q\varphi, Ta, Pm, Pr, Rb, Ro)$ залишаються без змін. Крива 2 на Рис. 4.11f відповідає результатам підвищеної концентрації наночастинок. Тут видно, що при підвищеній концентрації наночастинок інкремент СМОН вище: $\gamma_2(0) = 13.28 > \gamma_1(0) = 12.9$, і нестійкість вже починає розвиватися в короткохвильовій (великі k) частині спектра збурень. Внаслідок підвищення концентрації наночастинок збільшуються темпи зростання СМОН через спільний ефект приросту наночастинок $N_B \gg 1$ та спірального магнітного поля для магнітних чисел Прандтля $Pm < 1$.

4.3.2 Стаціонарний режим конвекції в аксіальному магнітному полі

З дисперсійного рівняння (4.15) знайдемо критичне значення числа Релея Ra_{st} для стаціонарної ($\gamma = 0$) конвекції в аксіальному магнітному полі у вигляді:

$$Ra_{st} = \frac{a^6}{k^2} + \frac{\pi^2 a^2 Q}{k^2} + \frac{\pi^2 a^4 Ta}{k^2(a^4 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 Ta Ro (a^4 + \pi^2 Q Pm)}{k^2(a^4 + \pi^2 Q)} - R_n(L_e + N_A) \quad (4.23)$$

Мінімальне значення критичного числа Релея знаходиться з умови $\partial Ra_{st} / \partial k =$

0 і відповідає хвильовим числам $k = k_c$, що задовольняють наступне рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{2k_c^2 - \pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4 Q}{k_c(\pi^2 + k_c^2)^2} + \frac{2\pi^2 k_c \text{Ta}(1 + \text{Ro})}{(\pi^2 + k_c^2)((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)} - \\ & - \frac{\pi^2 \text{Ta}((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2(\pi^2 + k_c^2))}{k_c((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} - \\ & - \frac{\pi^2 \text{TaRo}((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q \text{Pm})((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2(\pi^2 + k_c^2))}{k_c(\pi^2 + k_c^2)^2((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

З рівняння (4.24) видно, що критичне хвильове число залежить від параметрів нанорідина і збігається з результатами роботи [141]. На графіку Рис. 4.12а) мінімальному значенню критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} відповідає точка на нейтральній кривій, що розділяє області стійких і нестійких збурень. Тут видно, що для позитивного профілю числа Россбі $\text{Ro} \geq 0$ мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} є вищим, ніж для негативних профілів обертання, наприклад, релеєвського $\text{Ro} = -1$. Отже, для негативних профілів обертання ми отримуємо нижчий поріг розвитку нестійкості порівняно з випадками однорідного $\text{Ro} = 0$ та неоднорідного $\text{Ro} = 2$ обертання. На Рис. 4.12b) показано, що концентрація наночастинок сприяє зниженню порога стаціонарної конвекції. Тут криві (1,2) побудовані для числа Россбі $\text{Ro} = 2$, однак зроблені висновки залишаються справедливими для будь-яких значень Ro .

З аналізу дисперсійного рівняння (4.23) встановлено, що вплив оберտальних ефектів, числа Россбі та магнітного поля на стаціонарну конвекцію в аксіальному магнітному полі не залежить від концентрації наночастинок [216].

4.3.3 Стаціонарний режим конвекції у спіральному магнітному полі

З дисперсійного рівняння (4.15) знайдемо критичне значення числа Релея Ra_{st} для стаціонарної конвекції в спіральному магнітному полі:

$$\text{Ra}_{st} = \left[\text{Ra}_{st}^{(0)} - \text{R}_n(L_e + N_A) + \frac{2\pi^4 Q \xi \sqrt{\text{Ta}}(2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm}))N_B(N_A - 1)}{k^2(a^4 + \pi^2 Q)L_e} \right] \times$$

$$\times \left[1 - \frac{2\pi^4 Q \xi \sqrt{\text{Ta}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) (N_A - N_B)}{a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 L_e} \right]^{-1} = D_1(k) \cdot D_2^{-1}(k), \quad (4.25)$$

де $\text{Ra}_{st}^{(0)}$ – критичне число Релея для стаціонарної конвекції чистої рідини в спіральному магнітному полі, яке збігається з результатом роботи [212]:

$$\begin{aligned} \text{Ra}_{st}^{(0)} = & \frac{a^6}{k^2} + \frac{\pi^2 a^2 Q}{k^2} + \frac{\pi^2 a^4 \text{Ta}}{k^2 (a^4 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 \text{Ta} \text{Ro} (a^4 + \pi^2 Q \text{Pm}) - 4\pi^4 \xi^2 Q^2}{k^2 (a^4 + \pi^2 Q)} \\ & - \frac{4\pi^2}{k^2} \cdot \xi^2 Q \text{Rb}. \end{aligned}$$

Мінімальне значення критичного числа Релея знаходиться з умови $\partial \text{Ra}_{st} / \partial k = 0$ і відповідає хвильовим числам $k = k_c$, що задовольняють наступне рівняння:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial \text{Ra}_{st}^{(0)}}{\partial k} \right)_{k=k_c} - \right. \\ & \left. - 4\pi^4 Q \xi \sqrt{\text{Ta}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) N_B (N_A - 1) \cdot \frac{(\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2 (\pi^2 + k_c^2)}{k_c^3 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2 L_e} \right] \times \\ & \times D_2^{-1}(k_c) - D_2^{-2}(k_c) \cdot 4k_c \pi^4 Q \xi \sqrt{\text{Ta}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) (N_A - N_B) \times \\ & \times \frac{(\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2(\pi^2 + k_c^2)}{(\pi^2 + k_c^2) ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^3 L_e} \cdot D_1(k_c) = 0, \quad (4.26) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \text{Ra}_{st}^{(0)}}{\partial k} \right)_{k=k_c} = & \frac{2k_c^2 - \pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4 Q}{k_c (\pi^2 + k_c^2)^2} + \frac{2\pi^2 k_c \text{Ta} (1 + \text{Ro})}{(\pi^2 + k_c^2) ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)} \\ & - \frac{\pi^2 \text{Ta} ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2 (\pi^2 + k_c^2))}{k_c ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} \\ & - \frac{\pi^2 \text{Ta} \text{Ro} ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q \text{Pm}) ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2 (\pi^2 + k_c^2))}{k_c (\pi^2 + k_c^2)^2 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} + \\ & + 4\pi^4 \xi^2 Q^2 \cdot \frac{2((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q) + 4k_c^4 (\pi^2 + k_c^2)}{k_c^3 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} + 4\pi^2 \xi^2 Q \text{Rb} \cdot \frac{2}{k_c^3}. \end{aligned}$$

З аналізу (4.26) видно, що критичне хвильове число k_c залежить від параметрів нанорідини лише у спіральному магнітному полі. На Рис. 4.13 показано залежність стаціонарного числа Релея Ra_{st} від хвильового числа k для рі-

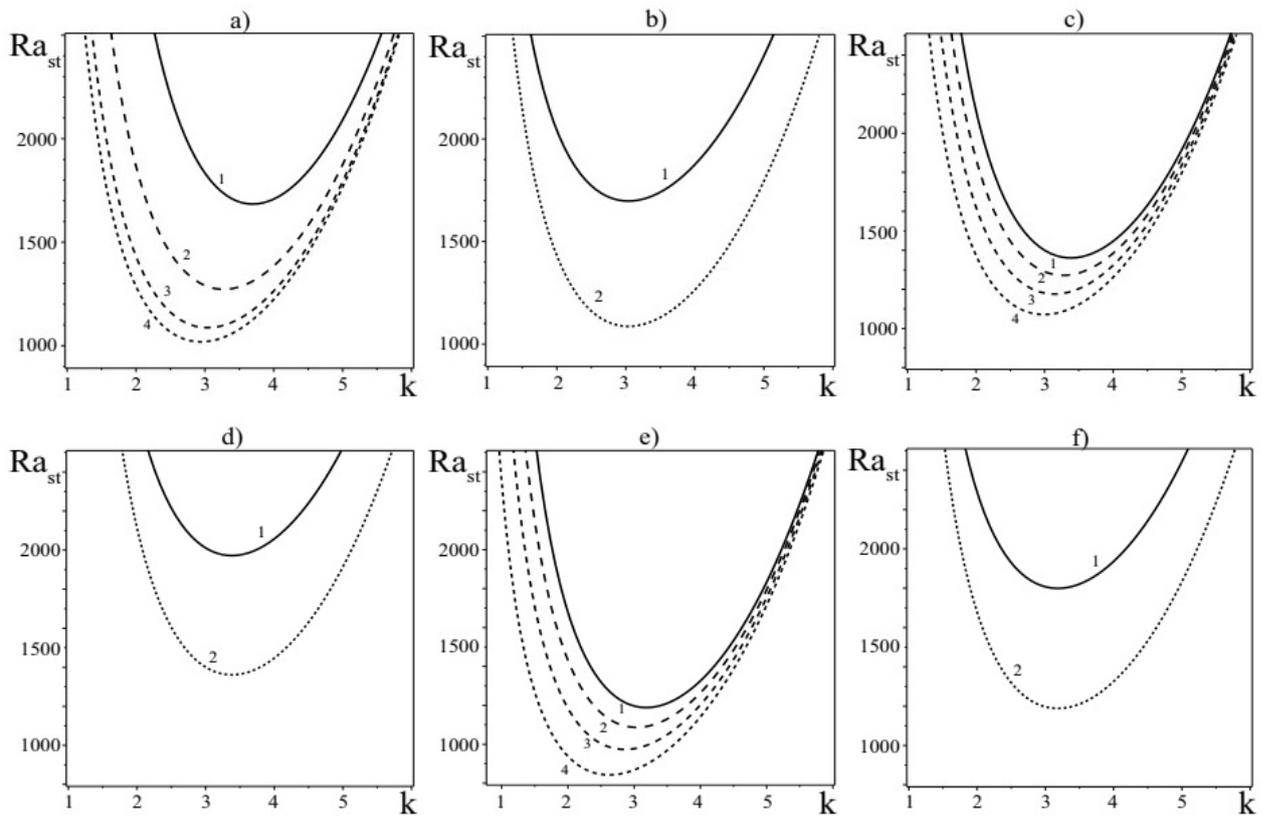


Рис. 4.13: Залежність Ra_{st} від k для вріацій параметрів: а) $Ro = (2, 0, -3/4, -1)$ – криві (1,2,3,4) при $Rb = -1/2$ і $\xi = 1$; с) $Rb = (-1, -1/2, 0, 1/2)$ – криві (1,2,3,4) при $Ro = 0$ і $\xi = 1$; е) $Rb = (-1, -1/2, 0, 1/2)$ – криві (1,2,3,4) при $Ro = -3/4$ і $\xi = 1$; б),д),f) крива 1 – рідина без наночастинок, а крива 2 – нанорідина.

зних профілів неоднорідного обертання (Ro) та магнітного поля (Rb). Численні результати, подані на Рис. 4.13, отримані за таких фіксованих параметрів: $Ta = 300$, $Q = 50$, $Pm = 0.7$, $Rn = 0.122$, $Le = 5000$, $N_A = 5$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$. Мінімуму значенню Ra_{st}^{\min} на графіках Рис. 4.13 відповідає точка на нейтральній кривій, яка розділяє області стійких і нестійких збурень. На Рис. 4.13а показано випадок однорідного ($Rb = -1/2$) азимутального магнітного поля з параметром $\xi = 1$. Видно, що зі зростанням позитивного профілю числа Россбі Ro (крива 1 – $Ro = 2$, крива 2 – $Ro = 0$) мінімальне значення стаціонарного числа Релея Ra_{st}^{\min} також зростає, тобто підвищується поріг розвитку нестійкості. З іншого боку, для негативних профілів обертання – кеплерівського ($Ro = -3/4$) (крива 3) і релеевського ($Ro = -1$) (крива 4) – спостерігається зменшення кри-

тичного числа Релея, що свідчить про зниження порога розвитку нестійкості. На Рис. 4.13с і 4.13е представлені результати для випадків $Ro = 0$ і $Ro = -3/4$ відповідно. Видно, що при позитивних значеннях $Rb > 0$ (кривая 3: $Rb = 0$, крива 4: $Rb = 1/2$) критичні числа Релея менше, ніж при негативних значеннях $Rb < 0$ (кривая 1: $Rb = -1$, крива 2: $Rb = -1/2$). Таким чином, в залежності від профілю азимутальної неоднорідності магнітного поля $H_{0\phi}(R) = CR^\alpha$ ($C = \text{const}$, α – произвольное дійсне число), через нестійкість може збільшуватися при ($Rb < 0$), так і зменшуватися при ($Rb < 0$). На Рис. 4.13b, 4.13d, 4.13f показано, що збільшення концентрації наночастинок (крива 2) сприяє зниженню порога стаціонарної конвекції порівняно з «чистою» рідиною (крива 1). Тут криві (1,2) побудовано для числа Россбі $Ro = -3/4$, однак зроблені висновки залишаються справедливими для будь-яких значень Ro .

На відміну від випадку стаціонарної конвекції в аксіальному магнітному полі, для неоднорідно обертової стаціонарної конвекції нанорідини в спіральному магнітному полі концентрація наночастинок є дестабілізуючим фактором при аналізі впливу обертальних ефектів, числа Россбі та азимутального магнітного поля.

4.4 Теплова конвекція в шарі пористого середовища, що обертається, насиченому нанорідиною під впливом спірального магнітного поля

Зважаючи на те, що теплофізичні властивості нанорідин можна експериментально підібрати шляхом синтезу наночастинок з різних матеріалів [211], то виникла ідея використовувати електропровідні нанорідини (у тому числі гібридні) у лабораторних експериментах з вивчення гідромагнітних нестійкостей у спіральних магнітних полях. У цьому розділі буде продовжено дослідження течій нанорідин у спіральному магнітному полі. Будуть розглядатися нові типи гідромагнітних нестійкостей у шарі пористого середовища, що обертається, на-

сиченим електропровідною нанорідиною, з урахуванням броунівської дифузії і термофорезу [221]. У разі відсутності градієнта температури буде розглянуто новий тип нестійкості спірального магнітного поля тонкому шарі нанорідини. За наявності температури буде досліджено стаціонарний режим магнітоконвекції, що нерівномірно обертається. Будуть визначені умови стабілізації та дестабілізації стаціонарної конвекції у спіральному магнітному полі для металооксидних, металевих та напівпровідникових нанорідин.

4.4.1 Формулювання проблеми та загальне дисперсійне рівняння

Розглянемо шар несжимаємої в'язкої електропровідної нанорідкості, насиченої пористого середовища товщиною h , укладений в циліндр, що обертається, радіуса R такого, що $h \ll R$. Зрозуміло, що з вивчення такого типу течії зручно використовувати циліндричну систему координат (R, φ, z) . Нано рідина укладена між двома паралельними площинами $z = 0$ і $z = h$, де температури на нижній та верхній межах приймаються як T_d та T_u відповідно. Температура T_d нижньої площини перевищує температуру T_u верхньої площини: $T_d > T_u$ нагрівається знизу. Припустимо, що рідина знаходиться в постійному гравітаційному полі \mathbf{g} , спрямованому вертикально вниз вздовж осі z : $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ і обертається з постійною кутовою швидкістю Ω , спрямована вертикально вгору вздовж осі z . Слід зазначити, що наночастинки суспендуються в нанорідинах з використанням технології поверхнево-активних речовин або поверхневого заряду, запобігаючи їх агломерації та осадженню на пористій матриці. Крім того, ми припускаємо, що рідина нано знаходиться в спіральному магнітному полі H_0 , яке можна представити як суму неоднорідного азимутального ($H_{0\varphi}(R)$) і однорідного осьового (H_{0z}) поля (4.1). У згаданому вище формулюванні завдання ми розглядаємо наступну фізичну модель:

1) Усі теплофізичні характеристики постійні, крім щільності в архимедовій силі (наближення Буссинеска).

- 2) Оскільки рідка фаза та наночастки перебувають у стані теплової рівноваги, тепловий потік можна описати за допомогою моделі одного рівняння теплобалансу.
- 3) Нанорідина нестислива, електропровідна, в'язка, ламінарна, а наночастинки є немагнітними сферичними частинками.
- 4) Передбачається, що кожна гранична стіна непроникна і має ідеальну теплопровідність.
- 5) Радіаційна теплопередача між сторонами стіни незначна порівняно з іншими видами теплопередачі.

Для опису конвективних процесів скористаємося гідродинамічними рівняннями Бусінеска-Обербека для пористого середовища Дарсі-Брінкмана, насиченою електропровідною рідиною [222] в циліндричній системі координат. Вважаємо, що температура на поверхнях залишається постійною, тоді як потік наночастинок передбачається рівним нулю [223]:

$$T = T_d, \quad D_B \frac{d\phi}{dz} + \frac{D_T dT}{T_u dz} = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (\text{the lower surface}) \quad (4.27)$$

$$T = T_u, \quad D_B \frac{d\phi}{dz} + \frac{D_T dT}{T_u dz} = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (\text{the upper surface}) \quad (4.28)$$

Далі ми застосуємо локальний метод ВКБ як у розділі 3.2.1. В результаті отримаємо загальне дисперсійне рівняння виду:

$$R_D = \frac{\Gamma_A^2 m_0 + \Gamma_\phi^2 \Gamma_T m_1 + \frac{\gamma}{\tilde{\sigma}} m_2}{\varepsilon k^2 \Gamma_B \Gamma_\phi^2 \Gamma_A^2}, \quad (4.29)$$

де

$$m_0 = a^2 \Gamma_A^2 \Gamma_\phi^2 \Gamma_T - \varepsilon k^2 \Gamma_B \Gamma_\phi R_n N_A \left(\frac{L_e}{\varepsilon} \Gamma_T + a^2 \right),$$

$$m_1 = \varepsilon^2 \pi^2 \Gamma_B^2 \Gamma_a - 4\pi^2 \xi^2 Q_\varphi \Gamma_A^2 R_b - 4\pi^4 \xi^2 Q_{\parallel} Q_\varphi,$$

$$m_2 = 4\pi^4 \varepsilon \xi N_A N_B \Gamma_B \Gamma_\phi \sqrt{Q_{\parallel} Q_\varphi} \Gamma_a, \quad \Gamma_B = a^2 + \frac{\gamma}{\tilde{\sigma}} \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}}, \quad \Gamma_T = a^2 + \gamma,$$

$$\Gamma_D = D_a a^2 + \gamma \mathcal{V}_a^{-1} + 1, \quad \Gamma_\phi = a^2 + \frac{\gamma L_e}{\tilde{\sigma}}, \quad \Gamma_A^2 = \varepsilon \Gamma_B \Gamma_D + \pi^2 Q_{\parallel}, \quad a^2 = \pi^2 + k^2,$$

$\xi = h/R_0$ є відношення характерних просторових масштабів для даної задачі,

$$Q_{\parallel} = \frac{\mu_e H_0^2 K}{4\pi\rho_0\nu\eta} \quad \text{є аксіальне число Чандрасекара-Дарсі,}$$

$$Q_{\varphi} = \frac{\mu_e H_{0\varphi}^2(R_0)K}{4\pi\rho_0\nu\eta} \quad \text{є азимутальне число Чандрасекара-Дарсі.}$$

Як видно з виразу (4.29), ми отримали нові ефекти, пов'язані з впливом неоднорідного магнітного поля на магнітну конвекцію в шарі пористого середовища, що обертається, насиченої нанорідиною. Через неоднорідність азимутального поля в магнітному полі з'являється градієнт сили Лоренца, що викликає знос потоку рідини. Залежно від знака градієнта магнітного поля (числа Rb) змінюється напрям дрейфу потоку рідини, що впливає на стійкість конвективних течій. Тоді при позитивних числах $Rb > 0$ (для профілю $B_{0\varphi} = \text{const} \times R^\alpha$, $\alpha > 1$) конвекція дестабілізується, а при негативних $Rb < 0$ ($\alpha < 1$) конвекція стабілізується. Ефекти обертання та спірального магнітного поля можуть стабілізувати конвекцію, навіть якщо врахувати ефекти броунівської дифузії та термофорезу.

4.4.2 Нестійкість у пористому шарі, що обертається, насиченому нанорідиною без градієнта температури

Розглянемо випадок, коли градієнт температури дорівнює нулю ($R_D = N_A = 0$). Тоді з рівняння (4.29) отримуємо дисперсійне рівняння у вигляді

$$\Gamma_\phi^2 \Gamma_T [a^2 \Gamma_A^4 + \varepsilon^2 \pi^2 \Gamma_B^2 \text{Ta} - 4\pi^2 \xi^2 Q_\varphi \Gamma_A^2 Rb - 4\pi^4 \xi^2 Q_{\parallel} Q_\varphi] = 0 \quad (4.30)$$

Вирази перед квадратною дужкою описують згасання збурень на броунівській дифузії ($\Gamma_p h i = 0$) і теплопровідності ($\Gamma_T = 0$). Вираз у квадратних дужках відповідає дисперсійному рівнянню нової нестійкості. В результаті аналізу дисперсійного рівняння було встановлено, що диссипативні процеси призводять до стійкості потоку нанорідини. Стабілізуючими факторами також є однорідне магнітне поле та обертання. З іншого боку, азимутальне магнітне поле призво-

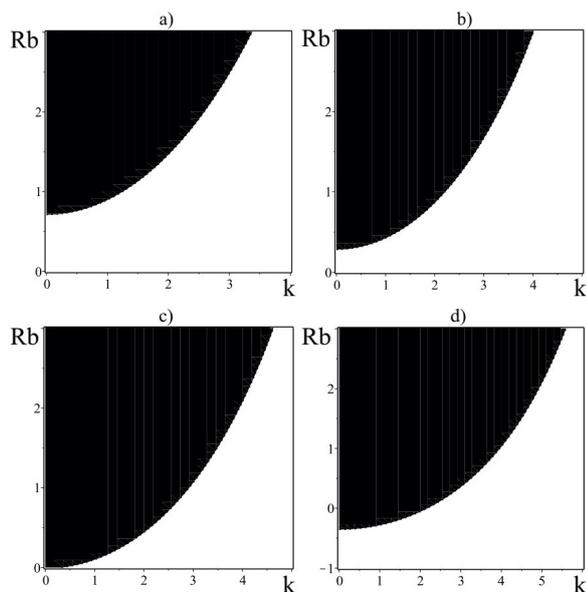


Рис. 4.14: Чорним кольором показані області виникнення нової нестійкості в пористому середовищі, насиченій нанорідиною, з фіксованими параметрами $Ta = 100$, $Q = 150$, $Q_\varphi = 2500$, $\varepsilon = 0.6$, $D_a = 0.5$ для різних значень масштабних параметрів завдання: а) $\xi = 0.3$, б) $\xi = 0.35$, в) $\xi = 0.4$, д) $\xi = 0.5$.

дить до дестабілізації течії нанорідини при позитивних магнітних числах Россбі ($Rb > 0$). Крім того спіральне магнітне поле призводить до дестабілізації течії нанорідини при магнітних числах Россбі ($Rb > -1$). Запишемо умову $a_4 > 0$ як

$$Rb_{cr} = \frac{X}{Y} > Rb, \quad X = \varepsilon^2 a^6 (a^2 D_a + 1)^2 + 2\pi^2 \varepsilon a^4 (a^2 D_a + 1) Q_{\parallel} + \\ + \pi^4 a^2 Q_{\parallel}^2 + \varepsilon^2 \pi^2 a^4 Ta - 4\pi^4 \xi^2 Q_{\parallel} Q_{\varphi}, \quad Y = 4\pi^2 \xi^2 Q_{\varphi} (\varepsilon a^2 (a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel}). \quad (4.31)$$

Тут Rb_{cr} — критичне магнітне число Россбі на межі стійкості, що відповідає нейтральному стану $\gamma = 0$. Тоді для нової нестійкості необхідно виконання нерівності: $Rb > Rb_{cr}$. В умовах відсутності обертання $Ta = 0$ для звичайної електропровідної рідини в спіральному магнітному полі умова нестійкості (4.31) була отримана в роботі [142]. У разі, коли осьове магнітне поле немає $Q_{\parallel} = 0$ (або $H_{0z} = 0$) і $Ta = 0$ (або $\Omega = 0$) умова розвитку нестійкості наступне:

$$Rb > \frac{\varepsilon a^4 (a^2 D_a + 1)}{4\pi^2 \xi^2 Q_{\varphi}} \quad (4.32)$$

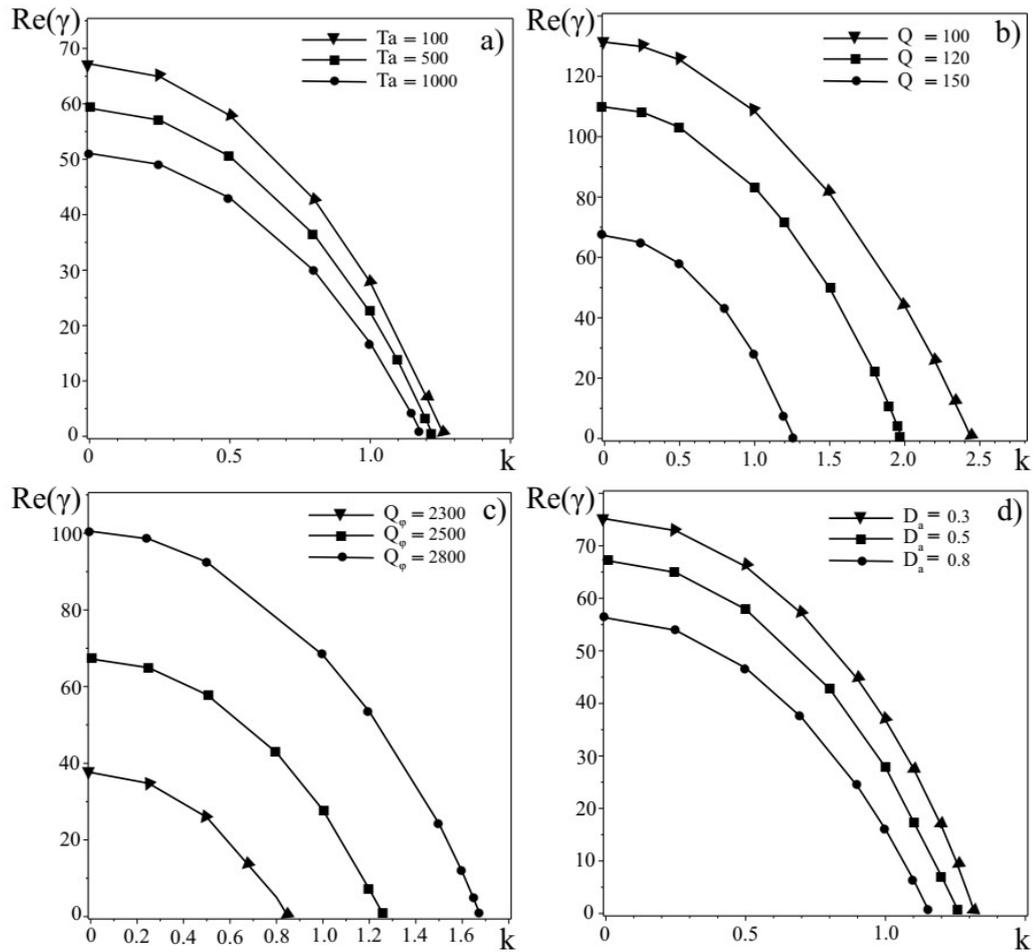


Рис. 4.15: Залежність $\text{Re}(\gamma)$ від k для різних варіацій: а) $Ta = 100, 500, 1000$; б) $Q = 100, 120, 150$; в) $Q_\varphi = 2300, 2500, 2800$; г) $Da = 0.3, 0.5, 0.8$.

У межі ідеального пористого середовища, насиченого нанорідиною ($\nu \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$) з рівняння (4.32) отримані критерії виникнення нестійкості Тайлера для осесиметричних збурень

$$Rb = \frac{1}{2}(p - 1) > Rb_{cr} = 0, \quad \text{or} \quad p > 1, \quad (4.33)$$

де

$$p = \frac{\partial \ln \left(\frac{H_{0\varphi}}{R} \right)}{\partial \ln R} + 1$$

позначення, введені у роботі [205].

Використовуючи вираз (4.31) для критичного магнітного числа Россбі, чисельно визначені галузі розвитку нової нестійкості в пористому середовищі,

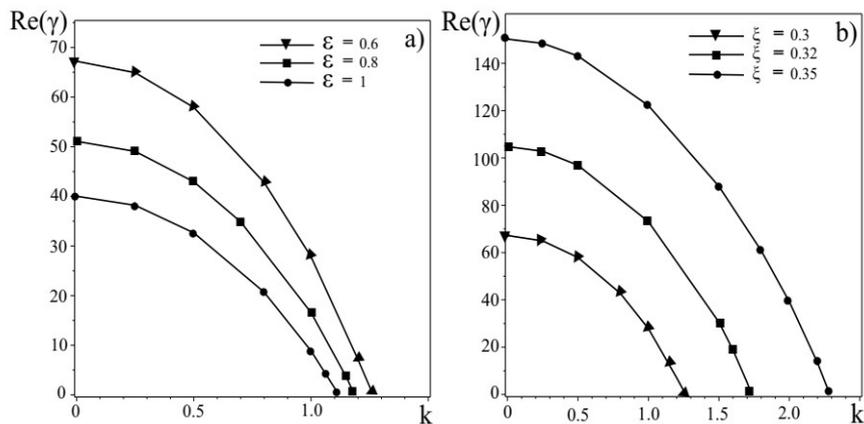


Рис. 4.16: Залежність $\text{Re}(\gamma)$ від k для різних варіацій: а) $\varepsilon = 0.6, 0.8, 1$; б) $\xi = 0.3, 0.32, 0.35$.

насиченому нанорідиною. На Рис. 4.14 чорним кольором виділені області нестійкості магнітних чисел Россбі $Rb > Rb_{cr}$ при зміні параметра ξ у площині (k, Rb) , де k – безрозмірне радіальне хвильове число. Тут ми бачимо, що збільшення масштабного параметра призводить до зміщення області нестійкості у бік негативних магнітних чисел Россбі та збільшення хвильових чисел. Розглянемо розвиток нової нестійкості з допомогою чисельного аналізу дисперсійного рівняння (4.30). Визначимо залежність інкременту ($\text{Re}(\gamma) > 0$) нової нестійкості від радіального хвильового числа k при заданих параметрах пористого середовища та нанорідини. Фіксуємо значення параметрів як $Ta = 100, Q = 150, Q_\varphi = 2500, Da = 0.5, Pm = 1, Pr = 5, \mathcal{V}_a = 8, \xi = 0.3, Rb = 1$ крім мінливих параметрів.

На Рис. 4.15а показана залежність інкременту ($\text{Re}(\gamma)$) від хвильового числа k для різних значень параметра Тейлора Ta . Тут ми помітимо, що швидкість зростання осесиметричних збурень зменшується зі збільшенням Ta , тобто обертання пористого середовища має стабілізуючий фактор, що робить систему більш стійкою. На Рис. 4.15б показані швидкості зростання нової нестійкості за різних значеннях аксіального магнітного поля $Q = 100, 120, 150$. Тут бачимо, що збільшення осьової напруженості магнітного поля H_{0z} може призвести до зменшення інкременту нестійкості, оскільки сила Лоренца викликає гальмува-

ння потоку нанорідини зі збільшенням величини однорідного магнітного поля. Результат впливу магнітного числа Q_φ на стійкість системи графічно представлена на Рис. 4.15с. Згідно Рис. 4.15с, зі зростанням магнітного числа Q_φ система стає більш нестійкою. Неоднорідне азимутальне магнітне поле за рахунок сили Лоренца створює градієнтний дрейф потоку нанорідини, що призводить до збільшення нестійкості. Вплив числа Дарсі D_a на стійкість системи показано на Рис. 4.15d. Інкремент зменшується зі збільшенням числа Дарсі D_a , що показує, що вплив числа Дарсі D_a затримує швидкість зростання збурень у насичених пористих середовищах. Збільшення значення числа Дарсі D_a пов'язане із збільшенням ефективної в'язкості, що призводить до уповільнення течії рідини. З Рис. 4.16а видно, збільшення значень параметра пористості ε призводить до зменшення інкременту нестійкості. Збільшення пористості або збільшення окремих мікрорухів рідини призводить до сумарного ефекту в'язкості, що уповільнює потік рідини. Варіації масштабного параметра завдання ξ сильно впливають динаміку зростання збурень, як видно з Рис. 4.16b. Зі збільшенням значень ξ швидкість зростання $\text{Re}(\gamma)$ збільшується, оскільки посилюється вплив азимутального магнітного поля.

4.4.3 Стаціонарний режим конвекції

Розглянемо випадок $\gamma = 0$ стаціонарної конвекції для якого значення числа Релея-Дарсі R_D^{st} (4.29) прийме вигляд:

$$R_D^{(st)} = \frac{a^2(\varepsilon a^2(a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})}{\varepsilon k^2} - R_n N_A L_e \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{L_e} \right) + \frac{\varepsilon \pi^2 a^4 \text{Ta}}{k^2(\varepsilon a^2(a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})} - \frac{4\pi^4 \xi^2 Q_{\parallel} Q_\varphi}{\varepsilon k^2(\varepsilon a^2(a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})} - \frac{4\pi^2 \xi^2}{\varepsilon k^2} Q_\varphi \text{Rb} \quad (4.34)$$

Для вивчення впливу обертання, осьового магнітного поля, азимутального магнітного поля, числа Дарсі, пористості, числа Льюїса, модифікованого коефіцієнта дифузії та концентраційного числа Релея-Дарсі на теплову нестійкість

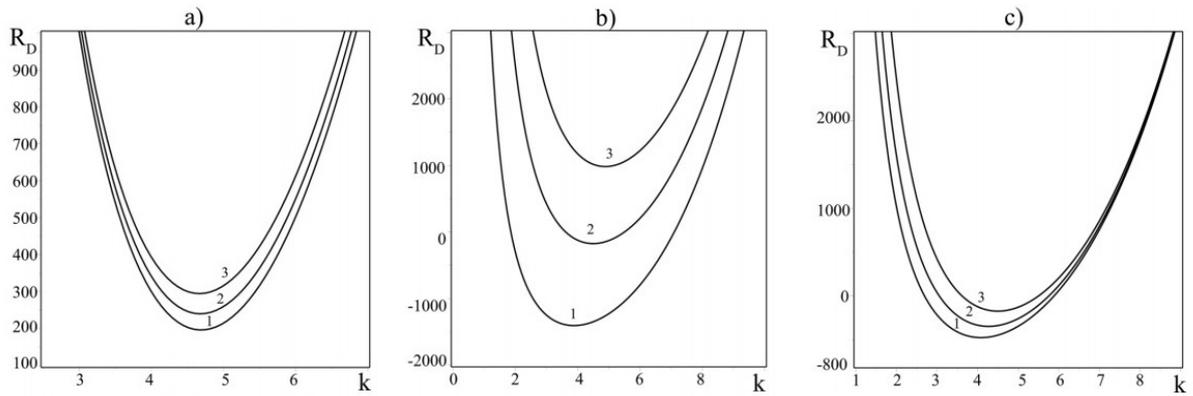


Рис. 4.17: Залежність числа Рейля-Дарсі від варіацій параметрів: а) числа Тейлора (крива 1 – $Ta = 100$, крива 2 – $Ta = 500$, крива 3 – $Ta = 1000$), б) аксіального числа Чандрасекара (крива 1 – $Q_{||} = 150$, крива 2 – $Q_{||} = 200$, крива 3 – $Q_{||} = 250$), с) азимутального числа Чандрасекара (крива 1 – $Q_{\varphi} = 2000$, крива 2 – $Q_{\varphi} = 1800$, крива 3 – $Q_{\varphi} = 1500$).

необхідно розрахувати похідні

$$\frac{dR_D^{(st)}}{dT_a}, \frac{dR_D^{(st)}}{dQ_{||}}, \frac{dR_D^{(st)}}{dQ_{\varphi}}, \frac{dR_D^{(st)}}{dD_a}, \frac{dR_D^{(st)}}{d\varepsilon}, \frac{dR_D^{(st)}}{dL_e}, \frac{dR_D^{(st)}}{dN_A}, \frac{dR_D^{(st)}}{dR_n}.$$

Проведемо чисельний аналіз дисперсійного рівняння (4.34) використовуючи фізичні параметри нанорідини Al_2O_3 -вода з роботи [199]:

$$\phi_0^* = 0.001, \rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3, \mu = 10^{-3} \text{ Pas}, \rho_d = 4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

$$D_B = 4 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}, D_T = 6 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s},$$

$$\chi_f = 2 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, (\rho c)_p = 3.1 \times 10^6 \text{ J/m}^3, \quad (4.35)$$

$$(\rho c)_f = 4 \times 10^6 \text{ J/m}^3, \beta = 3.4 \times 10^{-3} \text{ 1/K}, T_d - T_u = 1\text{K},$$

$$T_u = 300 \text{ K}, L_e = 5000, \rho_p = 4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Значення параметрів (4.35) дають такі безрозмірні значення параметрів: $L_e = 5000$, $Pr = 5$ і $N_A = 5$. Значення R_n можна змінювати, варіюючи відстань між межами та еталонним масштабом фракції наночастинок. Далі ми зафіксуємо значення параметра R_n як $R_n = 0.122$.

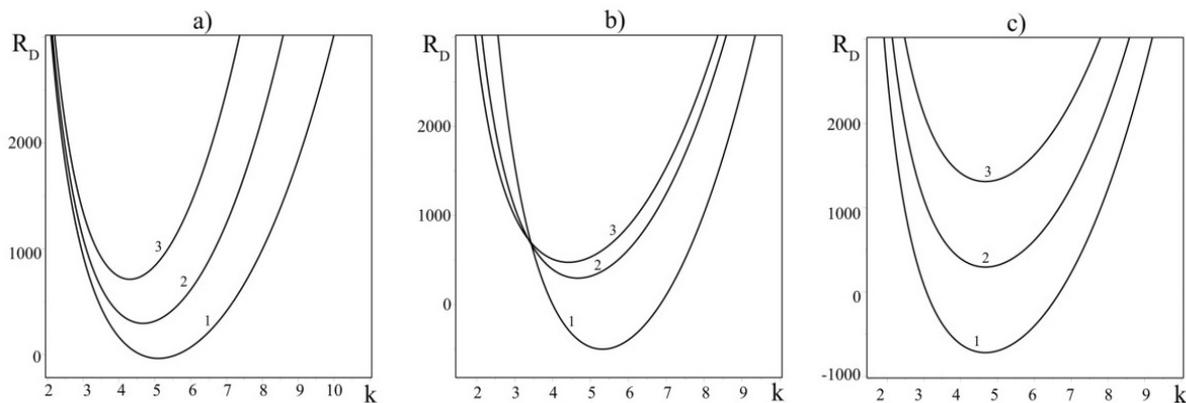


Рис. 4.18: Залежність числа Релея-Дарсі від варіацій параметрів: а) числа Дарсі (крива 1 – $D_a = 0,3$, крива 2 – $D_a = 0,5$, крива 3 – $D_a = 0,8$), б) пористості (крива 1 – $\varepsilon = 0,3$, крива 2 – $\varepsilon = 0,6$, крива 3 – $\varepsilon = 0,8$), в) числа Льюїса (крива 1 – $L_e = 6000$, крива 2 – $L_e = 5000$, крива 3 – $L_e = 4000$).

З рівняння (4.34), отримуємо

$$\frac{dR_D^{(st)}}{dTa} = \frac{\varepsilon\pi^2 a^4}{k^2(\varepsilon a^2(a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})} \quad (4.36)$$

звідки випливає, що сила Кориоліса завжди надає стабілізуючу дію на стаціонарну конвекцію, що узгоджується з результатами Чандрасекара [40]. На Рис. 4.17а показано залежність числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа для різних значень числа Тейлора. Видно, що зі збільшенням числа Тейлора число Релея зменшується. Таким чином, число Тейлора стабілізує вплив на стаціонарну конвекцію, що добре узгоджується з результатом, отриманим аналітично з рівняння (4.36).

Використовуючи рівняння (4.34), знаходимо

$$\frac{dR_D^{(st)}}{dQ_{\parallel}} = \frac{\pi^2 a^2}{\varepsilon k^2} - \frac{\varepsilon\pi^4 a^4 Ta + 4\pi^4 \xi^2 Q_{\varphi} a^2 (a^2 D_a + 1)}{k^2(\varepsilon a^2(a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})^2} \quad (4.37)$$

Рівняння (4.37) показує, що $dR_D^{(st)}/dQ_{\parallel}$ може бути позитивним чи негативним, тобто аксіальне магнітне поле (число Чандрасекара Q_{\parallel}) надає стабілізуючу або дестабілізуючу дію на стаціонарну конвекцію. Аксіальне магнітне поле має ста-

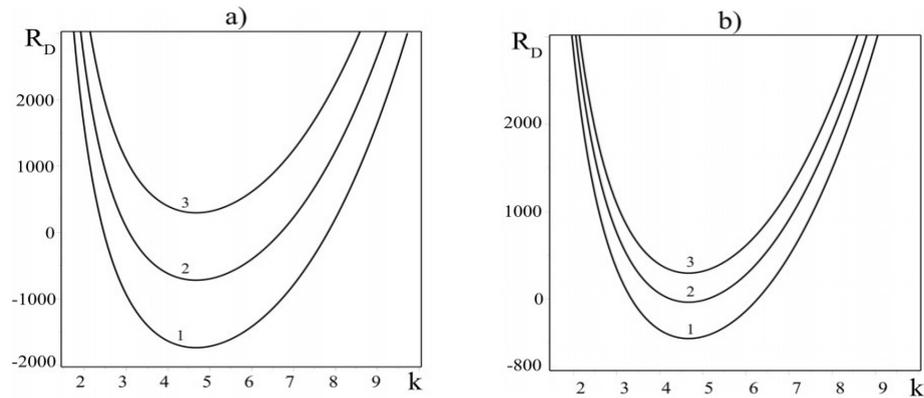


Рис. 4.19: Залежність числа Релея-Дарсі від варіацій параметрів: а) модифікованого коефіцієнта дифузії (крива 1 – $N_A = 7$, крива 2 – $N_A = 6$, крива 3 – $N_A = 5$), б) концентраційного числа Релея (крива 1 – $R_n = 0,14$, крива 2 – $R_n = 0,13$, крива 3 – $R_n = 0,122$).

білізуючу дію, якщо

$$\frac{\pi^2 a^2}{\varepsilon} > \frac{\varepsilon \pi^4 a^4 \text{Ta} + 4\pi^4 \xi^2 Q_\varphi a^2 (a^2 D_a + 1)}{(\varepsilon a^2 (a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})^2}$$

На Рис. 4.17b число Релея-Дарсі показано залежно від безрозмірного хвильового числа різних значень аксіального магнітного поля. Зі збільшенням значень осьового магнітного поля число Релея-Дарсі також збільшується при фіксованих значеннях параметрів обертання Ta і азимутального магнітного поля Q_φ . Таким чином, аксіальне магнітне поле може стабілізувати вплив на стаціонарну конвекцію, що добре узгоджується з результатом, отриманим аналітично (див. (4.37)).

Далі, з рівняння. (4.34), отримуємо

$$\frac{dR_D^{(st)}}{dQ_\varphi} = -\frac{4\pi^4 \xi^2 Q_{\parallel}}{\varepsilon k^2 (\varepsilon a^2 (a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})} - \frac{4\pi^2 \xi^2}{\varepsilon k^2} \text{Rb} \quad (4.38)$$

Рівняння (4.38) показує, що неоднорідне азимутальне магнітне поле може надавати як стабілізуючу, так і дестабілізуючу дію на стаціонарну конвекцію. Зауважимо, що ефекти стабілізації ($\text{Rb} < 0$) і дестабілізації ($\text{Rb} > 0$) залежить від знака магнітного числа Россбі, тобто від профілю неоднорідного азиму-

тального магнітного поля $H_{0\varphi}(R)$. На Рис. 4.17с показано залежність числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа для різних значень азимутального числа Чандрасекара. Зі збільшенням азимутального числа Чандрасекара число Релея-Дарсі зменшується для позитивних магнітних чисел Россбі. Таким чином, неоднорідне азимутальне магнітне поле дестабілізує вплив на стаціонарну конвекцію при позитивних магнітних числах Россбі, що добре узгоджується з результатом, отриманим аналітично з рівняння (4.38).

Використовуючи рівняння (4.34), знаходимо

$$\frac{dR_D^{(st)}}{dD_a} = \frac{a^6}{k^2} + \frac{4\pi^4 a^4 \xi^2 Q_{\parallel} Q_{\varphi} - \varepsilon^2 \pi^2 a^8 \text{Ta}}{k^2 (\varepsilon a^2 (a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})^2} \quad (4.39)$$

звідки слідує, що число Дарсі D_a має стабілізуючу дію, якщо

$$4\pi^4 a^4 \xi^2 Q_{\parallel} Q_{\varphi} > \varepsilon^2 \pi^2 a^8 \text{Ta}.$$

На Рис. 4.18а показана залежність числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа для різних значень числа Дарсі. Число Релея-Дарсі збільшується зі збільшенням числа Дарсі. Таким чином, число Дарсі надає стабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію, що добре узгоджується з результатом, отриманим аналітично з рівняння (4.39).

З рівняння (4.34), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{dR_D^{(st)}}{d\varepsilon} = & \frac{R_n N_A L_e}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon \pi^4 a^4 \text{Ta} Q_{\parallel} + 4\pi^4 a^2 \xi^2 Q_{\parallel} Q_{\varphi} (a^2 D_a + 1)}{\varepsilon k^2 (\varepsilon a^2 (a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})^2} + \\ & + \frac{4\pi^4 \xi^2 Q_{\parallel} Q_{\varphi}}{\varepsilon^2 k^2 (\varepsilon a^2 (a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})^2} + \frac{4\pi^2 \xi^2 Q_{\varphi} \text{Rb}}{\varepsilon^2 k^2} - \frac{\pi^2 a^2 Q_{\parallel}}{\varepsilon^2 k^2} \end{aligned} \quad (4.40)$$

звідки слідує, що параметр пористості ε має стабілізуючу дію, якщо

$$\begin{aligned} \frac{R_n N_A L_e}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon \pi^4 a^4 \text{Ta} Q_{\parallel} + 4\pi^4 a^2 \xi^2 Q_{\parallel} Q_{\varphi} (a^2 D_a + 1)}{\varepsilon k^2 (\varepsilon a^2 (a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})^2} + \\ + \frac{4\pi^4 \xi^2 Q_{\parallel} Q_{\varphi}}{\varepsilon^2 k^2 (\varepsilon a^2 (a^2 D_a + 1) + \pi^2 Q_{\parallel})^2} + \frac{4\pi^2 \xi^2 Q_{\varphi} \text{Rb}}{\varepsilon^2 k^2} > \frac{\pi^2 a^2 Q_{\parallel}}{\varepsilon^2 k^2}. \end{aligned}$$

Для різних значень пористості середовища число Релея-Дарсі показано залежність від безрозмірного хвильового числа на Рис. 4.18b. Зі зростанням пористості середовища зростає і число Релея-Дарсі. В результаті пористість середовища стабілізує вплив на стаціонарну конвекцію, що узгоджується з аналітичним результатом, отриманим з рівняння (4.40). Нарешті, для параметрів

Ta	Q_{\parallel}	Q_{φ}	D_a	ε	Ra_{st}^{min}	k_{cr}
100	220	1500	0.5	0.6	196.07	4.69
500	220	1500	0.5	0.6	239.87	4.68
1000	220	1500	0.5	0.6	294.58	4.66
1000	150	1500	0.5	0.6	-1407.57	3.88
1000	200	1500	0.5	0.6	-175.06	4.49
1000	250	1500	0.5	0.6	984.09	4.88
1000	200	1500	0.5	0.6	-175.06	4.49
1000	200	1800	0.5	0.6	-348.79	4.26
1000	200	2000	0.5	0.6	-477.27	4.08
1000	220	1500	0.3	0.6	-36.12	5.09
1000	220	1500	0.5	0.6	294.58	4.67
1000	220	1500	0.8	0.6	711.40	4.29
1000	220	1500	0.5	0.3	-503.32	5.32
1000	220	1500	0.5	0.6	294.58	4.67
1000	220	1500	0.5	0.8	472.35	4.42

Табл. 4.1: Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і критичні хвильові числа k_{cr} для нанорідини Al_2O_3 -вода при фіксованих параметрах $Rb = 1$, $R_n = 0.122$, $N_A = 5$, $L_e = 5000$.

нанорідини знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{dR_D^{(st)}}{dL_e} &= -\frac{R_n N_A}{\varepsilon}, \\ \frac{dR_D^{(st)}}{dN_A} &= -R_n L_e \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{L_e} \right), \\ \frac{dR_D^{(st)}}{dR_n} &= -N_A L_e \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{L_e} \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Рівняння (4.41) показують, що для стаціонарної конвекції число Льюїса L_e ,

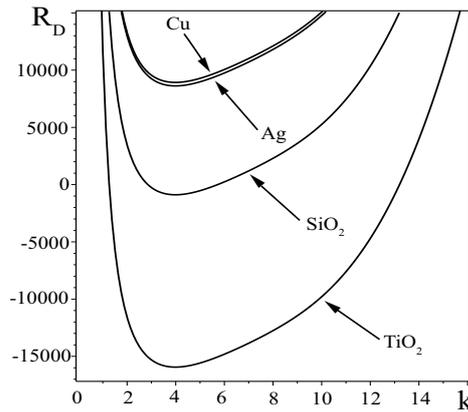


Рис. 4.20: Порівняння металевих та напівпровідникових нанорідин під дією обертання та спірального магнітного поля ($Ta = 50000$, $\varepsilon = 0.6$, $\xi = 0.3$, $Q_{\parallel} = 220$, $Q_{\varphi} = 1500$, $D_a = 0.5$, $L_e = 5000$, $Rb = 1$).

модифікований коефіцієнт дифузії N_A і число Релея концентрації наночастинок R_n завжди надають дестабілізуючу дію. Рис. 4.18с, 4.19а, 4.19b показана залежність число Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа для різних значень числа Льюїса, модифікованого коефіцієнта дифузії та концентраційного числа Релея. Графіки показують, що зі збільшенням числа Льюїса, модифікованого коефіцієнта дифузії і числа Релея концентрації число Релея-Дарсі зменшуються. Таким чином, параметри нанорідини впливають на стаціонарну конвекцію, що добре узгоджується з результатом, отриманим аналітично з рівняння (4.41). Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і відповідні їм критичні хвильові числа k_{cr} для різних значень Ta , Q_{\parallel} , Q_{φ} , D_a і ε показані в таблиці 4.1 на прикладі нанорідини Al_2O_3 -вода. Результати в таблиці 4.1 отримані чисельно для нанорідини Al_2O_3 -вода і добре узгоджуються з графічними результатами на Рис. 4.17а, 4.17b, 4.17с та Рис. 4.18а, 4.18b, 4.18с.

4.4.4 Аналіз стаціонарного режиму конвекції нанорідин із металевих та напівпровідникових наночастинок

У цьому розділі ми вивчаємо вплив спірального магнітного поля, обертання та інших параметрів нанорідини на стабільність системи. Стійкість системи досліджена шляхом аналізу поведінки теплового числа Релея-Дарсі за зміни

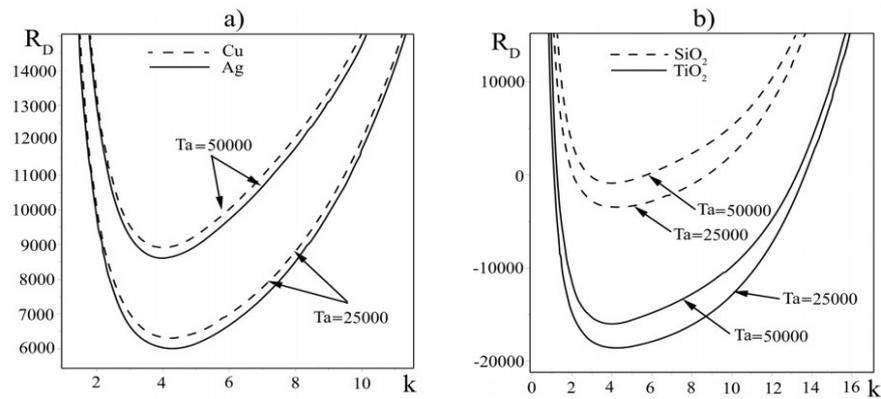


Рис. 4.21: Вплив числа Тейлора на стаціонарну конвективну нестійкість для різних нанорідин: а) Cu-вода та Ag-вода; б) TiO_2 -вода та SiO_2 -вода ($\varepsilon = 0.6$, $\xi = 0.3$, $Q_{\parallel} = 220$, $Q_{\varphi} = 1500$, $D_a = 0.5$, $L_e = 5000$, $R_b = 1$).

параметрів нанорідини. Чисельні розрахунки виконуються за допомогою рівняння (4.34) для стаціонарного режиму конвекції. Ми будемо застосовувати графічну інтерпретацію чисельних розрахунків для металевих (Cu, Ag) та напівпровідникових (TiO_2 та SiO_2) нанорідин. Янг та ін. [224] виявили, що фізичні характеристики нанорідин змінюються в залежності від форми, розміру та об'ємного відсотка наночастинок. Як відомо, металеві нанорідини є металевими наночастинами, розподіленими в базовій рідині. Оскільки металеві наночастинки мають високу теплопровідність, то вони збільшують теплопровідність нанорідин. Для аналізу стійкості металевих нанорідин розглядаються наночастинки металів (Cu і Ag), дисперговані в базовій рідині - воді. Для нанорідини Cu-вода значення параметрів нанорідини при $\phi_0^* = 0.001$ (концентрації наночастинок) становлять $R_n = 0.392$, $N_A = 0.5$, $L_e = 5000$, а для нанорідини Ag-води: $R_n = 0.465$, $N_A = 0.5$, $L_e = 5000$ [63]. Електропровідність напівпровідникових матеріалів знаходиться приблизно між провідником та ізолятором. При $\phi_0^* = 0.001$ (концентрації наночастинок) значення параметрів нанорідини становлять $R_n = 0.159$, $N_A = 20$, $L_e = 5000$ для TiO_2 -вода і $R_n = 0.0785$, $N_A = 17.5$, $L_e = 5000$ для SiO_2 -вода [225].

Фіксуємо значення параметрів обертання, спірального магнітного поля та

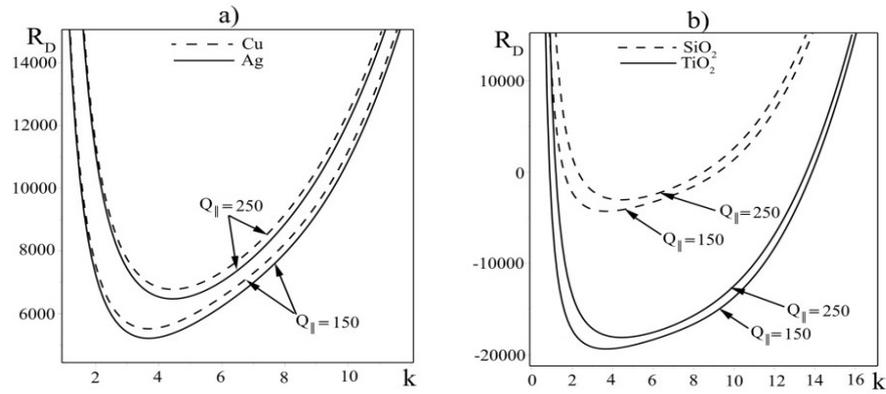


Рис. 4.22: Вплив аксіального числа Чандрасекара на стаціонарну конвективну нестійкість для різних нано рідин: а) Cu-вода та Ag-вода, б) TiO_2 -вода і SiO_2 -вода ($\varepsilon = 0.6$, $\xi = 0.3$, $Ta = 25000$, $Q_{\varphi} = 1500$, $D_a = 0.5$, $L_e = 5000$, $Rb = 1$).

пористості середовища, ми вивчаємо вплив різних нанорідин (металевих та напівпровідникових) на стаціонарну конвекцію. На Рис. 4.20 показана залежність числа Релея-Дарсі R_D від хвильового числа для різних нанорідин. З Рис. 4.20 видно, що нанорідина Cu-вода виявляє найбільшу стійкість у порівнянні з на-

Ta	$Q_{ }$	Q_{φ}	D_a	ε	а) Ra_{st}^{min}	а) k_{cr}	б) Ra_{st}^{min}	б) k_{cr}
25000	220	1500	0.5	0.6	6316.55	4.23	6012.35	4.23
50000	220	1500	0.5	0.6	8927.37	3.98	8623.17	3.99
25000	150	1500	0.5	0.6	5517.09	3.68	5212.88	3.68
25000	250	1500	0.5	0.6	6775.40	4.44	6471.20	4.44
25000	150	1500	0.5	0.6	5517.09	3.68	5212.88	3.68
25000	150	2000	0.5	0.6	5051.72	3.27	4747.51	3.27
25000	150	1500	0.3	0.6	5452.32	3.65	5148.12	3.65
25000	150	1500	0.6	0.6	5553.01	3.68	5248.81	3.68
25000	150	1500	0.5	0.6	5517.09	3.68	5212.88	3.68
25000	150	1500	0.5	0.8	6221.79	3.68	5993.63	3.68

Табл. 4.2: Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і критичні хвильові числа k_{cr} для металевих (Cu-вода, Ag- вода) нанорідин при фіксованих параметрах $Rb = 1$, $L_e = 5000$, а) $R_n|_{Cu} = 0.392$, $N_A|_{Cu} = 0.5$, б) $R_n|_{Ag} = 0.465$, $N_A|_{Ag} = 0.5$.

норідинами Ag-вода, TiO_2 -вода та SiO_2 -вода. З іншого боку, нанорідина TiO_2 -вода виявляє найменшу стійкість за наявності обертання та спірального

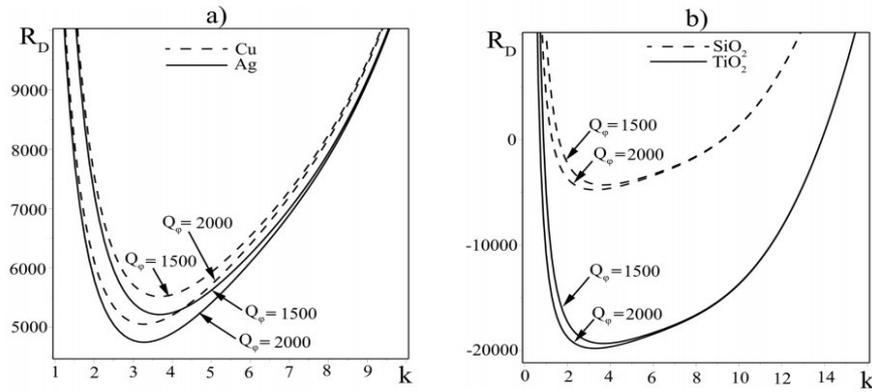


Рис. 4.23: Вплив азимутального числа Чандрасекара на стаціонарну конвективну нестійкість різних нанорідин: а) Cu-вода і Ag-вода, б) TiO_2 -вода і SiO_2 -вода ($\varepsilon = 0.6$, $\xi = 0.3$, $Ta = 25000$, $Q_{\parallel} = 150$, $D_a = 0.5$, $L_e = 5000$, $Rb = 1$).

магнітного поля. Причиною такої поведінки є не лише різна щільність наночастинок, а й різні теплофізичні властивості. У цьому випадку ми отримуємо таку нерівність

$$R_n N_A |_{\text{TiO}_2} > R_n N_A |_{\text{SiO}_2} > R_n N_A |_{\text{Ag}} > R_n N_A |_{\text{Cu}} \quad (4.42)$$

З (4.42) випливає, що напівпровідникові наночастилки надають більш дестабілізуючу дію на стаціонарну конвекцію, ніж металеві наночастилки.

Розглянемо тепер вплив різних параметрів нанорідини на теплову нестійкість системи при одночасному впливі обертання та магнітного поля. Рис. 4.21а та Рис. 4.21б ілюструють вплив числа Тейлора на число Релея-Дарсі для металевих та напівпровідникових нанорідин на водній основі. З цих графіків видно, що зі збільшенням значення параметра обертання Ta значення теплового числа Релея-Дарсі для обох форм конвекції збільшуються, що свідчить про стабілізуючий вплив обертання. Криві, що зображують вплив числа Тейлора для нанорідкості Cu-вода, знаходяться вище кривих для нанорідини Ag-вода, що вказує на те, що нанорідина Cu-вода має більш високий поріг конвективної нестійкості, ніж нанорідина Ag-вода. Під час розгляду ситуації з напівпровідниковими нанорідинами (Рис. 4.21б) виявляється, що SiO_2 -наночастилки покращують

Ta	Q_{\parallel}	Q_{φ}	D_a	ε	a) Ra_{st}^{min}	a) k_{cr}	b) Ra_{st}^{min}	b) k_{cr}
25000	220	1500	0.5	0.6	-18553.09	4.23	-3499.20	4.23
50000	220	1500	0.5	0.6	-15942.27	3.98	-888.38	3.98
25000	150	1500	0.5	0.6	-19352.56	3.68	-4298.67	3.68
25000	250	1500	0.5	0.6	-18094.24	4.44	-3040.35	4.44
25000	150	1500	0.5	0.6	-19352.56	3.68	-4298.67	3.68
25000	150	2000	0.5	0.6	-19817.93	3.27	-4764.04	3.27
25000	150	1500	0.3	0.6	-19417.32	3.65	-4363.43	3.65
25000	150	1500	0.6	0.6	-19316.63	3.68	-4262.74	3.68
25000	150	1500	0.5	0.6	-19352.55	3.68	-4298.67	3.68
25000	150	1500	0.5	0.8	-12431.19	3.68	-1140.32	3.68

Табл. 4.3: Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і критичні хвильові числа k_{cr} для напівпровідникових нанорідин (TiO_2 -вода, SiO_2 -вода) при фіксованих параметрах $Rb = 1$, $L_e = 5000$, а) $R_n|_{TiO_2} = 0.159$, $N_A|_{TiO_2} = 20$, б) $R_n|_{SiO_2} = 0.0785$, $N_A|_{SiO_2} = 17.5$.

конвективну стійкість нанорідини більшою мірою, ніж TiO_2 -наночастки у міру збільшення числа Тейлора. Таким чином, з графіків випливає, що в металевих нанорідинах виникнення конвекції уповільнюється порівняно з напівпровідниковими нанорідинами при спільній дії обертання та спірального магнітного поля. На Рис. 4.22а та Рис. 4.22б показано вплив аксіального числа Чандрасекара на число Релея-Дарсі для металевих та напівпровідникових нанорідин на водній основі. Стабілізуючий ефект зростає із збільшенням величини прикладеного аксіального магнітного поля, як видно на графіках. Внаслідок цього аксіальне магнітне поле підвищує стійкість системи. Нанорідини Cu -вода і SiO_2 -вода мають більш високий поріг стійкості, ніж нанорідини Ag -вода і TiO_2 -вода, коли амплітуда аксіального магнітного поля збільшується. На Рис. 4.23а та Рис. 4.23б показано вплив азимутального магнітного поля на теплову нестійкість нанорідин з наночастинками як металів, так і напівпровідників. З малюнків видно, що дестабілізуючий ефект збільшується зі збільшенням величини прикладеного азимутального магнітного поля. Таким чином, азимутальне магнітне

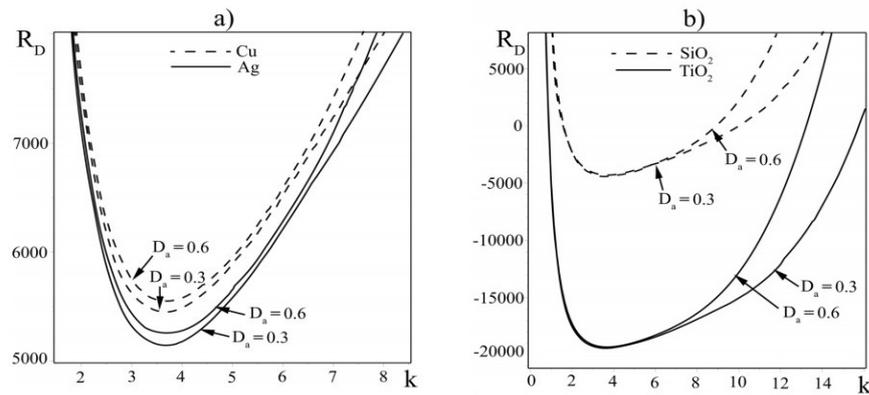


Рис. 4.24: Вплив числа Дарсі на стаціонарну конвективну нестійкість для різних нано рідин: а) Cu-вода і Ag-вода, б) TiO_2 -вода і SiO_2 -вода ($\varepsilon = 0.6$, $\xi = 0.3$, $Ta = 25000$, $Q_{\parallel} = 150$, $Q_{\varphi} = 1500$, $L_e = 5000$, $R = 1$).

поле посилює виникнення конвекції, і цей ефект, що дестабілізує, більш виражений у випадку неметалічних нанорідин. На Рис. 4.24а та Рис. 4.24б показано вплив числа Дарсі на систему. Значення R_D збільшується зі збільшенням числа Дарсі і, отже, число Дарсі D_a затримує настання нестійкості. При збільшенні числа Дарсі нанорідини Cu-вода і SiO_2 -вода виявляють більш високу стійкість, ніж нанорідини Ag-вода та TiO_2 -вода. Далі вивчимо вплив впливу пористості на систему. На Рис. 4.25а та Рис. 4.25б показано, що збільшення пористості ε затримує виникнення нестійкості. Число Релея-Дарсі для металевих нанорідин вище, ніж для неметалевих нанорідин. Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і відповідні їм критичні хвильові числа k_{cr} для різних значень Ta , Q_{\parallel} , Q_{φ} , D_a і ε і для випадку металевих нанорідин (Cu-вода, Ag-вода) показані в таблиці 4.2. Результати в таблиці 4.2 були отримані чисельно для металевих нанорідин (Cu-вода, Ag-вода) і добре узгоджуються з графічними результатами на Рис. 4.21а, 4.22а, 4.23а, 4.24а, 4.25а. Критичні числа Релея Ra_s^{min} і відповідні їм критичні хвильові числа k_{cr} для різних значень Ta , Q_{\parallel} , Q_{φ} , D_a і ε і для випадку напівпровідникових нанорідин (TiO_2 -вода, SiO_2 -вода) показані в таблиці 4.3. Чисельні результати в таблиці 4.3 для напівпровідникових нанорідин (TiO_2 -вода, SiO_2 -вода) добре узгоджуються з графічними результатами на Рис. 4.21б, 4.22б, 4.23б, 4.24б і

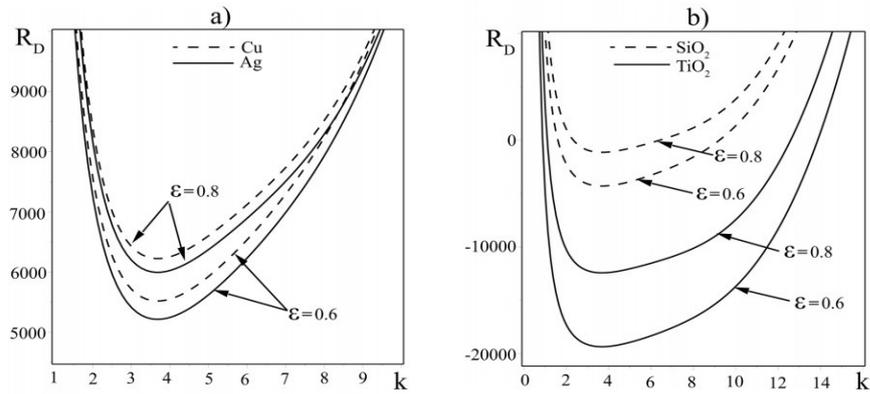


Рис. 4.25: Вплив пористості на стаціонарну конвективну нестійкість для різних нанорідин: а) Cu-вода та Ag-вода, б) TiO_2 -вода та SiO_2 -вода ($\xi = 0.3$, $Ta = 25000$, $Q_{\parallel} = 150$, $Q_{\varphi} = 1500$, $Da = 0.5$, $Le = 5000$, $Rb = 1$).

4.25b. Примітно, що нанорідина мідь-вода стійкіша, ніж нанорідина срібло-вода (див. Рис. 4.21а-4.25а), а нанорідина оксид кремнію-вода більш стабільна, ніж нанорідина оксид титану-вода (див. Рис. 4.21б-4.25б). Ці висновки узгоджуються з результатами статті [226].

4.5 Висновки до розділу 4

У цьому розділі досліджено теплову конвекцію в електропровідних середовищах, що обертаються в спіральному магнітному полі. Нижче наведено основні отримані результати.

- 1) Встановлено, що пороги стаціонарної та коливальної нестійкості для конвекції в спіральному магнітному полі нижче, ніж для конвекції в постійному аксіальному магнітному полі за будь-яких профілів неоднорідного обертання (числах Россбі Ro).
- 2) Отримана нова 8D динамічна система нелінійних рівнянь, що описує слабонелінійну стадію магнітної конвекції в середовищі, що неоднорідно обертається, в зовнішньому спіральному магнітному полі. Встановлено існування складної хаотичної структури – дивного атрактора. Проведено комп'ютерне моделювання 8D рівнянь хаотичної динаміки у комп'ютерному середовищі Matlab-Simulink і

LabVIEW. У середовищі Multisim на основі цих рівнянь побудована електронна схема генератора хаосу. Запропоновано практична реалізація цих генераторів для систем прихованої передачі інформації.

3) Встановлено, що за наявності наночастинок граничне значення стаціонарного критичного числа Релея Ra_{st}^{min} зменшується як для аксіальної, так і для спіральної магнітоконвекції з неоднорідним обертанням нанорідини.

4) В результаті дослідження магнітної конвекції в шарі пористого середовища, що обертається, насиченої електропровідної нанорідиною, під дією спірального магнітного поля було встановлено:

а) збільшення параметрів обертання та аксіального магнітного поля підвищують стійкість системи;

б) азимутальне магнітне поле дестабілізує вплив на стаціонарну конвекцію при позитивних значеннях магнітного числа Россбі;

в) пористість і число Дарсі мають стабілізуючий вплив, тоді як число Льюїса, модифікований коефіцієнт дифузії та концентраційне число Релея мають дестабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію системи;

Отримані висновки справедливі як для металевих, металооксидних так і напівпровідникових нанорідин.

Отримані в цьому розділі результати опубліковані у роботах [212, 215, 216, 221].

РОЗДІЛ 5

ПРОЦЕСИ СТРУКТУРОУТВОРЕННЯ В НЕОДНОРІДНИХ
СЕРЕДОВИЩАХ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМОМАГНІТНИХ
ЯВИЩ

Як відомо, термомагнітні (ТМ) хвилі виникають у середовищах, де одночасно присутні температурне й магнітне поля, між якими існує нелінійний або анізотропний зв'язок. Це явище спостерігається в плазмі, феромагнетиках, магнітних рідинах, а також у твердих тілах. Нестійкості ТМ-хвиль відіграють важливу роль у генерації магнітних полів. У галузі розвитку нестійкості плазма може стати турбулентною, що призводить до прискореного перенесення теплової енергії. Різні підходи до проблеми генерації магнітних полів з використанням ТМ-ефектів можна знайти в ранніх дослідженнях. Відомо, що ідею генерації магнітного поля Землі за допомогою термоелектричних струмів вперше було розвинуто у статті [227]. У цій роботі передбачалося, що термо е.р.с. виникає у рідкому ядрі Землі завдяки різниці температур між висхідними та низхідними конвективними потоками. У такому випадку результуючий момент кількості руху течій навколо осі Землі має бути асиметричним через переважний вплив сили Коріоліса на конвективні рухи, щоб створювати ненульовий внесок. У іншому дослідженні [228] було продемонстровано, що термо е.р.с. виникає внаслідок різниці температур між холодною мантією та гарячим ядром. Справді, градієнт температури, який з'єднує два провідники, призводить до виникнення термо е.р.с. Цей ефект також відомий як ефект Зеебека або термоелектричний ефект [229]:

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} \alpha dT, \quad (5.1)$$

де α – це коефіцієнт термо е.р.с. Відомо, що, згідно з дослідженням [229], існує ефект, протилежний ефекту Зеебека, відомий як ефект Пельтьє: коли струм проходить через з'єднання двох різних провідників, це призводить до виділе-

ння тепла. Засновуючись на цьому ефекті, в роботі [230] було зроблено висновок, що взаємодія термострумів мантиї та ядра може мати великий вплив на кліматичні зміни. Якщо ці термоструми рухаються в протилежних напрямках, це може спричинити остигання земної кори та навіть льодовиковий період. У випадку руху цих струмів у одному напрямку, може настати глобальне потепління. Розрахунки, проведені у роботі [230], показали, що поверхня Землі може прогрітися лише до 10°C . Це значення настільки велике, що в порівнянні з впливом людської діяльності на глобальне потепління воно має незвичайно значний характер. Оцінки, представлені у [230], демонструють, що потужність термострумів Землі є достатньою для генерації та підтримки магнітного поля Землі.

У роботі [231] була розроблена теорія магнітного поля Землі, яке виникає завдяки термоелектричному струму, що протікає в ядрі Землі через ефект Нернста. Ефект Нернста проявляється у виникненні електричного поля \mathbf{E}_N , яке пропорційне векторному добутку магнітної індукції \mathbf{B} та градієнта температури ∇T в провіднику. Для декартової геометрії ($OX \perp OY \perp OZ$), де $\mathbf{B} \parallel OY$, $\nabla T \parallel OX$ напруженість електричного поля можна виразити так:

$$E_{Nz} = -\mathcal{N} B_y \frac{dT}{dx}, \quad (5.2)$$

де \mathcal{N} – постійна Нернста-Еттінгсгаузена, яка залежить від властивостей провідника та може мати як позитивні, так і негативні значення. Цей ефект виникає через відхилення потоку заряджених частинок під впливом сили Лоренца. Спрямований потік частинок виникає внаслідок дифузії. Дифузійний потік завжди направлений від нагрітої до холоднішої частини провідника, незалежно від знаку заряду частинок. Зазначимо, що напрямки сили Лоренца для позитивних і негативних частинок є протилежними. Це призводить до розділення зарядів.

Таким чином, термомагнітна е.р.с. створюється за допомогою ефекту Нернста

$$\mathcal{E}_N = \oint \mathbf{E}_{eff} d\mathbf{l} = \oint \mathcal{N} [\mathbf{B} \times \nabla T] d\mathbf{l} = \oint [\mathbf{G} \times \mathbf{B}] d\mathbf{l}, \quad (5.3)$$

де $\mathbf{G} = -\mathcal{N}\nabla T$ має розмірність швидкості [231]. Фізичний сенс \mathbf{G} стане зрозумілим після отримання рівняння індукції магнітного поля. Використовуючи закон Ома з урахуванням термомагнітного поля \mathbf{E}_{eff} та рівняння Максвелла, отримуємо

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{G} \times \mathbf{B}] + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (5.4)$$

де $\eta = 1/(\mu\sigma)$ - коефіцієнт магнітної в'язкості, а μ - коефіцієнт магнітної проникності. З рівняння (5.4) видно, що магнітне поле посилюється аналогічно до ефекту диференційного обертання електропровідної рідини [?], і це досягається через розтягнення силових ліній за допомогою теплової швидкості дрейфу \mathbf{G} , коли вони частково «заморожені». У роботі [231] було введено термомагнітне число Рейнольдса $Re_{tm} = GL/\eta$, де L - характерний масштаб поля. Це число відображає вплив індукційного члена $\text{rot}[\mathbf{G} \times \mathbf{B}]$ порівняно з членом дифузії $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$. Якщо перший доданок справа від (5.4) менший за другий при малих $Re_{tm} \ll 1$, то магнітне поле гасне через магнітну в'язкість. При $Re_{tm} \gg 1$ другий доданок справа від (5.4) стає незначним у порівнянні з першим, і силові лінії магнітного поля переміщуються зі швидкістю \mathbf{G} . Таким чином, існує аналогія з посиленням магнітного поля через диференційне (неоднорідне) обертання електропровідного середовища, для якого число Рейнольдса $Re_\omega = \omega_0 L^2/\eta$, де ω_0 - характерна кутова швидкість обертання середовища.

У роботі [232] було показано, що магнітне поле Землі та планет може створюватися термоелектричними струмами $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \alpha \nabla T)$, де α - коефіцієнт питомої термо е.р.с., що залежить як від хімічного складу середовища, так і від температури. Отже, якщо градієнт коефіцієнта термоедс $\nabla \alpha$ обумовлений неоднорідністю хімічного складу середовища, то магнітне поле $\partial \mathbf{B}/\partial t \approx [\nabla T \times \nabla \alpha]$ збуджується через непаралельність векторів ∇T і $\nabla \alpha$. Цей ефект аналогічний

до ефекту Бірмана-Шлютера [233]. Основна ідея цього ефекту полягає в механізмі самозбудження магнітних полів термоелектрорушійною силою. Як показано в [233], неоднорідність хімічного складу космічного об'єкта може призводити до непаралельності градієнтів тиску електронів ∇p_e і щільності електронів ∇n_e . В результаті виникає електричне поле $\mathbf{E}^{(i)} = (1/en_e)\nabla p_e$, що призводить до збудження магнітних полів $\partial\mathbf{B}/\partial t \approx \text{rot}\mathbf{E}^{(i)} = -\frac{1}{n_e^2}[\nabla n_e \times \nabla p_e]$. Такий механізм пов'язаний із генерацією початкових магнітних полів, які в якийсь момент були відсутні. У теорії динамо Брагінського [234] передбачалося, що градієнт температури ∇T_0 і градієнт коефіцієнта термододс $\nabla\alpha$ паралельні $[\nabla T_0 \times \nabla\alpha] = 0$, тому було зроблено висновок, що термо е.р.с. у ядрі Землі незначна. Однак, як показано в [235], генерація магнітних полів за умови $[\nabla T_0 \times \nabla\alpha] = 0$ можлива за рахунок розвитку термомагнітної (ТМ) нестійкості і немає жодних протиріч з динамо Брагінського [234].

ТМ-нестійкість була відкрита в ряді досліджень [106–108], де пояснювалася спонтанна генерація сильних магнітних полів (приблизно 10^6 Гс) у різних експериментах, пов'язаних із взаємодією лазерного випромінювання з речовиною за дуже короткі часові інтервали, близько 10^{-9} секунд. Необхідною умовою для розвитку ТМ-нестійкості є неоднорідність та неізотермічність плазми. Фізичний механізм цієї нестійкості полягає в наступному. Розглянемо спрощене рівняння для магнітного поля [111]:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{en_e}[\nabla T_e \times \nabla n_e] - \frac{c}{e}\text{rot}\left(\frac{\mathbf{R}_T}{n_e}\right) \quad (5.5)$$

де T_e та n_e – температура та концентрація електронів, а \mathbf{R}_T – термосила [212]. З рівняння (5.5) видно, що магнітне поле не може виникнути, якщо ∇T_e паралельне ∇n_e . Однак невеликі збурення температури T_1 , що відбуваються в напрямку, протилежному до початкової неоднорідності плазми $(\nabla n_0, \nabla T_0)$, призводять до появи малих флуктуацій магнітного поля завдяки «батарейному» ефекту Бірмана-Шлютера [233]: $\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t} \approx [\nabla T_1 \times \nabla n_0]$. Ці флуктуації поля по-

роджують потік тепла електронів, який протікає перпендикулярно до основних градієнтних потоків (∇T_0). Це явище аналогічне термомагнітному ефекту Ледюка-Рігі, який виявлений у твердих провідниках [229]. Ефект Ледюка-Рігі спостерігається при наявності градієнту температур у провіднику в магнітному полі, перпендикулярному тепловому потоку. Це призводить до виникнення другорядної різниці температур, перпендикулярної магнітному полю та тепловому потоку. Потік тепла, який виникає, переносить енергію в область з підвищеною температурою. Отже, додатковий градієнт температури T_1 , що виникає перпендикулярно до ∇n_0 , сприяє зростанню початкових збурень магнітного поля відповідно до рівняння індукції (5.5).

Астрофізичні аспекти ТМ-нестійкості докладно розглянуті в [236], де надано пояснення до появи сильних магнітних полів в поверхневих шарах (гаряча плазма) масивних зірок. Цей механізм можливий у верхній атмосфері гарячих зірок, де відхилення від локальної термодинамічної рівноваги створюють область зі зворотним температурним градієнтом. В роботах [93], [237, 238] ТМ-нестійкість досліджується в неоднорідних обертових плазмових середовищах, таких як гарячі галактичні диски та акреційні диски, у присутності зовнішнього аксіального магнітного поля. У цих дослідженнях проведений аналіз лінійної стійкості іонізованих гарячих дисків з градієнтом температури та зовнішнім аксіальним магнітним полем. Як показано в [93], [237, 238], як гідромагнітні, так і термомагнітні ефекти, пов'язані з ефектом Нернста, можуть призвести до посилення хвиль і зробити диски нестійкими. Досліджувались режими, в яких можуть діяти як термомагнітна, так і магнітообертальна нестійкості (МОН). Магнітообертальна нестійкість виникає, коли слабке осьове магнітне поле дестабілізує азимутальне диференційне обертання плазми. У випадку бездисипативної плазми це відбувається при виконанні умови $d\Omega^2/dR < 0$, що є характерним для кеплерівських течій $\Omega \sim R^{-3/2}$ [122, 123]. Це робить МОН найімовірнішим джерелом турбулентності в акреційних дисках [92]. В [93], [237, 238] було зазна-

чено, що навіть при відсутності МОН, ТМ-нестійкість через ефект Нернста є перспективним механізмом для індукції турбулентності в дисках.

На відміну від робіт [93], [237, 238], де використовувалося наближення бездисипативної магнітної гідродинаміки, у цьому розділі ми розглянемо ТМ-ефекти в в'язкій електропровідній рідині, що неоднорідно обертається. Далі, ми даємо детальніше обґрунтування локальному методу геометричної оптики для межі $\lambda \ll L$.

5.1 Термомагнітні нестійкості в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається

У цьому підрозділі досліджується стійкість малих осесиметричних збурень у в'язкій електропровідній рідині, що неоднорідно обертається, з урахуванням термогальваномагнітних явищ [235]. В наближенні локальної геометричної оптики отримано дисперсійне рівняння, яке містить ефекти Холла, Нернста, Ледюка-Рігі, градієнти рівноважної температури ∇T_0 та питомої термо е.р.с. $\nabla \alpha$ при постійних магнітному \mathbf{B} і гравітаційному \mathbf{g} полях. Отримані інкременти термомагнітної (ТМ) нестійкості в електропровідному середовищі, що неоднорідно обертається, без зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}_0 = 0$ для випадку «плавних» (слабонеоднорідне середовище) градієнтів ∇T_0 і $\nabla \alpha$. Встановлено галузі розвитку ТМ-нестійкості залежно від профілю кутової швидкості обертання (числа Россбі Ro) та радіального хвильового числа k . За наявності зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}_0 \neq 0$ встановлені галузі розвитку холлівської магнітообертальної нестійкості залежно від профілю кутової швидкості обертання (числа Россбі Ro) та аксіального хвильового числа k_z . При поширенні збурень з хвильовим вектором \mathbf{k} у радіальному напрямку $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_R$, отримані інкременти ТМ-нестійкостей з урахуванням ефектів Нернста у зовнішньому магнітному полі \mathbf{B}_0 , Ледюка-Рігі, неоднорідності рівноважної температури та питомої термо е.р.с., а також сили плавучості у стратифікації температурі середовища [235].

5.1.1 Постановка задачі та рівняння еволюції малих обурень

Розглянемо електропровідну рідину, яка неоднорідно обертається, наприклад, рідкий метал або плазма, знаходиться в постійному гравітаційному полі \mathbf{g} та магнітних полях \mathbf{B}_0 при наявності постійного вертикального градієнту температури $\nabla T_0 = \text{const} = -A_T \mathbf{e}$ ($A_T > 0$ - постійний градієнт, \mathbf{e} - одиничний вектор, спрямований вертикально вгору вздовж осі Z) та градієнту питомої термо е.р.с. $\nabla \alpha \parallel \mathbf{e}$. У розглянутій моделі ми вважаємо, що градієнт питомої термо е.р.с. $\nabla \alpha$ пов'язаний з неоднорідністю хімічного складу електропровідної рідини.

Відомо, що при наявності магнітного поля \mathbf{B} та градієнта температури ∇T , вирази для закону Ома та потоку тепла \mathbf{q} модифікуються з урахуванням термогальваномагнітних явищ [239]:

$$\mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \alpha \nabla T + \mathcal{R}[\mathbf{B} \times \mathbf{j}] + \mathcal{N}[\mathbf{B} \times \nabla T] \quad (5.6)$$

$$\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j} = -\kappa \nabla T + \alpha T \mathbf{j} + \mathcal{N}T[\mathbf{B} \times \mathbf{j}] + \mathcal{L}[\mathbf{B} \times \nabla T], \quad (5.7)$$

де $\mathcal{R}, \mathcal{N}, \mathcal{L}$ - відповідно коефіцієнти Холла, Нернста і Ледюка-Рігі, φ - електричний потенціал. У виразах (5.6)-(5.7) ми знехтували анізотропією коефіцієнтів електропровідності $\sigma_{\parallel} \approx \sigma_{\perp} = \sigma$, теплопровідності $\kappa_{\parallel} \approx \kappa_{\perp} = \kappa$ і термо е.р.с. $\alpha_{\parallel} \approx \alpha_{\perp} = \alpha$ через слабкість зовнішнього магнітного поля \mathbf{B}_0 , для якого параметр $\beta = B_0^2/2\mu P_0 \ll 1$ малий (P_0 - стаціонарний тиск рідини, μ - коефіцієнт магнітної проникності).

Операцію rot застосовуючи до закону Ома (5.6), ми отримуємо рівняння для індукції магнітного поля \mathbf{B} . Після підстановки виразу (5.7) у рівняння теплового балансу

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = -\text{div} \mathbf{q},$$

ми можемо записати рівняння магнітної гідродинаміки для в'язкої стислої рі-

дини в наближенні Буссінеска з урахуванням термогальваноманітних явищ:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla(P + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}) + \frac{1}{\rho_0\mu}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{e}g\beta_T T + \nu\nabla^2\mathbf{V} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{V} = \eta\nabla^2\mathbf{B} - [\nabla\alpha \times \nabla T] - \frac{\mathcal{R}}{\mu}\text{rot}[\mathbf{B} \times \text{rot}\mathbf{B}] - \mathcal{N}\text{rot}[\mathbf{B} \times \nabla T] \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)T = -\frac{1}{\rho_0 c_p}\text{div}\left(-\kappa\nabla T + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \alpha T\mathbf{j} + \mathcal{N}T[\mathbf{B} \times \mathbf{j}] + \mathcal{L}[\mathbf{B} \times \nabla T]\right) \quad (5.10)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad \text{div}\mathbf{V} = 0, \quad (5.11)$$

У рівнянні (5.9) міститься джерело збудження магнітного поля неелектромагнітної природи $[\nabla\alpha \times \nabla T]$, яке є аналогом «батареїного» ефекту Бірман-Шлютера в плазмі. Знесення силових ліній магнітного поля в рівнянні (5.9) пов'язане не тільки з рухом рідини \mathbf{V} , але й з тепловим потоком, для якого швидкість теплопереносу дорівнює $\mathbf{V}_T = \mathcal{N}\nabla T$. Знесення магнітного поля через ефект Нернста сприяє його проникненню у велику область середовища. Здійснимо оцінку збудженого магнітного поля у стаціонарному режимі без урахування зносу поля та ефекту Холла. Тоді з рівняння (5.9) для ϕ -компоненти (тороїдального) магнітного поля отримаємо: $B_\phi^{max} \approx \alpha T \mu \sigma (L_B/L_\alpha)$, де L_B - характерний масштаб збудженого магнітного поля, L_α - характерний масштаб неоднорідності середовища. Підставляючи значення параметрів для рідкого земного ядра: $\alpha T \approx 10^{-2}$ (при температурі $T \approx 1000$ К) [232], $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ В·с/А·м, $\sigma = 3 \cdot 10^5$ (Ом·м)⁻¹ [19] при співвідношенні масштабів $(L_B/L_\alpha) = 10^2$, отримаємо оцінне значення тороїдального магнітного поля земного ядра $B_\phi^{max} \approx 10^{-1}$ Тл, яке за порядком величини співпадає з даними монографії [240].

Представимо всі величини в рівняннях (5.8)-(5.11) у вигляді суми стаціонарної та обуреної частин $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{u}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, $P = P_0 + p$, $T = T_0 + \theta$. Ми вважаємо, що стаціонарна швидкість обертання рідини має азимутальний напрямок $\mathbf{V}_0 = R\Omega(R)\mathbf{e}_\phi$, де $\Omega(R)$ - кутова швидкість обертання, спрямова-

на вертикально вгору по осі OZ . Стаціонарна течія неоднорідна рідини, що обертається, будемо моделювати течією Куетта-Тейлора, укладеною між двома обертовими циліндрами з кутовою швидкістю обертання $\Omega(R)$. Однорідне (постійне) магнітне поле $\mathbf{B}_0 \parallel \boldsymbol{\Omega}$ спрямовано вздовж осі OZ : $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$. Далі, магнітне поле \mathbf{B}_0 будемо називати аксіальним в циліндричній системі координат (R, ϕ, z) . Стаціонарний стан системи рівнянь (5.8)-(5.11) описується такими рівняннями:

$$\Omega^2 R = \frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dR}, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz} = g\beta_T T_0, \quad \frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0. \quad (5.12)$$

$$B_0 \frac{d\Omega(R)R}{dz} = [\nabla\alpha \times \nabla T_0]_\phi = 0 \quad (5.13)$$

Рівняння (5.12) показують, що у радіальному напрямі встановлюється відцентрова рівновага, а вертикальному - гидростатическое. З рівняння (5.13) випливає, що коефіцієнт термо е.р.с. α має постійне значення в радіальному напрямку: $d\alpha/dR = 0$, тоді α може мати залежність від координат (ϕ, z) . Якщо вважати розподіл хімічного складу середовища осесиметричним, то можна виконати умову: $d\alpha/dz \neq 0$. При цьому також виконується умова колінеарності векторів $[\nabla\alpha \times \nabla T_0] = 0$, причому градієнти $\nabla\alpha$ і ∇T_0 можуть бути як паралельними один одному $\nabla\alpha \uparrow\uparrow \nabla T_0$, так і антипаралельними: $\nabla\alpha \uparrow\downarrow \nabla T_0$. У наступному розділі буде проведено дослідження стійкості малих збурень $(\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, \theta)$ на тлі стаціонарного стану (5.12)-(5.13).

5.1.2 Наближення локальної геометричної оптики та дисперсійне рівняння

Розглянемо межу слабонеоднорідного середовища, коли просторовий масштаб неоднорідності середовища за z -координатом L_α, L_T набагато перевищує характерний масштаб збурень (довжину хвилі) λ : $L \gg \lambda$. У короткохвильовій межі ($L \gg \lambda$) виконується наближення геометричної оптики, і тому всі збурені величини $(\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, \theta)$ можна уявити залежністю виду: $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + \gamma t)$, де

\mathbf{k} – хвильовий вектор, γ – коефіцієнт посилення (або згасання) збурень. У цьому розділі ми застосовуємо асимптотичний метод ВКБ для коректного опису короткохвильового наближення, який детально описаний у підрозділі 3.1.2. У результаті застосування цієї методики до збурених величин $(\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, \theta)$ було отримано дисперсійне рівняння, яке має досить громіздкий вигляд [235]. Тому далі проведемо його аналіз у деяких граничних випадках.

5.1.3 Аналіз дисперсійного рівняння для випадку $\mathbf{B}_0 = 0$

У цьому підрозділі ми досліджуємо можливість спонтанної генерації магнітного поля ТМН в неоднорідній електропровідній рідині без зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}_0 = 0$. Розглянемо слабо неоднорідне електропровідне середовище, в якому значення $T_0(z)$ і $\alpha(z)$ плавно змінюються вздовж координати z . У цьому випадку локально застосовне наближення геометричної оптики.

Розглянемо вплив ТМ-ефектів на стійкість малих збурень у електропровідній рідині, що неоднорідно обертається, без зовнішнього магнітного поля. $\mathbf{B}_0 = 0$. У цьому випадку ми отримуємо таке дисперсійне рівняння [235]:

$$\begin{aligned} & [(\gamma + \omega_\nu)^2 + \kappa^2 \xi^2] [(\gamma + i\omega_T + \omega_\eta)(\gamma + \omega_\chi) - \omega_{TM}] - \\ & - \frac{k_R^2}{k^2} \omega_{VB}^2 (\gamma + i\omega_T + \omega_\eta)(\gamma + \omega_\nu) = 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

де $\omega_{VB} = \sqrt{g\beta_T K_T T_0}$ - частота Вайселя-Брента, яка залежить від градієнта температури, $\kappa = 2\Omega\sqrt{1 + \text{Ro}}$ - епіциклічна частота, $\xi = k_z/k$, $\omega_{TM} = \sqrt{\alpha s k_R^2 K_\alpha}$ - термомагнітна частота.

Аналіз дисперсійного рівняння (5.14) можна провести, представивши його у вигляді полінома четвертого порядку γ . Припускаючи, що коефіцієнт Нернста є малим ($\mathcal{N} \rightarrow 0$), до дисперсійного рівняння (5.14) з уже дійсними коефіцієнтами застосовуємо класичний критерій стійкості Рауса-Гурвіца [147]. Застосовуючи цей критерій, ми знаходимо необхідну та достатню умову стійкості по

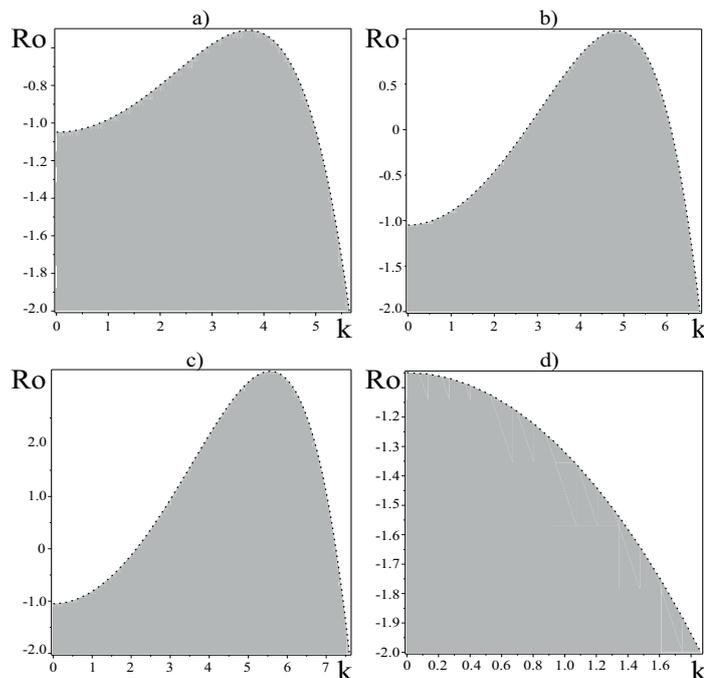


Рис. 5.1: Сірим кольором показана область, в якій виникає ТМ-нестійкість без зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}_0 = 0$ для $Ta = 2000$ та $Ra = 5000$ з параметрами генерації: а) $f = -2$; б) $f = -1/2$; в) $f = 0$; д) $f = 2$.

відношенню до осесиметричних збурень

$$\begin{aligned}
 Ro &> -\frac{(\omega_{TM}^2 - \omega_\eta \omega_\chi)(\omega_\nu^2 + 4\Omega^2 \xi^2) + \omega_{VB}^2 \frac{k_R^2}{k^2} \omega_\nu \omega_\eta}{4\Omega^2 \xi^2 (\omega_{TM}^2 - \omega_\eta \omega_\chi)} = \\
 &= -1 - \frac{\omega_\nu^2}{4\Omega^2 \xi^2} - \frac{\omega_{VB}^2 \frac{k_R^2}{k^2} \omega_\nu \omega_\eta}{4\Omega^2 \xi^2 (\omega_{TM}^2 - \omega_\eta \omega_\chi)} = Ro_{cr}, \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

де критичне число Россбі Ro_{cr} відповідає профілю неоднорідного обертання для нейтрального стану $\gamma = 0$ на межі стійкості. З (5.15) видно, що для не в'язкого $\nu = 0$ середовища критичне число Россбі збігається з релеєвським профілем обертання $Ro_{cr} = -1$ [121]. Якщо температура стала $T_0 = \text{const}$ ($\omega_{VB} = 0$) і $\nu \neq 0$, то отримуємо відомий критерій стійкості для «незамагніченого» течії Куетта [241]. У загальному випадку формула (5.15) показує, що критичний профіль обертання може мати як позитивну $Ro_{cr} > 0$, так і негативну $Ro_{cr} < 0$ величину залежно від напрямки градієнта температури. Розглянемо питання розвитку ТМ-нестійкості при числах Россбі $Ro < Ro_{cr}$, використовуючи нерів-

ність (5.15) у безрозмірних змінних:

$$\text{Ro} > -1 - \frac{a^6}{\pi^2 \text{Ta}} - \frac{k^2 \text{Ra}}{\pi^2 \text{Ta}(f-1)} = \text{Ro}_{\text{cr}} \quad (5.16)$$

Тут ми виконали перехід від розмірних хвильових чисел до безрозмірних: $k^2 \rightarrow a^2/L^2$, $k_R^2 \rightarrow k^2/L^2$, $k_z^2 \rightarrow \pi^2/L^2$. Безрозмірні параметри $\text{Ta} = 4\Omega^2 L^4/\nu^2$ – число Тейлора, $\text{Ra} = g\beta_T K_T T_0 L^4/\nu\chi$ – число Релея на характерному масштабі неоднорідності L ,

$$f = \frac{\omega_{TM}^2}{\omega_\eta \omega_\chi} = \frac{\alpha^2 T_0 k_R^2}{\rho_0 c_p \mu \chi \eta k^4} \left[\left(1 + \frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} \right) K_T K_\alpha - K_\alpha^2 \right]$$

– параметр генерації. З'ясуємо, як змінюється область розвитку ТМ-нестійкості в площині (k, Ro) для різних значень параметра генерації f при фіксованих числах $\text{Ta} = 2000$ і $\text{Ra} = 5000$. Рис. 5.1а-5.1б показана область розвитку ТМ-нестійкості для негативних значень параметрів генерації: $f = -2$ і $f = -1/2$ відповідно. Негативні значення f можливі за малих градієнтів температури $K_\alpha > K_T(1 + \mu \mathcal{L}/\alpha)$ або за паралельних градієнтах $\mathbf{K}_\alpha \parallel \mathbf{K}_T$. З Рис. 5.1б видно, що зі збільшенням параметра генерації область нестійкості існує як із негативних ($\text{Ro} < 0$), і позитивних ($\text{Ro} > 0$) числах Россбі. Рис. 5.1с показаний випадок $f = 0$, який можливий при однорідному просторовому розподілі питомої термо е.р.с.: $\mathbf{K}_\alpha = 0$. Область нестійкості тут зміщується у бік збільшення позитивних чисел Россбі. Навпаки, коли параметр генерації $f > 1$, область нестійкості тут зміщується у бік збільшення позитивних чисел Россбі (див. Рис. 5.1д). Очевидно, що така ситуація можлива за великих градієнтів температури: $K_T > K_\alpha$.

Проведемо аналіз дисперсійного рівняння (5.14) для випадку дуже малих осциляцій елемента рідини в стратифікованому середовищі $\omega_{VB} \rightarrow 0$ що можливо, якщо зміна щільності середовища не залежить від температури (наближення Буссінеска порушується) або за малої архімедової сили $\mathbf{g} \rightarrow 0$, наприклад в умовах невагомості. В результаті рівняння (5.14) розпадається на два рівняння.

Перше рівняння з урахуванням в'язкості середовища:

$$\gamma + \omega_\nu = \pm \sqrt{-\xi^2 \kappa^2}.$$

Звідси видно, що збурення згасають на гідродинамічній в'язкості за $\kappa^2 > 0$. Для релеєвського профілю $Ro = -1$ збурення також згасають на гідродинамічній в'язкості $\gamma = -\nu k^2$. Збурення можуть бути нестійкими для негативних чисел Россбі $Ro < -1$, наприклад, для профілю неоднорідного обертання $Ro = -2$ критерій розвитку нестійкості має вигляд:

$$\frac{2\Omega k_z}{\nu k^3} > 1.$$

Друге дисперсійне рівняння містить термомагнітні ефекти:

$$\gamma^2 + \gamma \left(\omega_\eta + \omega_\chi + i\omega_{\mathcal{N}} \frac{k_z K_T}{k^2} \right) + \omega_\eta \omega_\chi - \omega_{TM}^2 + i\omega_{\mathcal{N}} \omega_\chi \frac{k_z K_T}{k^2} = 0. \quad (5.17)$$

Рішення квадратного рівняння (5.17) представимо у вигляді $\gamma_{1,2} = \Gamma_{1,2} + i\omega_{01,02}$, де вирази для інкременту $\Gamma_{1,2}$ і частоти $\omega_{01,02}$ коливань ТМ-збурень відповідно дорівнюють:

$$\Gamma_1 \approx -\frac{\alpha^2 T_0 k_R^2}{\rho_0 c_p \mu \chi k^2 (1 + \widetilde{Pm})} \left[\left(\frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha - K_\alpha^2 \right] - \frac{(\chi + \widetilde{Pm}(\eta + \chi)) k^2}{1 + \widetilde{Pm}},$$

$$\omega_{01} \approx -\frac{\mathcal{N} \widetilde{Pm}}{1 + \widetilde{Pm}} k_z \frac{dT_0}{dz}, \quad (5.18)$$

$$\Gamma_2 \approx \frac{\alpha^2 T_0 k_R^2}{\rho_0 c_p \mu \chi k^2 (1 + \widetilde{Pm})} \left[\left(\frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha - K_\alpha^2 \right] - \frac{\eta k^2}{1 + \widetilde{Pm}}, \quad \omega_{02} \approx -\frac{\mathcal{N} k_z \frac{dT_0}{dz}}{1 + \widetilde{Pm}} \quad (5.19)$$

Наявність осцилюючої частоти коливань (5.18)-(5.19) показує, що малі обурення можуть не тільки зростати в часі, але і переміщатися в провідному середовищі. Як видно з (5.18)-(5.19), генерація магнітного поля (ГМП) може бути викликана лише неоднорідністю коефіцієнта термо е.р.с. $K_\alpha \neq 0$ (див. (5.18) за $K_T = 0$). Ефект Ледюка-Ріги дає істотний внесок у ТМ-нестійкість, якщо виконується

умова: $\mu\mathcal{L}/\alpha \gg 1$. Для параметрів земного ядра це умова дає чисельну оцінку: $\mathcal{L} \gg 8 \text{ А}\cdot\text{м}/\text{с}\cdot\text{К}$. Насправді застосовується коефіцієнт Ледюка-Риги S [242] який пов'язані з \mathcal{L} наступним співвідношенням $\mathcal{L} = \kappa|S|$. Якщо прийняти коефіцієнт теплопровідності, наприклад для заліза в розплавленому стані $\kappa = 39 \text{ Вт}/\text{м}\cdot\text{До}$ [242], то величина S має бути $|S| \gg 0.2 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$.

Визначимо критерії розвитку ТМ-нестійкості, і як наслідок ГМП, у двох граничних випадках: а) низькопровідного середовища, коли магнітотеплове число Прандтля велике $\widetilde{\text{Pr}} = \eta/\chi \gg 1$, і б) високопровідного середовища, коли $\widetilde{\text{Pr}}$ мало: $\widetilde{\text{Pr}} = \eta/\chi \ll 1$. Випадок а) добре виконується для параметрів земного ядра. Приймаючи щільність розплавленого заліза $\rho_0 \approx 7 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, питому теплоємність $c_p \approx 835 \text{ Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$ [240], знаходимо значення коефіцієнта температуропровідності $\chi = \kappa/\rho_0 c_p \approx 6.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, який виявляється набагато менше коефіцієнта магнітної в'язкості $\eta = 1/\mu\sigma \approx 2.65 \text{ м}^2/\text{с}$: $\eta \gg \chi$. Тоді з виразів (5.18)-(5.19) маємо:

$$\Gamma_1^{(l)} \approx \frac{\alpha^2 T_0 k_R^2}{\rho_0 c_p \mu \eta k^2} \left[K_\alpha^2 - \left(\frac{\mu\mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha \right] - \eta k^2, \quad \omega_{01} \approx -\mathcal{N} k_z \frac{dT_0}{dz}, \quad (5.20)$$

$$\Gamma_2^{(l)} \approx \frac{\alpha^2 T_0 k_R^2}{\rho_0 c_p \mu \eta k^2} \left[\left(\frac{\mu\mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha - K_\alpha^2 \right] - \chi k^2, \quad \omega_{02} \approx -\frac{\mathcal{N} k_z}{\widetilde{\text{Pr}}} \frac{dT_0}{dz} \quad (5.21)$$

Якщо градієнт температури малий $K_T \ll K_\alpha$ або дорівнює нулю $K_T = 0$, то другий корінь квадратного рівняння (5.17) негативний $\Gamma_2^{(l)} < 0$ – ТМ-збурення згасають. Тому розглянемо критерій здійсненності $\Gamma_1^{(l)} > 0$:

$$\frac{\alpha^2 T_0}{\rho_0 c_p \mu \eta^2} > \frac{k^4}{k_R^2 K_\alpha^2} \cong \left(\frac{L_\alpha}{\lambda} \right)^2 \quad (5.22)$$

Для параметрів земного ядра нерівність (5.22) не виконується, оскільки ліва частина (5.22) виявляється набагато меншою за праву $10^{-9} > (L_\alpha/\lambda)^2$ для слабонеоднорідного середовища $L_\alpha \gg \lambda$. Якщо градієнти температури та питомої термо е.р.с. приблизно рівні $K_T \approx K_\alpha$ або виконується $K_T \gg K_\alpha$ і $\mu\mathcal{L}/\alpha \gg 1$,

то ГМП може виникнути через ефект Ледюка-Ріги (див. формулу (5.21))

$$\frac{\alpha T_0}{\eta} |S| > \left(\frac{L_T L_\alpha}{\lambda^2} \right) \quad (5.23)$$

Поставляючи (5.23), використовувані вище значення параметрів (α, η, T_0) для рідкого земного ядра, отримаємо оцінку для коефіцієнта S при якому можлива ГМП: $|S| > 2.65 \cdot 10^2 (L_T L_\alpha / \lambda^2)$. Звідси випливає, що для слабонеоднорідного середовища $L_\alpha, L_T \gg \lambda$, генерація магнітного поля ТМ-нестійкістю можлива тільки за дуже великих S . Таким чином, з результатів (5.22)-(5.23) слід не ефективність ГМП у слабонеоднорідній слабопровідній рідині ТМ-нестійкістю. Згасання ТМ-збурень пов'язане з тепло- та електропровідністю середовища. Аналогічні висновки мають місце і при паралельних градієнтах температури та питомої термо е.р.с.: $\mathbf{K}_T \parallel \mathbf{K}_\alpha$.

Розглянемо випадок б) високопровідного середовища $\widetilde{\text{Pm}} = \eta/\chi \ll 1$, тоді з (5.18)-(5.19) знаходимо:

$$\Gamma_1^{(h)} \approx \frac{\alpha^2 T_0 k_R^2}{\rho_0 c_p \mu \chi k^2} \left[K_\alpha^2 - \left(\frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha \right] - \chi k^2, \quad \omega_{01} \approx -\mathcal{N} \widetilde{\text{Pm}} k_z \frac{dT_0}{dz}, \quad (5.24)$$

$$\Gamma_2^{(h)} \approx \frac{\alpha^2 T_0 k_R^2}{\rho_0 c_p \mu \chi k^2} \left[\left(\frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha - K_\alpha^2 \right] - \eta k^2, \quad \omega_{02} \approx -\mathcal{N} k_z \frac{dT_0}{dz} \quad (5.25)$$

За умови малості градієнта температури $K_T \ll K_\alpha$ або $K_T = 0$, другий корінь $\Gamma_2^{(h)} < 0$ негативний (загасне рішення), тому нас буде цікавити критерій здійсненності $\Gamma_1^{(h)} > 0$:

$$\frac{\alpha^2 T_0}{\rho_0 c_p \mu \chi^2} > \frac{k^4}{k_R^2 K_\alpha^2} \cong \left(\frac{L_\alpha}{\lambda} \right)^2 \quad (5.26)$$

Так як величина коефіцієнта температуропровідності χ велика, то для слабо неоднорідного середовища $L_\alpha \gg \lambda$ виконання критерію (5.26) мало ймовірно.

Якщо $K_T \gg K_\alpha$ або $K_T \approx K_\alpha$, то $\Gamma_1^{(h)} < 0$ (загасає рішення). Критерій

розвитку нестійкості набуває вигляду ($\Gamma_2^{(h)} > 0$):

$$|S| > \frac{\eta}{\alpha T_0} \left(\frac{L_T L_\alpha}{\lambda^2} \right) \quad (5.27)$$

Як очевидно з (5.27), найефективніше генеруються магнітні поля межі високої провідності ($\sigma \rightarrow \infty$) середовища рахунок розвитку ТМ-неустойчивості.

5.1.4 Аналіз дисперсійного рівняння для випадку $\mathbf{B}_0 \neq 0$

Приступимо до аналізу дисперсійного рівняння для випадку, коли існує зовнішнє магнітне поле: $\mathbf{B}_0 \neq 0$. Для опису фізичного механізму, що розглядаються нами ТМ-ефектів в електропровідячому середовищі, що неоднорідно обертається, з градієнтами температури і питомої термодс, зручно провести поділ поширюваних обурень на аксіальне ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k_z$) радіальне ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_R k_R$) напрямку.

5.1.4.1 Нестійкість для хвиль, що розповсюджуються в аксіальному напрямку $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k_z$

Якщо збурення поширюються лише в аксіальному напрямі ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k_z$), то ми отримаємо два дисперсійних рівняння наступного вигляду:

$$(\gamma + \omega_\nu)(\gamma + i\omega_T + \omega_\eta) + \omega_A^2 = 0, \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & [(\gamma + \omega_\nu)((\gamma + i\omega_T + \omega_\eta)^2 + \omega_{\mathcal{R}}(\omega_{\mathcal{R}} - 2\Omega R_0)) + \omega_A^2(\gamma + i\omega_T + \omega_\eta)]^2 + \\ & + [2\Omega(1 + R_0)((\gamma + i\omega_T + \omega_\eta)^2 + \omega_{\mathcal{R}}(\omega_{\mathcal{R}} - 2\Omega R_0)) + \\ & + \omega_A^2(2\Omega R_0 - \omega_{\mathcal{R}})][2\Omega((\gamma + i\omega_T + \omega_\eta)^2 + \omega_{\mathcal{R}}(\omega_{\mathcal{R}} - 2\Omega R_0)) - \omega_A^2 \omega_{\mathcal{R}}] = 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

де $\omega_A = \sqrt{k_z^2 B_0^2 / \rho_0 \mu}$ - альфвенівська частота.

Дисперсійне рівняння (5.28) описує згасання осцилюючих з частотою ω_T альфвенівських хвиль у плазмі з в'язкою та омічною диссипацією. У цьому рівнянні немає впливу обертання на інкремент обурень, тому ми почнемо аналіз

дисперсійного рівняння (5.29). У цьому рівнянні деякі ТМ-ефекти, пов'язані з неоднорідністю питомої термододс, явищем «замагнічування» теплопровідності (ефект Ледюка-Ріги) та дії архімедової сили випали, оскільки ми розглядаємо хвильові обурення лише в аксіальному напрямку. У рівнянні (5.29) ефект Нернста проявляється в осциляціях збурень із частотою ω_T . Тому основну увагу приділимо дослідженню впливу ефекту Холла в розвитку стандартної МВН. Спочатку наведемо деякі відомі результати, отримані у різних граничних випадках.

Без урахування ефектів Холла ($\omega_R = 0$) і Нернста ($\mathcal{N} = 0$) дисперсійне рівняння (5.29) переходить у вже відомий результат [142] при $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k_z$:

$$[(\gamma + \omega_\nu)(\gamma + \omega_\eta)^2 + \omega_A^2]^2 + \kappa^2(\gamma + \omega_\eta)^2 + 4\Omega^2 \text{Ro} \omega_A^2 = 0 \quad (5.30)$$

У роботі [142] до рівняння (5.29) був застосований критерій асимптотичної стійкості обурень Льенара-Шипара [147]. Відповідно до цього критерію, необхідною та достатньою умовою стійкості є умова, що накладаються на профіль неоднорідного обертання, тобто на число Россбі (Ro):

$$\text{Ro} > -\frac{(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)^2 + 4\Omega^2 \omega_\eta^2}{4\Omega^2(\omega_A^2 + \omega_\eta^2)} = \text{Ro}_{\text{cr}} \quad (5.31)$$

У межі ідеальної магнітної гідродинаміки ($\nu = \chi = \eta = 0$) Чандрасекаром [121] було показано, що магнітне поле дестабілізує течію Куетта. Справді, із рівняння (5.30) для цього випадку маємо:

$$\gamma^2 + \omega_A^2 + \frac{\kappa^2}{2} = \pm \sqrt{\frac{\kappa^4}{4} + 4\Omega^2 \omega_A^2} \quad (5.32)$$

Звідси видно, що з помірних амплітудах магнітного поля $\omega_A < \Omega$ сумарний ефект, обумовлений магнітним полем, є дестабілізуючим, т. е. допускається можливість розвитку нестійкості течій з $\kappa^2 > 0$. Цей ефект є причиною виникнення стандартної МОН.

Нехай у рівнянні (5.29) виконуються умови $\omega_{\mathcal{R}} \gg 2\Omega\text{Ro}$ та $\omega_T = 0$. Перша умова накладає обмеження на довжину хвилі збурень $\lambda \ll 2\pi\sqrt{\mathcal{R}B_0/2\Omega\text{Ro}\mu}$, друга - справедливо при $T_0 = \text{const}$. За цих умов для зручності аналізу асимптотичної стійкості збурень рівняння (5.29) запишемо у вигляді полінома шостого ступеня

$$\mathcal{P}(\gamma) \equiv A_0\gamma^6 + A_1\gamma^5 + A_2\gamma^4 + A_3\gamma^3 + A_4\gamma^2 + A_5\gamma + A_6 = 0, \quad (5.33)$$

з речовими коефіцієнтами

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 2(2\omega_{\eta} + \omega_{\nu}), \quad A_2 = (2\omega_{\eta} + \omega_{\nu})^2 + 2(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2 + 2\omega_{\nu}\omega_{\eta} + \omega_A^2) + 4\Omega^2(1 + \text{Ro}),$$

$$A_3 = 2(2\omega_{\eta} + \omega_{\nu})(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2 + 2\omega_{\nu}\omega_{\eta} + \omega_A^2) + 2(\omega_{\nu}(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2) + \omega_{\eta}\omega_A^2) + 16\Omega^2(1 + \text{Ro})\omega_{\eta},$$

$$A_4 = 2(2\omega_{\eta} + \omega_{\nu})(\omega_{\nu}(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2) + \omega_{\eta}\omega_A^2) + (\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2 + 2\omega_{\nu}\omega_{\eta} + \omega_A^2)^2 + \\ + 8\Omega^2(1 + \text{Ro})(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2) + 16\Omega^2(1 + \text{Ro})\omega_{\eta}^2 - 2\Omega(2 + \text{Ro})\omega_A^2\omega_{\mathcal{R}},$$

$$A_5 = 2(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2 + 2\omega_{\nu}\omega_{\eta} + \omega_A^2)(\omega_{\nu}(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2) + \omega_{\eta}\omega_A^2) + 16\Omega^2(1 + \text{Ro})\omega_{\eta}(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2) - \\ - 4\Omega(2 + \text{Ro})\omega_A^2\omega_{\mathcal{R}}\omega_{\eta}$$

$$A_6 = (\omega_{\eta}\omega_A^2 + \omega_{\nu}(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2))^2 + 4\Omega^2(1 + \text{Ro})(\omega_{\eta}^2 + \omega_{\mathcal{R}}^2)^2 - 2\Omega(2 + \text{Ro})(\omega_{\mathcal{R}}^2 + \omega_{\eta}^2)\omega_A^2\omega_{\mathcal{R}} + \\ + \omega_A^4\omega_{\mathcal{R}}^2.$$

Застосовуючи критерій асимптотичної стійкості Льенара-Шипара до рівняння (5.33), було встановлено, що ефект Холла у зовнішньому магнітному полі може чинити як стабілізуючу, так і дестабілізуючу дію залежно від профілю неоднорідного обертання, тобто знака числа Россбі. Далі, обговоримо вплив ефекту Холла на сферу розвитку стандартної МОН. Для зручності запишемо вираз для Ro_{cr} у безрозмірних змінних

$$\text{Ro}_{\text{cr}} = -\frac{\tilde{k}_z^2(\tilde{k}_z^2(1 + R_H^2) + Q)^2 + \tilde{k}_z^2\text{Ta}(1 + R_H^2) + \tilde{k}_z^2Q^2R_H^2 - \text{Ta}Q\text{Pm}(1 + R_H^2)r}{\text{Ta}(\tilde{k}_z^2(1 + R_H^2)^2 - (1 + R_H^2)Q\text{Pm}(r/2))}, \quad (5.34)$$

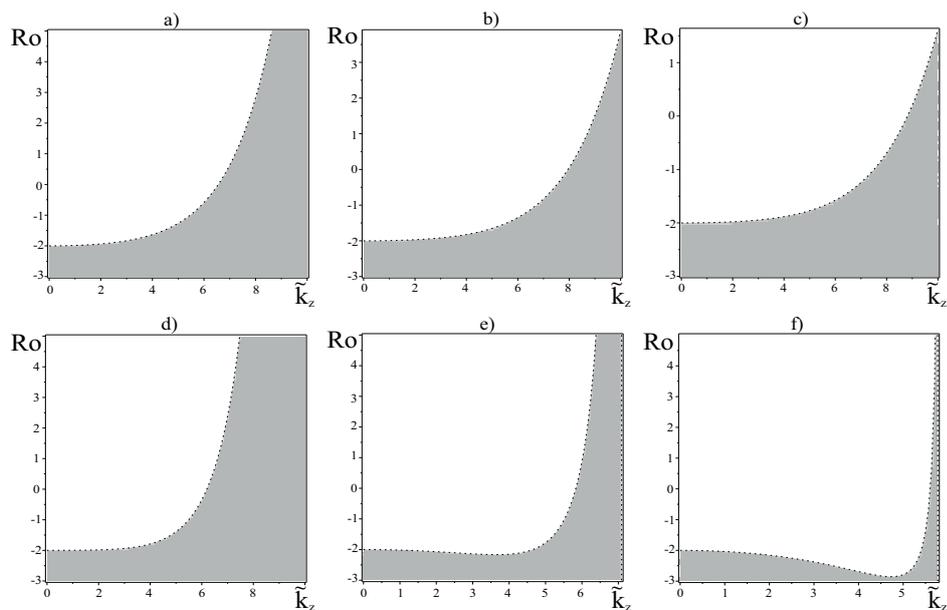


Рис. 5.2: Сірим кольором показана область, де виникає холловська МОН до різних параметрів Холла: а) $r = 10$; б) $r = 20$; в) $r = 30$ і чисел Холла: д) $R_H = 2$; е) $R_H = 3$; ф) $R_H = 3.7$. Графіки а)-ф) побудовані при фіксованих параметрах $Ta = 1000$, $Q = 100$, $Pm = 1$.

де $\tilde{k}_z = k_z L$ – безрозмірне аксіальне хвильове число, $Q = B_0^2 L^2 / \mu \rho_0 \nu \eta$ – число Чандрасекара, $Pm = \nu / \eta$ – магнітне число Прандтля, $R_H = \mathcal{R} B_0 / \mu \eta$ – число Холла, $r = \omega \mathcal{R} / \Omega$ – параметр Холла. Рис. 5.2а-5.2с сірим кольором показана область розвитку стандартної МОН з урахуванням ефекту Холла для фіксованих параметрів $R_H = 1$, $Ta = 1000$, $Q = 100$, $Pm = 1$. З Рис. 5.2а-5.2с видно, що зі збільшенням параметра Холла область нестійкості зменшується у бік негативних чисел Россбі. Потім, фіксуючи параметр Холла $r = 10$, ми будемо змінювати число Холла R_H при постійних значеннях $Ta = 1000$, $Q = 100$, $Pm = 1$. З графіків на Рис. 5.2а та Рис. 5.2д слід, що зі збільшенням числа R_H від 1 до 2 область нестійкості збільшується. Однак, при подальшому зростанні числа R_H область нестійкості зменшується (див. Рис. 5.2е-5.2ф). Отже, ефект Холла може як стабілізувати, і дестабілізувати зростання збурень залежно від профілю неоднорідного обертання (числа Россбі).

5.1.4.2 Нестійкість для хвиль, що розповсюджуються в радіальному напрямку $\mathbf{k} = \mathbf{e}_R k_R$

Розглянемо ситуацію, коли обурення поширюються лише у радіальному напрямку ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_R k_R$). За цих умов стандартна МОН не виникає, оскільки $\mathbf{B}_0 \mathbf{k} = 0$, і загальне дисперсійне рівняння наводиться до наступного виду:

$$(\gamma + \omega_\nu)[(\gamma + \omega_\eta)(\gamma + \omega_\chi) - \zeta \omega_{AR}^2 - \omega_{TM}^2] - \omega_{VB}^2(\gamma + \omega_\eta) = 0, \quad (5.35)$$

тут безрозмірний параметр $\zeta = \mathcal{N} \omega_{\mathcal{N}} / c_p$, обумовлений впливом ефекту Нернста, $\omega_{AR} = k_R B_0 / \sqrt{\mu \rho_0}$ - радіальна альфвенівська частота. Спочатку розглянемо ситуацію, коли $\omega_{VB} \rightarrow 0$, т. е. зміна щільності середовища залежить від температури (наближення Буссинеска порушується) чи за малої архимедової силі $\mathbf{g} \rightarrow 0$, наприклад в умовах невагомості. В результаті рівняння (5.35) розпадається на два рівняння:

$$\gamma + \omega_\nu = 0, \quad (\gamma + \omega_\eta)(\gamma + \omega_\chi) - \zeta \omega_{AR}^2 - \omega_{TM}^2 = 0.$$

Перше рівняння показує, що обурення згасають на гідродинамічній в'язкості $\gamma = -\nu k_R^2$. Рішення другого, квадратного рівняння мають позитивний ($\gamma_+ > 0$) і негативний ($\gamma_- < 0$) коріння. Випишемо позитивний корінь, який дає внесок у розвиток нестійкості

$$\gamma_+ = \frac{\zeta \omega_{AR}^2 + \omega_{TM}^2 - \omega_\eta \omega_\chi}{\omega_\eta + \omega_\chi}. \quad (5.36)$$

Визначимо критерії розвитку нестійкості у двох граничних випадках: а) низькопровідного середовища, коли магнітотеплове число Прандтля велике $\widetilde{\text{Pm}} = \eta / \chi \gg 1$, і б) високопровідного середовища, коли $\widetilde{\text{Pm}}$ мало: $\widetilde{\text{Pm}} = \eta / \chi \ll 1$. Для випадку а) інкремент нестійкості має вигляд:

$$\gamma_+^{(a)} = \frac{\alpha^2 T_0}{\rho_0 c_p \mu \eta} \left[\left(\frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha - K_\alpha^2 \right] + \left(\frac{\mathcal{N}^2 T_0 B_0^2}{\rho_0 c_p \mu \eta} - \chi \right) k_R^2. \quad (5.37)$$

Звідси бачимо, що теплопровідність середовища призводить до стабілізації зростання збурень. В однорідному середовищі ($K_T = K_\alpha = 0$) можлива нестійкість через ефект Нернста, якщо виконується така нерівність:

$$\frac{\mathcal{N}^2 T_0 B_0^2}{\rho_0 c_p \mu \eta} > \chi.$$

Розглянемо можливі варіанти розвитку ТМ-нестійкості при $\mathbf{k} = \mathbf{e}_R k_R$ у неоднорідному середовищі ($K_T \neq 0, K_\alpha \neq 0$). 1) Якщо в неоднорідному середовищі градієнт температури малий $K_T \ll K_\alpha$ або дорівнює нулю $K_T = 0$, то нестійкість виникає за умови

$$\frac{\mathcal{N}^2 T_0 B_0^2}{\rho_0 c_p \mu \eta} > \frac{\alpha^2 T_0}{\rho_0 c_p \mu \eta} K_\alpha^2 + \chi k_R^2.$$

Порівняємо члени праворуч нерівності між собою, підставляючи чисельні значення фізичних величин ($\rho_0, c_p, \mu, \eta, \chi$) для параметрів земного ядра при $T_0 = 2000\text{K}$ і $\alpha \approx 10^{-3} \text{ В / К}$:

$$\frac{\alpha^2 T_0}{\rho_0 c_p \mu \eta \chi} \frac{K_\alpha^2}{k_R^2} \approx \frac{16}{(L_\alpha / \lambda)^2}.$$

Таким чином для слабонеоднорідного середовища ($L_\alpha \gg \lambda$) цілком можлива ситуація $L_\alpha / \lambda \cong 4$, коли члени в правій частині нерівності одного порядку. У цьому випадку умова розвитку нестійкості набуває вигляду простої нерівності:

$$\frac{\mathcal{N}^2 B_0^2}{\alpha^2} > \frac{1}{L_\alpha^2}.$$

2) Якщо градієнти температури та питомої термо е.р.с. приблизно рівні $K_T \approx K_\alpha$, то нестійкість виникає при виконанні нерівності:

$$\frac{\mathcal{N}^2 T_0 B_0^2}{\rho_0 c_p \mu \eta} k_R^2 + \frac{\alpha T_0 \mathcal{L}}{\rho_0 c_p \eta} K_\alpha^2 > \chi k_R^2.$$

Тут нестійкість виникає завдяки ефектам Нернста та Ледюка-Рігі. Якщо ефект Ледюка-Рігі стає переважним, то критерієм виникнення нестійкості є умова,

що збігається з виразом (5.23) за $L_\alpha = L_T$. Як зазначалося вище, параметрів земного ядра ТМ-неустойчивість можлива лише за дуже великих значеннях коефіцієнта S . 3) Нарешті, якщо $K_T \gg K_\alpha$, то нестійкість можлива при виконанні нерівності:

$$\frac{\mathcal{N}^2 T_0 B_0^2}{\rho_0 c_p \mu \eta} k_R^2 + \frac{\alpha^2 T_0}{\rho_0 c_p \mu \eta} \left[\left(\frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha \right] > \chi k_R^2.$$

При слабкому ефекті Нернста та $\mu \mathcal{L} / \alpha \gg 1$ критерієм виникнення нестійкості також збігається з виразом (5.23). З отриманих вище результатів випливає, що в слабонеоднорідному ($k_R^2 \gg K_T K_\alpha, K_\alpha^2$) низькопровідному електропровідному середовищі, що знаходиться в аксіальному магнітному полі виникає ТМ-нестійкість в основному завдяки ефекту Нернста. Для випадку високопровідного середовища б) інкремент нестійкості набуває вигляду

$$\gamma_+^{(b)} = \frac{\alpha^2 T_0}{\rho_0 c_p \mu \chi} \left[\left(\frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right) K_T K_\alpha - K_\alpha^2 \right] + \left(\frac{\mathcal{N}^2 T_0 B_0^2}{\rho_0 c_p \mu \chi} - \eta \right) k_R^2. \quad (5.38)$$

Тут стабілізація зростання збурень викликана електропровідністю середовища. Як і в попередньому випадку а), в однорідному середовищі ($K_T = K_\alpha = 0$) можлива нестійкість через ефект Нернста, якщо виконується така нерівність:

$$\frac{\mathcal{N}^2 T_0 B_0^2}{\rho_0 c_p \mu \chi} > \eta.$$

Перейдемо тепер до дослідження стійкості збурень, вважаючи рівняння $\omega_{VB} \neq 0$. Тоді для ідеальної ($\omega_\nu = \omega_\eta = 0$) і теплопровідної ($\omega_\chi \neq 0$) рідини позитивний інкремент ТМ-нестійкості набуде вигляду:

$$\gamma_+ = \frac{1}{\omega_\chi} (\zeta \omega_{AR}^2 + \omega_{TM}^2 + \omega_{VB}^2). \quad (5.39)$$

Перший доданок в інкременті нестійкості (5.39) пов'язаний з ефектом Нернста у зовнішньому магнітному полі \mathbf{B}_0 , другий доданок обумовлений впливом ефекту Ледюка-Риги і неоднорідності рівноважної температури та питомої термо е.р.с., вплив архімедової сили чи сили плавучості в стратифікованому за тем-

пературою середовищі.

Для дослідження стійкості обурень у загальному випадку, представимо рівняння (5.35) у вигляді полінома третього ступеня по γ :

$$a_0\gamma^3 + a_1\gamma^2 + a_2\gamma + a_3 = 0. \quad (5.40)$$

У цьому рівнянні всі коефіцієнти ($a_i, i = 0, 1, 2, 3$) речові, тому ми можемо застосувати до (5.40) критерій асимптотичної стійкості Ляпунова-Шіпара. Відповідно до цього критерію, ефект Нернста у зовнішньому магнітному полі \mathbf{B}_0 ($\zeta\omega_{AR}$), ефект Ледюка-Ріги та неоднорідності рівноважної температури і питомої термо е.р.с. (ω_{TM}), а також ефект Архімедової сили в стратифікованому за температурою середовищі (ω_{VB}) призводять до дестабілізації осесиметричних збурень у дисипативному середовищі.

5.2 Генерація магнітного поля термомагнітними ефектами в тонкому шарі електропровідної рідини з неоднорідним обертанням

У цьому розділі ми проведемо дослідження спонтанної генерації магнітного поля ТМ-нестійкістю в шарі електропровідної рідини, що неоднорідно обертається, за наявності зовнішнього постійного вертикального магнітного поля \mathbf{B}_0 [223]. Тут ми розглянемо стаціонарний режим магнітної $\mathbf{B}_0 \neq 0$ конвекція (завдання Релея-Бенара) в шарі рідини, що неоднорідно обертається, в якому генерується тороїдальне магнітне поле через різницю температур і питомої термо е.р.с. на межах шару. Крім того, ми проведемо дослідження слабонелінійної стадії стаціонарної магнітної конвекції, що неоднорідно обертається, з урахуванням ТМ-ефектів [243].

5.2.1 Рівняння еволюції малих збурень та загальне дисперсійне рівняння

Розглянемо таку геометрію задачі, де на нижній площині шару підтримується більш висока температура T_d , ніж верхній площині T_u : $T_d > T_u$ – підігрів знизу. Питома термодисперсія на нижній («гарячій») площині α_d менше, ніж на верхній («холодній») α_u : $\alpha_d < \alpha_u$. Така ситуація цілком можлива, якщо врахувати залежність коефіцієнта питомої термо е.р.с. від температури $\alpha \sim \psi/T_0$ (ψ – хімічний потенціал) [239]. Просторово неоднорідне розподіл $T_0(z)$ і $\alpha(z)$ усередині шару представимо у вигляді лінійної залежності від z :

$$T_0(z) = T_d - \frac{\Delta T}{h} \cdot z, \quad \Delta T = T_d - T_u, \quad \alpha(z) = \alpha_d + \frac{\Delta \alpha}{h} \cdot z, \quad \Delta \alpha = \alpha_u - \alpha_d.$$

Різниця температур на межах шару в полі сили тяжіння \mathbf{g} , як відомо [91], призводить до порушення механічної рівноваги в системі, в якій розвивається конвективна нестійкість та формуються конвективні осередки. Температурні обурення, що діють у радіальному напрямку призводять до появи вихрового термоструму через різниці значень питомої термодисперсії $\alpha(z)$ на межах шару. Цей струм створює обурення азимутального (тороїдального) магнітного поля H_ϕ , яке впливатиме на режим теплоперенесення. Магнітне поле, що збуджується, H_ϕ створює потоки тепла, спрямовані перпендикулярно самому полю і градієнту температури. Таким чином, встановлюється позитивний зворотний зв'язок: потоки тепла, що знову виникають, створюють вихрову термо е.р.с., що сприяє посиленню збурень магнітного поля H_ϕ . Природно, що при цьому термомагнітна нестійкість впливатиме на розвиток конвективної нестійкості. Застосуємо локальний метод ВКБ для збурень, що залежать від горизонтальних координат (R, ϕ) , до системи лінійних рівнянь (5.8)-(5.10). В результаті ми отримаємо дисперсійне рівняння [243]:

$$\text{Ra} = \left(\text{Ra}^{(0)} - \text{Ra}^{(TM)} \right) \left(1 - \frac{k^2 q_\alpha R_\alpha}{\Gamma_\eta \Gamma_\chi} \right) \Xi^{-1}, \quad (5.41)$$

де вираз $Ra^{(0)}$ – внесок у дисперсійне рівняння без урахування ТМ-ефектів (див. підрозділ 3.2.1.):

$$Ra^{(0)} = \frac{\Gamma_\chi(a^2\Gamma_A^4 + \pi^2Ta(1 + Ro)\Gamma_\eta^2 + \pi^4Ha^2TaRoPm)}{k^2\Gamma_\eta\Gamma_A^2},$$

$$Ra^{(TM)} = q_\alpha R_\alpha \frac{a^2(\gamma + a^2)}{\Gamma_\eta} + q_\alpha R_\alpha \frac{\pi^2Ta}{\Gamma_A^2}(1 + Ro) + R_\alpha \frac{\pi^2Q}{\Gamma_A^2}PmPr^{-1}\sqrt{Ta},$$

$$\Xi = \left(1 - \frac{q_\alpha}{\Gamma_\eta^2}\pi^2Pm^2Pr^{-1}Ro\sqrt{Ta}\right) \left(1 - \frac{q_\alpha R_\alpha}{\Gamma_\chi\Gamma_A^2}k^2(\gamma + a^2)\right) + \frac{q_\alpha\pi^2PmPr^{-1}}{\Gamma_\eta^2\Gamma_\chi\Gamma_A^2} \times$$

$$\times \left(\sqrt{Ta}(1 + Ro)\Gamma_\eta(\Gamma_\eta\Gamma_\chi - k^2q_\alpha R_\alpha) + \pi^2QPmRo\sqrt{Ta}\Gamma_\chi\right) - \frac{q_\alpha R_\alpha\pi^2k^2Q}{\Gamma_\eta\Gamma_\chi\Gamma_A^2},$$

де введені нові безрозмірні параметри: $R_H = \frac{\mathcal{R}B_0}{\mu\eta}$ – Холла, $R_N = \frac{\mathcal{N}\Delta T}{\eta}$ – Нернста, $R_\alpha = \frac{\Delta\alpha\Delta T}{\eta B_0}$ – термо е.р.с. Безрозмірні параметри

$$q_N = \frac{\mathcal{N}T_0B_0^2}{\rho_0c_p\mu\chi(\Delta T)} \quad \text{і} \quad q_\alpha = \frac{\alpha T_0B_0}{\rho_0c_p\mu\chi(\Delta T)} \left[\left(\frac{\mu\mathcal{L}}{\alpha} + 1\right) \frac{\Delta T}{T_0} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right]$$

пов'язані з впливом ефектів Нернста, термо е.р.с. і Ледюка-Ріги на процес теплоперенесення.

При відсутності теплових процесів $Ra = 0$, в неоднорідно обертовому шарі електропровідної рідини в постійному магнітному полі виникає магнітообертальна нестійкість (МОН). У цьому випадку рівняння (5.41) збігається з дисперсійним рівнянням для стандартної МОН (SMRI) з урахуванням дисипативних процесів [142, 143].

5.2.2 Стаціонарний режим конвекції

Вочевидь, що з стаціонарного режиму конвекції коефіцієнт посилення γ дорівнює нулю ($\gamma = 0$), тоді формули (5.41) знайдемо критичне значення числа Релея Ra_{st} для стаціонарної конвекції:

$$Ra_{st} = \frac{a^2(a^4 + \pi^2Q)\pi^2Q + (a^2(a^4 + \pi^2Q) + \pi^2Ta(1 + Ro))(a^4 - k^2q_\alpha R_\alpha) +}{k^2}$$

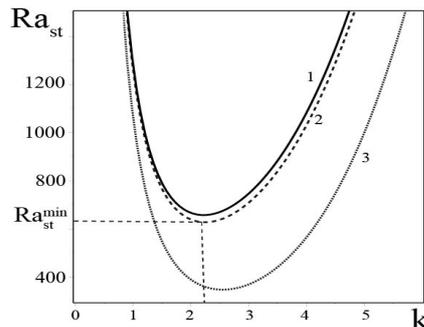


Рис. 5.3: Залежність стаціонарного числа Релея Ra_{st} від хвильових чисел k за відсутності обертання $Ta = 0$ і магнітного поля $\mathbf{B}_0 = 0$. Крива 1 відповідає значенням параметра $R_{TM} = 0$, крива 2 – $R_{TM} = 2$, крива 3 – $R_{TM} = 20$.

$$\frac{+\pi^4 Q P m R o T a - k^2 \pi^2 R_\alpha \tilde{Q} \sqrt{T a}}{a^4 + p i^2 Q + q_\alpha \pi^2 P m P r^{-1} \sqrt{T a} (1 + R o (1 - P m))}. \quad (5.42)$$

Для з'ясування питання вплив ТМ-ефектів на режим стаціонарної конвекції розглянемо деякі граничні випадки.

1. Без обертання ($Ta = 0, Ro = 0$) і магнітного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) з виразу (5.42) знаходимо

$$Ra_{st} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} - R_{TM}(k^2 + \pi^2). \quad (5.43)$$

Якщо градієнт питомої термо е.р.с. дорівнює нулю (середовище хімічно однорідне), то з (5.43) слід відомий результат $Ra_{st}^{\min} = (k^2 + \pi^2)^3/k^2$. Тут мінімальне значення критичного числа Релея досягає $Ra_{st} = 27\pi^4/4$ для хвильових чисел $k_c = \pi/\sqrt{2}$ [?, 91]. Мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} обчислюється за формулою (5.43) за $k = k_c$, яке задовольняє наступному співвідношенню

$$2 \left(\frac{k_c}{\pi} \right)^6 + 3 \left(\frac{k_c}{\pi} \right)^4 = 1 + \left(\frac{k_c^4}{\pi^6} \right) R_{TM}.$$

Чисельному значенню Ra_{st}^{\min} на графіку Рис. 5.3 відповідає точка на нейтральній кривій, що розділяє області стійких і нестійких збурень. Тут видно, що із зростанням коефіцієнта R_{TM} мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} зменшується, тобто знижується поріг розвитку нестій-

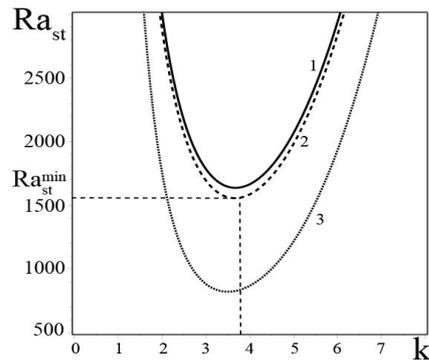


Рис. 5.4: Залежність стаціонарного числа Рейля Ra_{st} від хвильових чисел k для середовища, що обертається, з числом Тейлора $Ta = 946$ ($Ro = 0$) без зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}_0 = 0$. Крива 1 відповідає значенням $R_{TM} = 0$, крива 2 – $R_{TM} = 2$, крива 3 – $R_{TM} = 20$.

кості. Чисельна оцінка коефіцієнта R_{TM} була проведена для фізичних параметрів земного ядра: щільність розплавленого заліза $\rho_0 \approx 7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, питома теплоємність $c_p \approx 835 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ [240] і коефіцієнт теплопровідності для заліза в розплавленому стані $\kappa = 39 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ [242]. Ці параметри дають значення коефіцієнта температуропровідності $\chi = \kappa/\rho_0 c_p \approx 6.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, який виявляється набагато меншим за коефіцієнт магнітної в'язкості $\eta = 1/\mu\sigma \approx 2.65 \text{ м}^2/\text{с}$: $\eta \gg \chi$. Розмір $R_{TM} \approx 2$ отриман для варіацій питомої термо е.р.с. $\Delta\alpha = 3 \cdot 10^{-4} \text{ В/К}$ і температури $\Delta T = 2000 \text{ К}$, а $R_{TM} \approx 20$ зі збільшенням варіацій питомої термо е.р.с. до $\Delta\alpha \approx 10^{-3} \text{ В/К}$.

2. Якщо середовище обертається неоднорідно ($Ro \neq 0$), але без зовнішнього магнітного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$), то вираз (5.42) набуде вигляду

$$Ra_{st} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} + \frac{\pi^2 Ta}{k^2} (1 + Ro) - R_{TM} \left(k^2 + \pi^2 + \frac{\pi^2 Ta}{(k^2 + \pi^2)^2} (1 + Ro) \right) \quad (5.44)$$

У випадку не електропровідної ($\sigma = 0$) і однорідно обертового середовища ($Ro = 0$) з виразу (5.44) також отримаємо відомий результат [40, 91]:

$$Ra_{st} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} + \frac{\pi^2 Ta}{k^2}.$$

Аналогічно обчислимо мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} , використовуючи формулу (5.44) за $k = k_c$, яке задовольняє наступному співвідношенню

$$2 \left(\frac{k_c}{\pi} \right)^6 + 3 \left(\frac{k_c}{\pi} \right)^4 = 1 + \left(\frac{k_c^4}{\pi^6} \right) R_{TM} + \frac{Ta}{\pi^4} (1 + Ro) \left(1 - R_{TM} \frac{k_c^4}{(k^2 + \pi^2)^3} \right).$$

Рис. 5.4 показана залежність критичного (стаціонарного) числа Релея Ra_{st} (формула (5.44)) від хвильових чисел k за наявності $R_{TM} \neq 0$ і відсутності $R_{TM} = 0$ впливу ТМ-ефектів. Тут ми спостерігаємо, що зі зростанням коефіцієнта R_{TM} мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} для однорідно обертового середовища з числом Тейлора $Ta = 946$ зменшується, тобто знижується поріг розвитку нестійкості. Число Тейлора $Ta = 946$ було обчислено параметрів земного ядра: $\Omega_0 = 4 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ – кутова швидкість обертання; $\nu = 2.6 \text{ м}^2/\text{с}$ – коефіцієнт гідродинамічної в'язкості, який вважаємо рівним коефіцієнту магнітної в'язкості, тобто $Pm = 1$; $h = 10^3 \text{ м}$ – товщина конвективного шару. Наведені в [240] оцінки фізичних величин ядра Землі мають досить широкий інтервал, тому ми вибрали вказані вище значення щільності ρ_0 , електропровідності σ , температуропровідності χ , в'язкості (ν, η) , температури T_0 , питомий термо е.р.с. α зручні щодо чисельних розрахунків і розумної фізичної інтерпретації отриманих результатів.

Щоб з'ясувати роль неоднорідного обертання процес розвитку конвективної нестійкості зафіксуємо значення коефіцієнта $R_{TM} = 2$, а число Россбі Ro варіюватимемо. На графіку Рис. 5.5 показано, що зі зростанням позитивного профілю числа Россбі Ro мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} також зростає, т.е. е. підвищується поріг розвитку нестійкості. З іншого боку, для негативних профілів обертання, наприклад релеєвського ($Ro = -1$) (крива 3), ми спостерігаємо зменшення критичного числа Релея, тобто нижчий поріг розвитку нестійкості порівняно з випад-

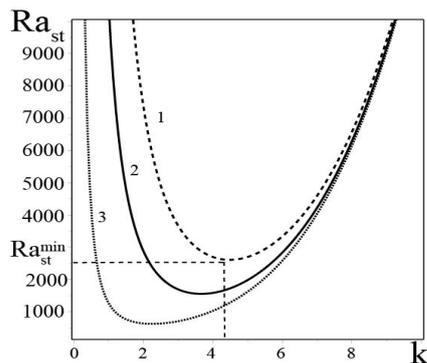


Рис. 5.5: Залежність стаціонарного числа Релея Ra_{st} від хвильових чисел k для середовища, що неоднорідно обертається з числом Тейлора $Ta = 946$ без зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}_0 = 0$ при постійному параметрі $R_{TM} = 2$. Крива 1 відповідає числам Россбі $Ro = 2$, крива 2 – $Ro = 0$, а крива 3 – $Ro = -1$.

ком однорідного ($Ro = 0$) (крива 2) і неоднорідного ($Ro = 2$) (крива 1) обертання.

3. Розглянемо випадок, коли немає обертання ($Ta = 0, Ro = 0$), але є зовнішнє магнітне поле ($\mathbf{B}_0 \neq 0$). Тоді з виразу (5.42) знаходимо критичне значення числа Релея:

$$Ra_{st} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2 Q}{(k^2 + \pi^2)^2} \right) - R_{TM}(k^2 + \pi^2). \quad (5.45)$$

Якщо $R_{TM} = 0$, то отримаємо відомий з монографій [40, 91] результат. Мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} визначається з формули (5.45) за $k = k_c$, яке задовольняє наступному співвідношенню

$$2 \left(\frac{k_c}{\pi} \right)^6 + 3 \left(\frac{k_c}{\pi} \right)^4 = 1 + \frac{Q}{\pi^2} + R_{TM} \left(\frac{k_c^4}{\pi^6} \right).$$

На графіку Рис. 5.6 показана залежність критичного (стаціонарного) числа Релея Ra_{st} (формула (5.45)) від хвильових чисел k . Величина зовнішнього полоидального (або меридіонального) магнітного поля, що виходить з ядра на поверхню Землі, становить близько $B_0 = 10^{-1} \text{Тл}$ [19], якому відповідає число Чандрасекара $Q = 1.68 \cdot 10^5$. Рис. 5.6 ми спостерігаємо зменшення мінімального критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} зі зростанням коефіцієнта

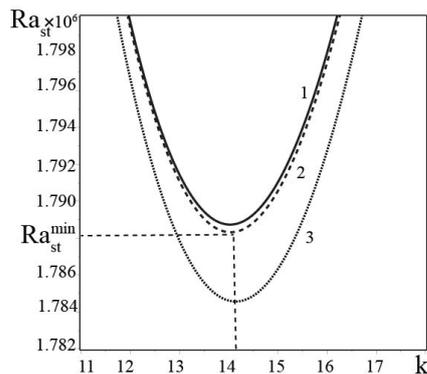


Рис. 5.6: Залежність стаціонарного числа Релея Ra_{st} від хвильових чисел k для середовища, що не обертається ($Ta = 0$) у зовнішньому магнітному полі $B_0 = 10^{-1}$ Тл за різних значень параметра R_{TM} . Крива 1 відповідає $R_{TM} = 0$, крива 2 – $R_{TM} = 2$, крива 3 – $R_{TM} = 20$.

R_{TM} , що відповідає зниженню порога розвитку нестійкості. Крива 1 побудована для випадку $R_{TM} = 0$, крива 2 – $R_{TM} = 2$, крива 3 – $R_{TM} = 20$. Таким чином, висновки про зниження порога конвективної нестійкості при обліку ТМ-ефектів залишаються чинними і за наявності зовнішнього магнітного поля.

Порівнюючи всі наведені вище граничні випадки між собою, можна помітити збільшення мінімального критичного числа Релея, що повністю узгоджується з висновками робіт Чандрасеккара щодо придушення конвекції ефектами обертання та зовнішнього магнітного поля. Приступимо тепер до дослідження загального випадку стаціонарної магнітоконвекції, що неоднорідно обертається, з урахуванням ТМ-ефектів. Як і раніше, параметри конвекції ($Q, Ta, Pm, q_\alpha, R_\alpha$) розрахуємо, використовуючи значення фізичних величин ($\rho_0, \nu, \eta, \chi, T_0, \alpha, B_0, \Omega_0$) для ядра Землі [240]: $Q = 1.68 \cdot 10^5$, $Ta = 946$, $Pm = 1$, $q_\alpha Pm Pr^{-1} \approx 5.24 \cdot 10^{-8}$, $R_\alpha \tilde{Q} \approx 2.5 \cdot 10^9$. На графіку Рис. 5.7 показано мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} (формула 5.42) для випадку, коли ТМ-ефекти відсутні – однорідна по хімічному складу середовище $\Delta\alpha = 0$. Як видно з Рис. 5.7 з урахуванням ТМ-ефектів відбувається зменшення мінімального критичного числа Релея Ra_{st}^{\min} , і як наслідок зниження порога виникнення конвективної нестій-

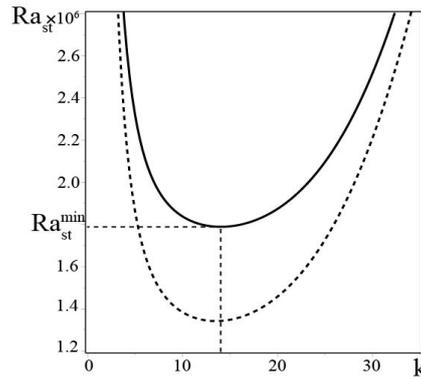


Рис. 5.7: Залежність стаціонарного числа Рейля Ra_{st} від хвильових чисел k для середовища, що обертається ($Ta = 946$, $Ro = -1$) у зовнішньому магнітному полі $B_0 = 10^{-1} \text{Тл}$ і магнітному числі Прандтля $Pm = 1$. Суцільна лінія відповідає випадку без урахування ТМ-ефектів $q_\alpha = 0$, $R_\alpha = 0$, а штрихова лінія для $q_\alpha \neq 0$, $R_\alpha \neq 0$.

кості. Графік залежності $Ra_{st}(k)$ (Рис. 5.7) побудований для релеєвського профілю обертання ($Ro = -1$). Аналогічний вигляд має залежність $Ra_{st}(k)$ для профілю однорідного обертання ($Ro = 0$) та позитивного профілю ($Ro = 2$). З наведених вище результатів випливає, що генерація магнітного поля за допомогою ТМ-ефектів сприяє розвитку конвективної нестійкості.

5.2.3 Слабонелинейная конвективна нестійкість з урахуванням термомагнітних ефектів

У цьому підрозділі ми проведемо аналіз слабонелінійної конвективної нестійкості з урахуванням ТМ явищ згідно з методикою, описаною в 3.2.3. Тоді, основна система рівнянь з урахуванням ТМ явищ набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi + \sqrt{Ta} \frac{\partial v}{\partial z} - Pr Pm^{-1} Q \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\
 & = Pr Pm^{-1} Q \cdot J(\phi, \nabla^2 \phi) - Pr^{-1} \cdot J(\psi, \nabla^2 \psi) \\
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) v - \sqrt{Ta}(1 + Ro) \frac{\partial \psi}{\partial z} - Pr Pm^{-1} Q \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \\
 & = Pr Pm^{-1} Q \cdot J(\phi, \tilde{v}) - Pr^{-1} \cdot J(\psi, v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2 \right) \phi - \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\text{Pr}^{-1} J(\psi, \phi) \quad (5.46) \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2 \right) \tilde{v} - \text{Pr}^{-1} \frac{\partial v}{\partial z} + \text{Ro} \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \text{Pm}^{-1} R_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\
& \quad = \text{Pr}^{-1} (J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v})) \\
& \left(\text{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \theta - \frac{\partial \psi}{\partial x} + q_\alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -J(\psi, \theta) - q_\alpha^{(1)} \theta \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + q_\alpha^{(2)} J(\theta, \tilde{v}),
\end{aligned}$$

де введено нові позначення для безрозмірних параметрів

$$q_\alpha^{(1)} = \frac{\Delta \alpha B_0}{\rho_0 c_p \mu \chi}, \quad q_\alpha^{(2)} = \frac{\alpha B_0}{\rho_0 c_p \mu \chi} \left(\frac{\mu \mathcal{L}}{\alpha} + 1 \right).$$

Система рівнянь (5.46) доповнюється такими граничними умовами:

$$\psi|_{z=0,h} = \nabla^2 \psi|_{z=0,h} = \frac{dv}{dz}|_{z=0,h} = \tilde{v}|_{z=0,h} = 0, \quad \frac{d\phi}{dz}|_{z=0,h} = \theta|_{z=0,h} = 0. \quad (5.47)$$

Використовуючи слабонелінійну теорію (див. підрозділ 3.2.3), отримаємо рівняння для кінцевої амплітуди магнітного поля, що генерується конвекцією Релея-Бенара і термомагнітною нестійкістю в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається, у зовнішньому однорідному магнітному полі. Виконуючи стандартну процедуру як у підрозділі 3.2.3, ми отримали нелінійне рівняння для амплітуди $A(\tau)$, яке відноситься до рівняння Гінзбурга-Ландау з постійними коефіцієнтами:

$$\mathcal{A}_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - \mathcal{A}_2 A + \mathcal{A}_3 A^3 = 0, \quad (5.48)$$

де $\mathcal{A}_{1,2,3}$ – постійні коефіцієнти виду:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 = & \frac{a^2}{\text{Pr}} + \frac{k_c^2 R_\alpha}{a^4} \cdot \frac{\left(1 + q_\alpha \Pi_\alpha \left(1 + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}} \right) - q_\alpha \frac{\pi^2 \text{Pm}^3}{a^4 \text{Pr}^2} \text{Ro} \sqrt{\text{Ta}} \right) (a^4 + \pi^2 \text{Q}) + q_\alpha \frac{\pi \text{Pm}}{a^2 \text{Pr}^2} \cdot \delta}{a^4 + \pi^2 \text{Q} - q_\alpha R_\alpha k_c^2} \\
& - \frac{\pi^2 \text{Q} \text{Pm}}{a^2 \text{Pr}} - \frac{\pi \sqrt{\text{Ta}}}{a^6 (a^4 + \pi^2 \text{Q} - k_c^2 q_\alpha R_\alpha) \text{Pr}} \times \\
& \times \left[\delta \cdot (a^4 - k_c^2 q_\alpha R_\alpha) - \pi k_c^2 a^2 \tilde{\text{Q}} \text{Pr} R_\alpha \left(1 + q_\alpha \Pi_\alpha \left(1 + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}} \right) - q_\alpha \frac{\pi^2 \text{Pm}^3}{a^4 \text{Pr}^2} \text{Ro} \sqrt{\text{Ta}} \right) \right],
\end{aligned}$$

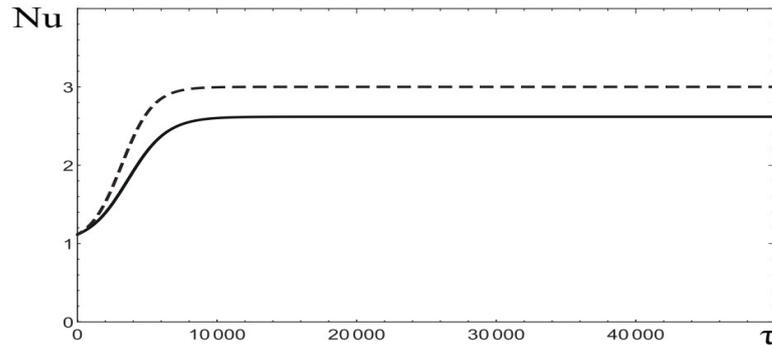


Рис. 5.8: Залежність числа Нуссельта Nu від часу τ . Штриховою лінією показаний випадок без урахування ТМ-ефектів, суцільний - з урахуванням ТМ-ефектів.

$$\delta = \frac{\pi a^2 \sqrt{\text{Ta}}}{a^4 + \pi^2 Q - k_c^2 q_\alpha R_\alpha} \cdot [(1 + \text{Ro})(a^4 - k_c^2 q_\alpha R_\alpha) + \pi^2 Q \text{Pm}(\text{PmRo} - 1)] -$$

$$- \frac{\pi a^2 k_c^2 R_\alpha \tilde{Q}(1 + \text{Pm})}{a^4 + \pi^2 Q - q_\alpha R_\alpha k_c^2} + \frac{\pi^3 \text{Pm}^2}{a^2} Q \text{Ro} \sqrt{\text{Ta}},$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{k_c^2 \text{Ra}_2}{a^2 \text{Pr}} (1 + q_\alpha \Pi_\alpha), \quad \mathcal{A}_3 = \frac{k_c^4 \text{Ra}_c}{8a^4 \text{Pr}} \cdot \frac{(1 + q_\alpha \Pi_\alpha)(1 - q_\alpha^{(2)} \Pi_\alpha)^2 (a^4 + \pi^2 Q)}{a^4 + \pi^2 Q - k_c^2 q_\alpha R_\alpha} +$$

$$+ R_\alpha \cdot \frac{\pi^2 k_c^4 Q \text{Pm}^{-1} \sqrt{\text{Ta}} (1 + q_\alpha \Pi_\alpha)(1 - q_\alpha^{(2)} \Pi_\alpha)^2}{8a^4 (a^4 + \pi^2 Q - k_c^2 q_\alpha R_\alpha)}.$$

У граничному випадку, коли ТМ-ефекти відсутні ($q_\alpha = 0, R_\alpha = 0$) рівняння (5.48) відповідає результату роботи [141]. Для (5.48) неважко отримати аналітичне рішення за відомої початкової умови $A_0 = A(0)$:

$$A(\tau) = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_2} A_0^2 + \left(1 - A_0 \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_2}\right) \exp\left(-\frac{2\tau \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\right)}}. \quad (5.49)$$

За допомогою рішення (5.49) ми можемо визначити зміну величини теплоперенесення (числа Нуссельта Nu) і амплітуди генерованого магнітного поля $\tilde{v}(\tau)$ від часу τ . При виконанні обчислень приймемо початкову амплітуду, що дорівнює $A_0 = 0.7$, а $\text{Ra}_2 \approx \text{Ra}_c$, що відповідає трохи параметра надкритичності ϵ . Постійні параметри конвекції $Q_1 = Q/\pi^2 = 17000$, $T_1 = \text{Ta}/\pi^4 = 10$, $R_1 = \text{Ra}/\pi^4 = 20000$, $\text{Pm} = 1$, $\text{Pr} = 380000$ відповідають раніше прийня-

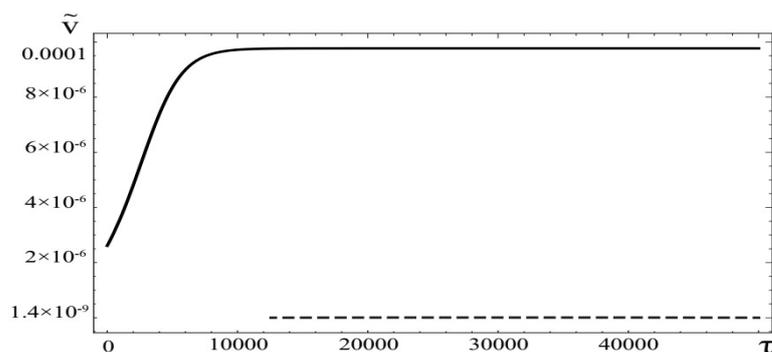


Рис. 5.9: Залежність амплітуди $\tilde{v}(\tau)$ генерованого магнітного поля від часу τ . З урахуванням ТМ-ефектів (суцільна лінія) величина амплітуди $\tilde{v}(\tau)$ приблизно в 10^4 разів більше, ніж для випадку без ТМ-ефектів (штрихова лінія).

тим параметрам земного ядра та зовнішньому магнітному полю $B_0 = 10^{-1}$ Тл. Профіль неоднорідного обертання (число Россбі) вважаємо релеєвським, тобто $Ro = -1$. Графік залежності числа Нуссельта $Nu(\tau)$ для зазначених вище параметрів показано на Рис. 5.8. Тут штриховий лінії відповідає випадок без урахування ТМ-ефектів, а суцільний – з урахуванням ТМ-ефектів. З графіків видно встановлення кінцевого значення $Nu(\tau)$, через зв'язок числа $Nu(\tau)$ і амплітуди $A(\tau)$. Перевищення числа Nu над одиницею обумовлено виникненням конвекції. При врахуванні ТМ-ефектів теплопередача рахунок конвекції зменшується, оскільки конвективна нестійкість виходить стаціонарний рівень за меншого значення кінцевої амплітуди. При цьому частина теплової енергії трансформується в енергію магнітного поля, що генерується. На графіку Рис. 5.9 показано встановлення кінцевої амплітуди для генерованих збурень тороїдального (y -компонента) магнітного поля. Звідси видно, що з обліку ТМ-ефектів амплітуда збуджуваного магнітного поля зростає приблизно 10^4 раз!

Таким чином, конвективні процеси з урахуванням ТМ-явлень можуть надавати досить сильний вплив у генерації магнітних полів в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається.

5.3 Хаотична динаміка нелінійних рівнянь ТМ-динамо

У цьому розділі ми досліджуємо хаотичну поведінку магнітних полів, що генеруються ТМ-нестійкістю в шарі електропровідної рідини (плазми), що однорідно обертається, у присутності зовнішнього постійного магнітного поля $\mathbf{B}_0 \parallel OZ$, колінеарних градієнтів температури $\nabla T_0 = -\mathbf{e}_z(dT_0/dz)$ та коефіцієнта термо е.р.с. $\nabla\alpha = \mathbf{e}_z(d\alpha/dz)$ [244]. Хаотична поведінка конвекції вивчалася в шарах рідини, що обертається, та в провідних середовищах, які обертаються в присутності магнітного поля [156]– [161]. Однак у цих роботах не розглядалася динаміка самого магнітного поля, що відповідає безіндуктивному наближенню. Такі задачі є більш важливими для технологічних застосувань – зокрема, вирощування кристалів, хімічних процесів затвердіння, відцентрового лиття металів тощо – ніж для астрофізичних і геофізичних досліджень.

5.3.1 Рівняння нелінійної динаміки для конвективного ТМ-динамо

Застосовуючи аналогічний підхід як у розділі 3.3 до вивчення слабонелінійної стадії конвективної нестійкості з урахуванням ТМ явищ, представимо всі обурення в рівняннях (5.46) у вигляді розкладів рядів Фур'є мінімального порядку:

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= A_1(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \quad v(x, z, t) = V_1(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \phi(x, z, t) &= B_1(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \quad \tilde{v}(x, z, t) = W_1(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \\ \theta(x, y, t) &= C_1(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + C_2(t) \sin(2\pi z). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Підставивши розкладання (5.50) у рівняння (5.46), після ортогоналізації отри-

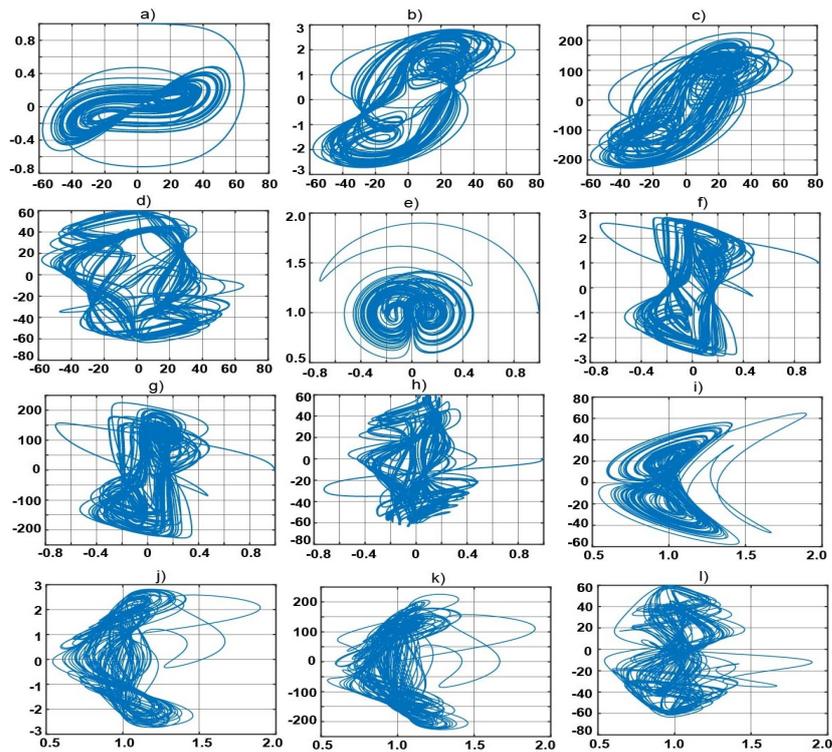


Рис. 5.10: Фазові траєкторії системи (5.51) для параметра Релея $R = 290$ у різних площинах.

маємо нелінійну динамічну систему рівнянь [244]:

$$\begin{cases} \dot{X} = -X + RY - TV - HU \\ \dot{V} = -V + HW + \sqrt{Ta}(1 + Ro)X \\ \dot{U} = -Pm^{-1}U + Pr^{-1}X \\ \dot{W} = -Pm^{-1}W - Pr^{-1}V + Ro\sqrt{Ta}U - GY \\ \dot{Y} = Pr^{-1}(-Y + X - XZ - q_1W - q_2WZ) \\ \dot{Z} = Pr^{-1}(-bZ + XY + q_2WY) \end{cases} \quad (5.51)$$

Тут запроваджено нові безрозмірні параметри:

$$G = \frac{k^2 R_\alpha}{\pi^2 Pm}, \quad q_1 = \frac{\pi^2 q_\alpha}{a^4}, \quad q_2 = \frac{\pi^2 q_\alpha^{(2)}}{a^4}.$$

У граничному випадку, коли ефектів ТМ ($q_1 = q_2 = G = 0$) відсутні, рівняння (5.51) переходять до рівнянь Лоренца для шестивимірного ($6D$) фазового про-

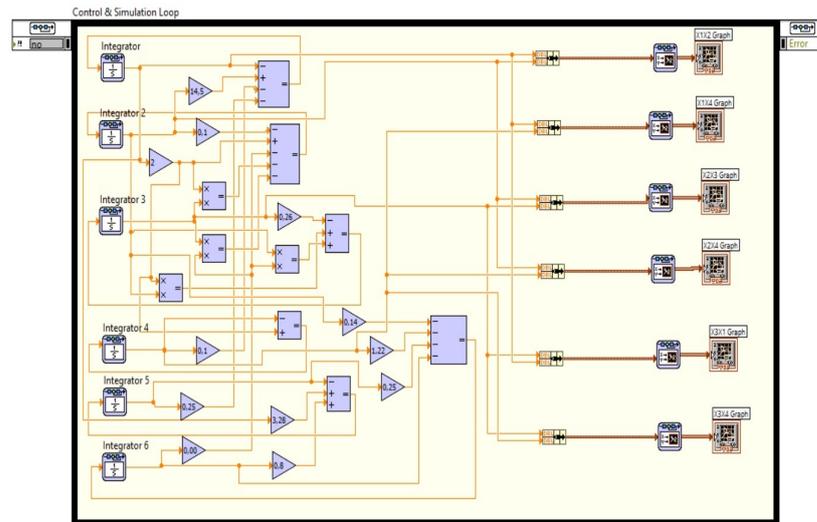


Рис. 5.11: Блок-схема, що реалізує хаотичну систему (5.51) в LabVIEW.

сторю (3.35). Отримана нами система нелінійних рівнянь (5.51) залежить від великої кількості безрозмірних параметрів (11 параметрів). З цієї причини ця система рівнянь може описувати величезну різноманітність режимів поведінки, а також можуть бути реалізовані всі можливі переходи до хаосу, залежно від діапазону зміни різних безрозмірних параметрів. На відміну від рівнянь (3.35), останні три рівняння системи (5.51) описують генерацію та регенерацію W -компоненти (або тороїдальної компоненти) магнітного поля. Аналогічний процес самозбудження магнітного поля виникає у відомій електромеханічній моделі Рікітаке [245], яка використовується для пояснення хаотичної інверсії магнітного поля Землі [246]. Отже, систему рівнянь (5.51) можна віднести до динамічної моделі нелінійного конвективного динамо ТМ. Зауважимо, що на відміну від рівнянь Лоренца та класичної динамо-системи Рікітаке ми отримали нелінійні динамічні рівняння 6D-розмірності (5.51) з чотирма квадратичними нелінійностями.

5.3.2 Комп'ютерне моделювання рівнянь хаотичної динаміки (5.51)

У роботі [244] було проведено динамічний аналіз стійкості нової 6-вимірної хаотичної системи (5.51) залежно від зміни параметра Релея R . Для цієї систе-

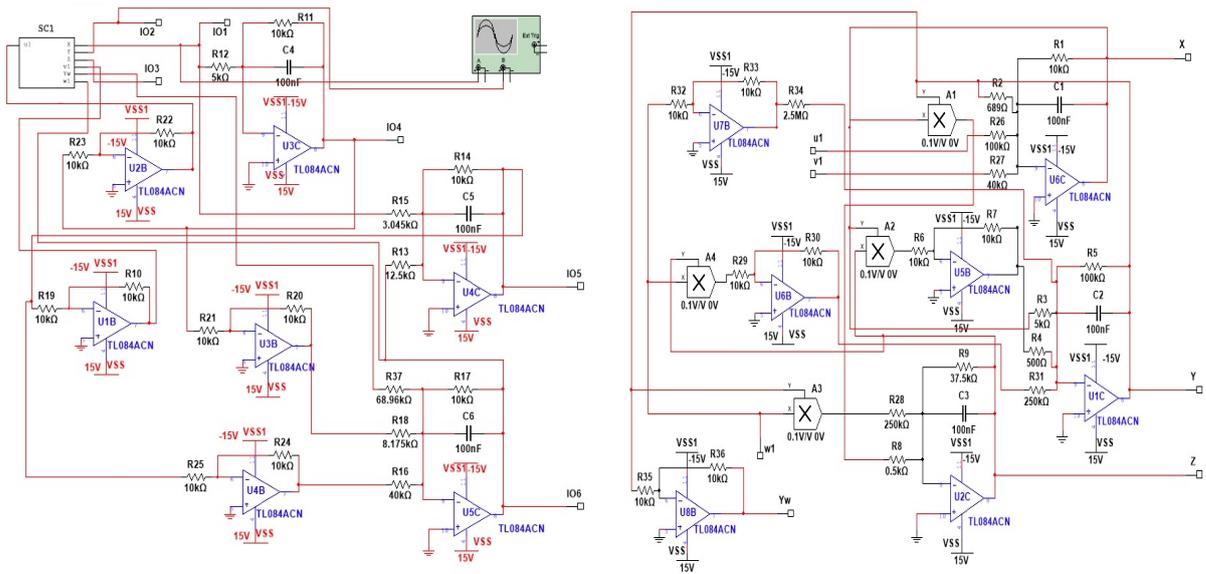


Рис. 5.12: Електронна схема генератора хаотичних коливань на основі системи рівнянь (5.51).

ми побудовано фазові портрети, які демонструють режими регулярної та хаотичної поведінки збурень магнітного поля за різних значень параметра R . Крім того, досліджено фундаментальні характеристики системи, зокрема показники Ляпунова та розмірність Каплана-Йорка:

$$L_1 = 0.359648, L_2 = 0.11627, L_3 = -0.678572, L_4 = -0.835604, L_5 = -1.45011,$$

$$L_6 = -1.87832, D_{KY} \approx 2.7013.$$

Наявність у спектрі показників Ляпунова хоча б одного позитивного значення вказує на наявність у системі хаотичних коливань. У цьому розділі наведено результати комп'ютерного моделювання системи (5.51) у середовищах Matlab-Simulink (див. Рис. 5.10) і LabVIEW (див. Рис. 5.11) [247]. Аналіз фазових портретів, отриманих у результаті чисельного моделювання в середовищах Matlab-Simulink і LabVIEW, засвідчив, що коливання в досліджуваній системі мають складний хаотичний характер. Для нової 6-вимірної хаотичної системи було розроблено електронну схему генератора хаосу (див. Рис. 5.12), працездатність якої підтверджено за допомогою моделювання в середовищі Multisim. З метою

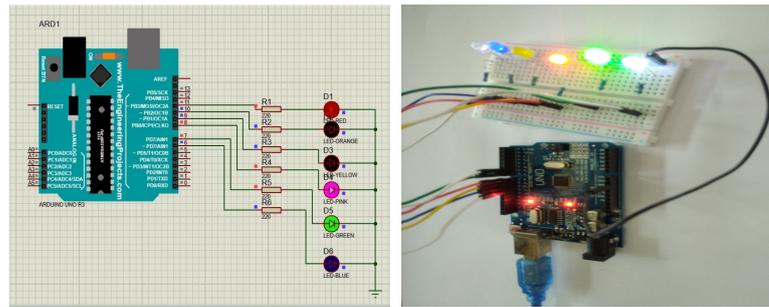


Рис. 5.13: *Ліворуч*: принципова схема заснована на мікроконтролері для 6D хаотичного генератора, зображеного в Proteus 8. *Праворуч*: фото реалізації експерименту на платі Arduino UNO.

візуалізації та практичної реалізації динаміки цієї системи було використано мікроконтролер Arduino UNO у поєднанні з шістьма світлодіодами (див. Рис. 5.13). Крім того, продемонстровано можливість моделювання 6-вимірної хаотичної системи в середовищі Proteus 8 із використанням плати Arduino UNO.

Синхронізація хаосу полягає в узгодженні динаміки пари ідентичних систем — провідної (майстер-системи) та веденої (слідувальної системи). З метою розв'язання цієї задачі розробляються закони керування, які забезпечують асимптотичне відстеження виходу провідної системи виходом веденої у часі. У роботі [248] метод активного керування було використано для досягнення глобальної синхронізації двох ідентичних 6D хаотичних систем (5.51) із невідомими параметрами. Застосовуючи метод активного керування синхронізацією, нами описано практичне використання 6D хаотичної системи для реалізації захищеного зв'язку шляхом хаотичного маскування інформаційного сигналу. На Рис. 5.14 наведено результати моделювання безпечного зв'язку у середовищі Maple на основі системи (5.51).

5.4 Спонтанна генерація магнітних полів у тонких шарах стратифікованої плазми

Добре відомо, що існують такі фізичні процеси в яких беруть участь тільки електрони на тлі нерухомих іонів. Такі явища спостерігаються як у лаборатор-

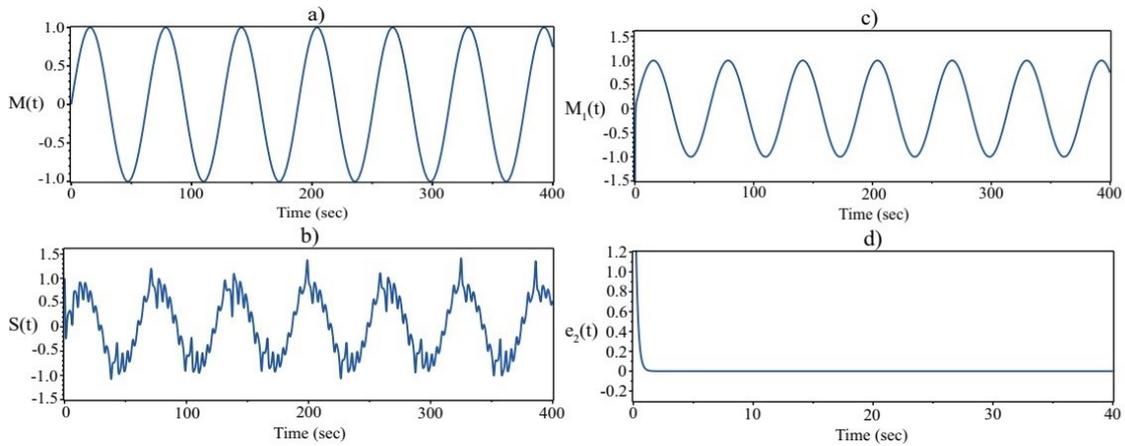


Рис. 5.14: а) Інформаційний сигнал $M(t)$; б) переданий хаотичний сигнал $S(t)$; в) відновлений сигнал $M_1(t)$; г) помилка в інформаційному сигналі $M(t) - M_1(t)$.

ній, так і в космічній плазмі: при взаємодії лазерного випромінювання з речовиною [106, 107], в іоносферній плазмі [249], в плазмі сонячної атмосфери [250], у Z-пінчі [251]. Багато з вищезазначених явищ описуються рівняннями електронної магнітної гідродинаміки (ЕМГД), які застосовуються для наступних просторових і тимчасових масштабів руху плазми: $L < \frac{c}{\omega_{pi}}, \omega_{Bi}, \omega_{pi} < \omega < \omega_{Be}, \omega_{pe}$, де $\omega_{pe,i}, \omega_{Be,i}$ - ленгмюрівські та ларморівські частоти для електронів та іонів відповідно. За таких умов іони можна розглядати як нерухоме тло, яке нейтралізує заряд електронів. У наближенні ЕМГД явище спонтанної генерації сильних магнітних полів (порядку кілька МГс) в лазерній [106, 107] та астрофізичній плазмі [236] пояснюється як результат розвитку термомагнітної (або магнітотеплової) нестійкості. В результаті генерації магнітних полів у неоднорідній плазмі з паралельними градієнтами температури та щільності формуються нелінійні вихрові структури, які у літературі [252] називаються магніто-дрейфовими. За своєю природою вони аналогічні вихорам Ларічева-Чарні-Обухова з геофізичної гідродинаміки. Такі вихрові структури здатні вплинути на процеси тепло-масопереносу в плазмі, що є дуже важливим для лабораторних досліджень.

У цьому розділі досліджується механізм спонтанної генерації магнітного поля, викликаного тепловою конвекцією (основний градієнт температури $\nabla T_0 \neq 0$) в електронній рідині в плоскому шарі плазми, що знаходиться в

гравітаційному полі $\mathbf{g} = \text{const}$ [253]. Фізичний механізм збудження магнітного поля полягає у наступному. Зміни температури T_1 , які відбуваються у напрямку, відмінному від початкової стратифікації плазми \mathbf{g} , призводять до виникнення «сторонньої» електродвіжущої сили:

$$\mathbf{E}^{(i)} = -\frac{m T_1}{e T_0} \mathbf{g}.$$

Ця електродвіжуча сила відповідає за збудження магнітного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \approx \text{rot} \mathbf{E}^{(i)} = \frac{mc}{e} \left[\frac{\nabla T_1}{T_0} \times \mathbf{g} \right], \Rightarrow B_{1y} \cong \frac{mc T_1 g}{e T_0 \lambda} t_B,$$

де λ - характерний масштаб змін температури, t_B - характерний час створення магнітного поля. Такий механізм самозбудження магнітного поля можливий у конвективних зонах масивних зірок, а також нейтронних зірок на ранніх стадіях еволюції. У такому випадку в тонкому приповерхневому шарі гарячої зовнішньої кори нейтронної зірки електронний газ перебуває у невідродженому стані [254], тому для його опису можна використовувати класичну гідродинаміку. При врахуванні характерного масштабу змін температури λ , порядку товщини шару зовнішньої кори нейтронної зірки ($\lambda \approx h = 10$ м), гравітаційного прискорення ($g \approx 10^{12} - 10^{13}$ м/с²), оцінка величини магнітного поля на поверхні нейтронної зірки складатиме $10^{12} - 10^{13}$ Гс [255] за характерний час генерації магнітного поля $t_B \approx 56$ років. У цьому розділі буде проведено дослідження лінійного та слабо нелінійного режимів спонтанної генерації магнітного поля в умовах конвекції Релея-Бенара у тонкому шарі електронної рідини (плазми) [253]. Задача Релея-Бенара, як теорії конвективної нестійкості, є зручною моделлю для вирішення деяких проблем фізики плазми. Зокрема, в роботі [256] концепція задачі Релея-Бенара використовувалася при дослідженні динаміки плазми у зоні зносу в токамаках (the scrape-off layer of tokamaks).

5.4.1 Основні рівняння та постановка задачі

Розглянемо плоский шар плазми у наближенні електронної магнітної гідродинаміки (ЕМГД) з кінцевою товщиною h та вільними нижньою межею $z = 0$ та верхньою межею $z = h$. Для опису руху електронної рідини виберемо декартову систему координат, де вісь z направлена вертикально вгору. На нижній межі площини ($z = 0$) підтримується температура T_d , а на верхній межі ($z = h$) - T_u , де $T_d > T_u$, що вказує на підігрів знизу. Рівноважна температура T_0 має лінійний профіль вздовж z : $T_0(z) = T_d - \frac{(T_d - T_u)}{h} \cdot z$. Таким чином, постійний градієнт $\nabla T_0 = \text{const} = -\mathbf{e}(dT_0/dz)$ спрямований вертикально вниз, паралельно напрямку сили тяжіння $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}$, де \mathbf{e} - одиничний вектор, спрямований вертикально вгору вздовж осі z . У рівноважному (або незбуреному) стані плазма задовольняє умову гідростатичної рівноваги: $\frac{1}{m} \frac{\partial T_0}{\partial z} = g$, і зовнішнє електричне поле відсутнє: $\mathbf{E}_0 = 0$. Вважається, що всередині шару рівноважна щільність плазми стала $N_0 = \text{const}$, а збурення щільності плазми N_1 виражаються через збурення температури T_1 (за наближенням Буссінеска [91]): $N_1/N_0 \approx -T_1/T_0$. Температурні флуктуації T_1 , спрямовані відмінно від вихідної стратифікації плазми \mathbf{g} , призводять до збудження магнітного поля B_{1y} .

Для простоти розглянемо тривимірні осесиметричні течії плазми $\mathbf{V} = (u(x, z), v(x, z), w(x, z))$, вважаючи, що всі обурені величини залежать тільки від двох змінних (x, z) . Для опису конвективних течій електронної рідини, що не стискається, в наближенні Буссінеска скористаємося рівняннями Брагінського [111] (див. (2.81)-(2.83)). Оскільки в початковий момент часу магнітне поле не було, скористаємося виразами для сили тертя \mathbf{R}_v і термосили \mathbf{R}_T з роботи [111] за умови $\omega_{Be}\tau \ll 1$:

$$\frac{\mathbf{R}_v}{mN_0} = -0.51\nu\mathbf{V}_{\parallel} - 0.51\nu\mathbf{V}_{\perp} - 0.2\frac{e}{mc}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (5.52)$$

$$\frac{\mathbf{R}_T}{mN_0} = -0.71\frac{\nabla_{\parallel}T}{m} - 0.71\frac{\nabla_{\perp}T}{m} - 0.81\frac{\tau e}{m^2c}[\mathbf{B} \times \nabla T]. \quad (5.53)$$

Знаки \parallel і \perp під символами позначають їх використання вздовж та поперек магнітного поля. Тепловий електронний потік аналогічно складається із двох частин $\mathbf{q} = \mathbf{q}_v + \mathbf{q}_T$ (для $\omega_{Be}\tau \ll 1$) [212]

$$\mathbf{q}_v = 0.71N_0T\mathbf{V}_{\parallel} + 0.71N_0T\mathbf{V}_{\perp} + 0.81N_0T\frac{\tau e}{mc}[\mathbf{B} \times \mathbf{V}], \quad (5.54)$$

$$\mathbf{q}_T = -3.16\frac{N_0T\tau}{m}\nabla_{\parallel}T - 3.16\frac{N_0T\tau}{m}\nabla_{\perp}T - 5.75\frac{N_0T\tau^2e}{m^2c}[\mathbf{B} \times \nabla T]. \quad (5.55)$$

У виразах (5.52)-(5.55) ν – частота зіткнень електронів. Вклад сили гравітації, використовуючи наближення Бусінеска, запишемо у вигляді

$$\frac{\mathbf{F}_g}{mN} = \frac{N_1}{N}\mathbf{g} = -\frac{T_1}{T_0}\mathbf{g}. \quad (5.56)$$

Рівняння Брагінського доповнимо рівняннями Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot}\mathbf{B} = -\frac{4\pi eN}{c}\mathbf{V}, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0. \quad (5.57)$$

У другому рівнянні (5.57) ми знехтували струмом зміщення, оскільки розглядаються «повільні» рухи електронів: $\partial/\partial t \sim \tau^{-1} \ll kc$, k – хвильове число збурень, c – швидкість світла. Вводячи скалярну функцію струму ϕ , для якої

$$B_x = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

рівняння Брагінського перетворюються на такий вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - r_d^2\Delta_{\perp}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta_{\perp}\phi - 0.81\frac{\tau\delta T}{mh}\Delta_{\perp}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \eta\Delta_{\perp}(\Delta_{\perp}\phi) + R_{NL}^{(1)}, \quad (5.58)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - r_d^2\Delta_{\perp}\frac{\partial}{\partial t}\right)B_y - 0.81\frac{\tau\delta T}{mh}\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{mc}{eT_0}\frac{\partial T_1}{\partial x}g = \eta\Delta_{\perp}B_y + R_{NL}^{(2)}, \quad (5.59)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2.1\chi\Delta_{\perp}\right)T_1 + \frac{c(\delta T)}{4\pi eN_0h}(1.47 - 3.83R_{TM})\frac{\partial B_y}{\partial x} = R_{NL}^{(3)}, \quad (5.60)$$

де $r_d = c/\omega_{pe}$ – дебаєвський радіус, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2N_0/m}$ – ленгмюрівська частота електронів, $\eta = 0.51\nu c^2/\omega_{pe}^2$ – коефіцієнт магнітної в'язкості, $\chi = T_0\tau/m$ – коефіцієнт температуропровідності, $R_{NL}^{(1)}$, $R_{NL}^{(2)}$, $R_{NL}^{(3)}$ – нелінійні члени відповідно

рівні:

$$\begin{aligned}
R_{NL}^{(1)} &= -\frac{r_d^2 c}{4\pi e N_0} \Delta_{\perp} \{B_y, \Delta_{\perp} \phi\} - \frac{1.2c}{4\pi e N_0} \Delta_{\perp} \{\phi, B_y\} + 0.81 \frac{\tau}{m} \Delta_{\perp} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right), \\
R_{NL}^{(2)} &= -\frac{r_d^2 c}{4\pi e N_0} \{B_y, \Delta_{\perp} B_y\} - \frac{1.2c}{4\pi e N_0} \{\Delta_{\perp} \phi, \phi\} + \\
&\quad + 0.81 \frac{\tau}{m} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial z} + B_y \Delta_{\perp} T_1 \right), \\
R_{NL}^{(3)} &= -(1.47 + 3.83 R_{TM}) \frac{c}{4\pi e N_0} \{T_1, B_y\} + \\
&\quad + 0.54 \frac{\chi}{4\pi N_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Delta_{\perp} \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Delta_{\perp} \phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \right)^2 + B_y \Delta_{\perp} B_y + (\Delta_{\perp} \phi)^2 \right).
\end{aligned}$$

Тут

$$\{a, b\} \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x}$$

– дужка Пуассона, $R_{TM} = \frac{v_{Te}^2 \omega_{pe}^2}{\nu^2 c^2}$ – безрозмірний параметр, що характеризує відношення «косих» (або «замагнічених») потоків тепла до конвективних:

$$R_{TM} = \frac{\left| \frac{\text{div} \mathbf{q}_T^{(\wedge)}}{N_0} \right|}{|\mathbf{V} \nabla T_0|} \approx \frac{\frac{e T_0 \nabla T_0}{m^2 c \nu^2} \frac{B}{\lambda}}{\frac{c \nabla T_0}{4\pi e N_0} \frac{B}{\lambda}} = \frac{v_{Te}^2 \omega_{pe}^2}{\nu^2 c^2}, \quad (5.61)$$

де λ характерний масштаб обурень. У рівняннях (5.59) міститься джерело збурення y -компоненти магнітного поля B_y , обумовлене діями гравітаційного поля \mathbf{g} і збуреного теплового потоку в напрямку відмінному від напрямку гравітаційного прискорення. У роботах [106, 107] роль такого джерела грає ефект Бірмана-Шлютера: $[\nabla N_0 \times \nabla T_1] \neq 0$, викликаний неоднорідністю щільності плазми.

5.4.2 Лінійна стадія конвективної нестійкості з урахуванням спонтанної генерації магнітного поля

Розглянемо еволюцію малих збурень магнітного поля та температури. В цьому випадку нелінійними членами в рівняннях (5.58)-(5.60) можна знехтува-

ти:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - r_d^2 \Delta_{\perp} \frac{\partial}{\partial t}\right) \phi - 0.81 \frac{\tau \delta T}{mh} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \eta \Delta_{\perp} \phi, \quad (5.62)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - r_d^2 \Delta_{\perp} \frac{\partial}{\partial t}\right) B_y - 0.81 \frac{\tau \delta T}{mh} \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{mc}{eT_0} \frac{\partial T_1}{\partial x} g = \eta \Delta_{\perp} B_y, \quad (5.63)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2.1\chi \Delta_{\perp}\right) T_1 + \frac{c(\delta T)}{4\pi e N_0 h} (1.47 - 3.83 R_{TM}) \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0. \quad (5.64)$$

Як видно з рівнянь (5.62)-(5.63), в лінійній теорії рівняння для магнітного потенціала (5.62) стає незалежним. Для зручності аналізу стійкості малих збурень у рівняннях (5.62)-(5.64) перейдемо до безрозмірних змінних (відзначені індексом зірочка *):

$$(x, z) = r_d(x^*, z^*), \quad \Delta_{\perp} = r_d^{-2} \Delta_{\perp}^*, \quad (\partial_x, \partial_z) = r_d^{-1} (\partial_{x^*}, \partial_{z^*}), \quad t = \frac{h^2}{\chi} t^*,$$

$$B_y = \frac{mc}{e} \frac{\chi}{r_d h} B^*, \quad \phi = \frac{mc \chi}{e h} \phi^*, \quad T_1 = \frac{\eta \chi T_0}{gh^3} \theta^*, \quad \partial_t = \frac{\chi}{h^2} \partial_{t^*}. \quad (5.65)$$

В результаті застосування (5.65) до рівнянь (5.62)-(5.64) отримаємо наступну систему рівнянь у безрозмірних змінних (індекс зірочка * в них опущений):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{\perp} \frac{\partial}{\partial t}\right) \phi - k_T \frac{\partial \phi}{\partial z} = \xi^2 Pm \Delta_{\perp} \phi, \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (B - \Delta_{\perp} B) - k_T \frac{\partial B}{\partial z} = Pm \frac{\partial \theta}{\partial x} + \xi^2 Pm \Delta_{\perp} B, \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Ra(1.47 - 3.83 R_{TM}) \frac{\partial B}{\partial x} = 2.1 \xi^2 \Delta_{\perp} \theta, \quad (5.68)$$

де введені позначення для безрозмірних параметрів : $k_T = 0.81 \xi (\delta T / T_0)$ – коефіцієнт термосили; $Ra = \frac{g(\delta T)h^3}{T_0 \chi \eta}$ – число Релея $Pm = \frac{\eta}{\chi}$ – магніто-теплове число Прандтля ; $\xi = h/r_d$ – відношення характерних просторових масштабів для даної завдання. Рішення рівняння (5.66) має такий вигляд

$$\phi(x, z, t) = \phi_0 \exp(\gamma t) e^{-\kappa z} \sin(kx), \quad \phi|_{x=0} = \phi|_{x=\lambda=2\pi/k} = 0, \quad (5.69)$$

де γ – інкремент наростання збурень, κ – коефіцієнт, що характеризує глибину проникнення по z магнітного поля:

$$\kappa = \frac{k_T}{2\xi^2 Pm} \pm \sqrt{\frac{k_T^2}{4\xi^4 Pm^2} + k^2}.$$

Зауважимо, що система рівнянь (5.67)-(5.68) описує спонтанну генерацію магнітних полів навіть без конвективних течій ($\mathbf{V} = 0$). У цьому випадку генерація магнітних полів обумовлена розвитком термомагнітної (ТМ) нестійкості. Для розвитку ТМ-нестійкості необхідний зворотний зв'язок між обуреннями B і θ , який виникає завдяки ефекту теплового потоку електронів (див. рівняння (5.68)). Визначимо інкремент наростання ТМ-обурень, представляючи обурення у вигляді плоских хвиль

$$(B, \theta) \sim \exp(\gamma t + ikx),$$

та при виконанні умов

$$k^2 r_d^2 \ll 1, \quad \chi k^2 \gg 1, \quad R_{TM} \gg 1$$

знаходимо вираз для γ :

$$\gamma = -1.82 Ra Pm R_{TM} / \xi^2. \quad (5.70)$$

Звідси видно, що обурення згасають при паралельних векторах $\nabla T_0 \uparrow\uparrow g$. У разі антипаралельних векторів $\nabla T_0 \uparrow\downarrow g$ знак у виразі (5.70) змінюється на протилежний, що призводить до розвитку ТМ-нестійкості з інкрементом нестійкості $\gamma = 1.82g(\delta T)h/v_{Te}^2 T_0$.

Повернемося до загальної нагоди $\mathbf{V} \neq 0$, і задаючи вільні граничні умови:

$$B = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{і } z = \xi \quad (5.71)$$

представимо рішення системи рівнянь (5.67)-(5.68) у вигляді нормальних мод:

$$B(x, z, t) = H(z)e^{\gamma t} \sin kx, \quad \theta(x, z, t) = \Theta(z)e^{\gamma t} \cos kx. \quad (5.72)$$

Тут величина kx записана в безрозмірних змінних (індекс * опущений), які пов'язані з розмірними наступними співвідношеннями: $k = r_d^{-1}k^*$, $x = r_dx^*$. Підставляючи (5.72) у систему рівнянь (5.67)-(5.68), крім $H(z)$, знаходимо одне рівняння для обурень температури $\Theta(z)$:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\gamma - \gamma(\widehat{D}^2 - k^2) - k_T \widehat{D} - \xi^2 Pm(\widehat{D}^2 - k^2) \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\gamma - 2.1\xi^2(\widehat{D}^2 - k^2) \right) - \Gamma k^2 Ra Pm \right] \Theta(z) = 0, \end{aligned} \quad (5.73)$$

де введені позначення $\Gamma = 1.47 - 3.83R_{TM}$, $\widehat{D} \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ оператор диференціювання z . Рівняння (5.73) призводить до завдання визначення власних значень інкременту γ_n , відповідних власним функціям

$$\Theta_n(z) = \sum_n \Theta_0 \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right) \Rightarrow \sum_n \Theta_0 \sin\left(\frac{\pi n z}{\xi}\right), \quad (5.74)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$ і z безрозмірна змінна. Тоді підставляючи (5.74) в (5.73) і проводячи інтегрування по всьому шару $(0, \xi)$, неважко знайти дисперсійне рівняння для одномодового випадку $n = 1$:

$$\left(\frac{l^2 + \xi^2}{\xi^2}\right) \gamma^2 + \left((2.1 + Pm)l^2 + 2.1\frac{l^4}{\xi^2}\right) \gamma + 2.1Pml^4 - k^2 \Gamma Ra Pm = 0, \quad (5.75)$$

де $l = \sqrt{\pi^2 + k^2 \xi^2}$ - загальне хвильове число. Коріння квадратного рівняння (5.75) дає значення інкременту γ (декременту) залежно від параметрів Ra, Pm, ξ та хвильового числа

$$\gamma_{1,2} = -\frac{(2.1 + Pm)l^2 \xi^2 + 2.1l^4}{\xi^2 + l^2} \pm \sqrt{\frac{k^2 \xi^2 \Gamma Ra Pm}{\xi^2 + l^2} + \frac{((2.1 - Pm)l^2 \xi^2 + 2.1l^4)^2}{4(\xi^2 + l^2)^2}}. \quad (5.76)$$

З формули (5.76) випливає, що при $Ra > 0$ (підігрів знизу), $\Gamma > 0$ або $Ra < 0$

(підігрів зверху), $\Gamma < 0$ вираз під коренем завжди позитивно, і значення γ дійсні ($\text{Im}\gamma = 0$). Один з двох коренів у (5.76) негативний $\gamma_1 < 0$, що відповідає загасанню обурень, а інший позитивний $\gamma_2 > 0$, що призводить до розвитку нестійкості при досить великих Ra . При $Ra > 0$, $\Gamma < 0$ або $Ra < 0$, $\Gamma > 0$ підкорене вираз стає негативним і монотонність збурень справедлива лише за малих Ra . Зі збільшенням Ra підкорене вираз стає негативним, і формула (5.76) дає два комплексно-сполучені декременти, що відповідає коливальним обуренням. Для чисел Релея

$$|Ra| > |Ra^{(*)}|, \quad Ra^{(*)} = -\frac{((2.1 - Pm)l^2\xi^2 + 2.1l^4)^2}{4(\xi^2 + l^2)^2\xi^2k^2\Gamma Pm} \quad (5.77)$$

збурення осцилюють із частотою

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\xi^2k^2\Gamma Pm}{\xi^2 + l^2}} (Ra^{(*)} - Ra). \quad (5.78)$$

З (5.76) видно, що за $Ra = 0$ збурення згасають з декрементами

$$\gamma_1 = -\frac{(6.3 + Pm)\xi^2l^2 + 6.3l^4}{2(\xi^2 + l^2)}, \quad \gamma_2 = -\frac{(2.1 + 3Pm)\xi^2l^2 + 2.1l^4}{2(\xi^2 + l^2)}. \quad (5.79)$$

Критичне число Релея для стаціонарної конвекції $\gamma = 0$ легко перебуває з рівняння (5.75) тобто

$$Ra_{cr} = \frac{2.1(\pi^2 + k^2\xi^2)^2}{k^2\Gamma} = \frac{(\pi^2 + k^2\xi^2)^2}{k^2} \cdot \frac{1}{0.7 - 1.82R_{TM}}. \quad (5.80)$$

Якщо виконується умова $0.7 \gg 1.82R_{TM}$, тобто коли конвективне перенесення переважає над ефектом «замагнічування» теплового потоку (ефекту Ледюка-Рігі) (див. формулу (5.61)), то мінімальне значення критичного числа Ra_{cr} досягає свого значення $Ra_{cr}^{min} = 5.71\pi^2\xi^2$ при хвильових числах $k_{min} = \pi/\xi$. Для зворотної ситуації $0.7 \ll 1.82R_{TM}$ і $\delta T < 0$, мінімальному значенню критичного числа Ra_{cr} відповідає величина $Ra_{cr}^{min} = 2.2\pi^2\xi^2/R_{TM}$ при хвильових числах $k_{min} = \pi/\xi$. Зауважимо, що критичне число Релея (5.79) для конве-

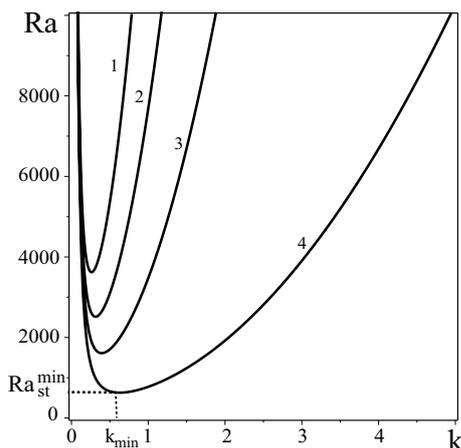


Рис. 5.15: Криві нейтральної стійкості шару плазми для різних значень параметра $\xi = h/r_d$: $\xi = 12$ - крива 1, $\xi = 10$ - крива 2, $\xi = 8$ - крива 3, $\xi = 5$ - крива 4.

кції в електронній рідині відрізняється від критичного числа Релея у звичайній гідродинаміці [91]:

$$Ra_{cr}^{gd} = \frac{(\pi^2 n^2 + k^2)^3}{k^2} \quad \text{при } n = 1,$$

крім числового множника та показника ступеня над дужками, наявністю відношення масштабу конвекції до плазмового масштабу, тобто параметром $\xi = h/r_d$. Рис. 5.15 представлені графіки залежності критичного числа Релея Ra_{cr} (5.80) від хвильового числа k для різних значень параметра ξ . На графіках видно, що лінія $Ra = Ra_{cr}$ на площині (k, Ra) розмежовує область, де всі малі обурення згасають ($\gamma < 0$) і область, де всі обурення наростають ($\gamma > 0$), тобто відбувається генерація магнітного поля. Зі збільшенням параметра ξ також зростає мінімальне значення критичного числа Релея Ra_{cr}^{min} (див. Рис. 5.15).

5.4.3 Квазілінійне насичення генерації магнітних полів

Зі зростанням малих обурень лінійне наближення стає коректним. Тому для дослідження нелінійної стадії конвективної нестійкості використовуємо рівняння (5.58)-(5.60) у безрозмірному вигляді. При малій надпороговості критичного числа Релея Ra_{cr} в системі ефективно взаємодіє лише невелика кількість

мод. Тому доцільно для їх опису використовувати метод галоркінської апроксимації мінімального порядку (див. підрозділ 3.3.1). Скористаємося цим методом, представляючи всі обурені величини у вигляді рядів Фур'є:

$$\phi(x, z, t) = A_1(t)e^{-\kappa z} \sin(kx),$$

$$B(x, z, t) = B_1(t) \sin(kx) \sin\left(\frac{\pi z}{\xi}\right), \quad (5.81)$$

$$\theta(x, z, t) = C_1(t) \cos(kx) \sin\left(\frac{\pi z}{\xi}\right) + C_2(t) \sin\left(\frac{2\pi z}{\xi}\right).$$

В результаті підстановки розкладання (5.81) у рівняння (5.58)-(5.60), та проведення інтегрування по всій області $[0, \frac{2\pi}{k}] \times [0, \xi]$ з урахуванням якості ортогональності функцій

$$\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \cos(mkx) \cos(nkx) dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq n \\ \pi/k, & \text{якщо } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\xi} \sin\left(\frac{m\pi z}{\xi}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{\xi}\right) dz = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq n \\ \xi/2, & \text{якщо } m = n \end{cases}$$

отримаємо рівняння еволюції для редукованих амплітуд збурень [253]:

$$\begin{cases} \dot{X} = \widetilde{Pm}(Y - X) \\ \dot{Y} = P(-Y + RR_{TM}^{(-)}X - R_{TM}^{(+)}XZ) \\ \dot{Z} = P(-bZ + R_{TM}^{(+)}XY - \widetilde{K}R\Phi^2) \\ \dot{\Phi} = P(-\sigma_1\Phi - \sigma_2R^{-1}\Phi Z) \end{cases} \quad (5.82)$$

де

$$\widetilde{Pm} = \frac{\eta}{2.1\chi}, \quad R = \frac{k^2 Ra}{l^4}, \quad b = \frac{4\pi^2}{l^2},$$

$$R_{TM}^{(-)} = 1.82R_{TM} - 0.7, \quad R_{TM}^{(+)} = 1.82R_{TM} + 0.7, \quad P = \frac{l^2 + \xi^2}{\xi^2},$$

$$\sigma_1 = \frac{\kappa k_T - \xi^2 P m (\kappa^2 - k^2)}{2l^2(1 + k^2 - \kappa^2)}, \quad \sigma_2 = \frac{\kappa k_T}{2l^2(1 + k^2 - \kappa^2)},$$

$$\tilde{K} = 0.13R_{TM} \cdot \frac{\pi(\kappa^4 - k^4)(1 - e^{-2\kappa\xi})}{\pi^2 + \xi^2\kappa^2} \left(\frac{\delta T}{T_0}\right)^{-1}.$$

Без урахування впливу термосили $k_T = 0$, рівняння для Φ в системі (5.82) стає незалежним, і в результаті ми отримуємо 3D рівняння нелінійної динаміки типу Лоренца [162]:

$$\begin{cases} \dot{X} = \widetilde{Pm}(Y - X) \\ \dot{Y} = P(-Y + RR_{TM}^{(-)}X - R_{TM}^{(+)}XZ) \\ \dot{Z} = P(-bZ + R_{TM}^{(+)}XY) \end{cases} \quad (5.83)$$

Незважаючи на схожість спрощеної системи рівнянь (5.83) з рівняннями Лоренца, вони описують різні фізичні процеси. Формальна відмінність системи (5.83) від рівнянь Лоренца полягає в наявності різних коефіцієнтів $R_{TM}^{(-)}$, $R_{TM}^{(+)}$, P , обумовлених особливістю явищ переносу в плазмі. Пошук аналітичних рішень рівнянь (5.82) та (5.83) представляє важке завдання. Однак, ми можемо дослідити механізм насичення генерованого магнітного поля, перетворюючи 4D рівняння нелінійної динаміки до рівняння Гінзбурга-Ландау для кінцевої амплітуди магнітного поля. Подібний асимптотичний метод отримав розвиток у роботах [257, 258], який ми будемо застосовувати до рівнянь (5.82).

Наслідуючи роботи [257, 258], представимо всі обурені величини в рівняннях (5.82) у вигляді розкладання в ряд за малим параметром надкритичності ε :

$$\mathbf{X} = \varepsilon\mathbf{X}_1 + \varepsilon^2\mathbf{X}_2 + \varepsilon^3\mathbf{X}_3 + \dots, \quad \mathbf{X} = [X, Y, Z, \Phi]^{Tr}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \varepsilon^2\mathbf{R}_2 + \dots \quad (5.84)$$

Амплітуди збурених величин залежать тільки від повільного часу $\tilde{\tau} = \varepsilon^2\tilde{t}$. Підставляючи розкладання (5.84) у рівняння (5.82) і порівнюючи однакові ступені ε з обох сторін отриманих рівнянь, ми отримуємо рівняння у різних порядках ε . Застосовуючи умову розв'язності (альтернатива Фредгольма) до нелінійних рівнянь третього порядку ε , ми отримуємо рівняння Гінзбурга-Ландау для ам-

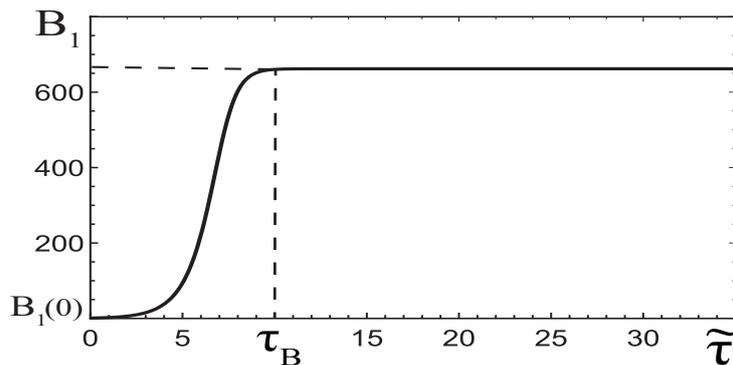


Рис. 5.16: Залежність амплітуди $B_1(\tilde{\tau})$ генерованого магнітного поля від часу $\tilde{\tau}$.

плітуди магнітного поля $B_1(\tilde{\tau})$:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tilde{\tau}} - a_1 B_1 + a_2 B_1^3 = 0, \quad (5.85)$$

де коефіцієнти a_1 та a_2 рівні

$$a_1 = \frac{\widetilde{Pm}}{1 + P^{-1}\widetilde{Pm}}, \quad a_2 = \frac{k^2 \widetilde{Pm} (R_{TM}^{(+)})^2}{8l^2 (1 + P^{-1}\widetilde{Pm})}.$$

При виведенні рівняння (5.85) ми вважали малість параметра надкритичності ε , що означає $R_2 \approx R_0$ і змінили знак параметра Релея $R_0 \rightarrow -R_0$, що відповідає зміні умов нагрівання: $T_d < T_u$ (нагрів зверху). Для чисельної оцінки коефіцієнтів a_1 і a_2 у рівнянні (5.85) значення параметрів \widetilde{Pm} і b вважатимемо як у системі Лоренца, тобто

$$\begin{aligned} \widetilde{Pm} &= \frac{\eta}{2.1\chi} = \frac{0.51}{2.1} \frac{c^2 \nu^2}{v_{Te}^2 \omega_{pe}^2} \approx 0.24 R_{TM}^{-1} = 10, \\ b &= \frac{4\pi^2}{l^2} = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + k^2 \xi^2} = \frac{8}{3} \Rightarrow k^2 \xi^2 = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Звідси знаходимо $R_{TM} = 0.024 \ll 1$, отже генерація магнітного поля здійснюється конвективним перенесенням тепла (див. (5.61)). Тоді параметр $R_{TM}^{(+)}$ має значення: $R_{TM}^{(+)} = 0.74$. Значення параметра P легко отримати, якщо прийняти

відношення масштабів $\xi^2 = h^2/r_d^2 = 10^4$:

$$P = 1 + \frac{l^2}{\xi^2} = 1 + \frac{\pi^2 + k^2\xi^2}{\xi^2} = 1 + \frac{3\pi^2}{2\xi^2} \approx 1.0015. \quad (5.87)$$

Аналітичне рішення рівняння (5.85) за відомою початковою умовою $B_1(0)$ має вигляд

$$B_1(\tilde{\tau}) = \frac{B_1(0)}{\sqrt{\frac{a_2}{a_1}B_1^2(0) + \left(1 - B_1^2(0)\frac{a_2}{a_1}\right) \exp(-2\tilde{\tau}a_1)}}. \quad (5.88)$$

Початкову амплітуду вважаємо рівною $B_1(0) = 1$. Рис. 5.16 показаний графік залежності генерованого магнітного поля $B_1(\tilde{\tau})$ від часу $\tilde{\tau}$ для параметрів (5.86)-(5.87). Тут бачимо, що зростання амплітуди магнітного поля $B_1(\tilde{\tau})$ триває до певного часу τ_0 , після чого встановлюється стаціонарний рівень магнітного поля $B_1(\tilde{\tau})_{max}$:

$$B_1(\tilde{\tau})_{max} \approx \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{8(\pi^2 + k^2\xi^2)}{k^2(R_{TM}^{(+)})^2}} = \sqrt{\frac{24\xi^2}{(R_{TM}^{(+)})^2}} \approx 662. \quad (5.89)$$

Як видно з Рис. 5.16 амплітуда стаціонарного магнітного поля набагато перевищує початкове значення $B_1(0)$. Таким чином, ми встановили квазілінійне насичення спонтанної генерації магнітного поля у разі розвитку конвективної нестійкості.

5.5 Генерація магнітних полів у неоднорідній повністю іонізованій плазмі в зовнішньому постійному магнітному полі

Генерація магнітних полів у повністю іонізованій неоднорідній плазмі є складним явищем, що становить значний інтерес для астрофізики, фізики плазми та досліджень у сфері термоядерної енергетики. Відома значна кількість механізмів, які пояснюють походження сильних магнітних полів у лазерній плазмі. Недавній огляд [259] висвітлює низку механізмів, що лежать в основі ге-

генерації магнітного поля в лазерній плазмі, а також останні експериментальні та теоретичні досягнення в цій галузі. Найімовірнішим механізмом генерації магнітних полів під час лазерного нагрівання сферично-симетричної мішені є магнітотеплова (або термомагнітна) нестійкість, яка виникає, коли градієнти густини та температури є паралельними. У роботі [106] ця нестійкість аналізувалася для плазми без зовнішнього магнітного поля. У роботі [107] показано, що гаряча плазма ($T = 10^8\text{K}$) зі щільністю (10^{17}m^3) набуває замагніченості вже за напруженості магнітного поля всього 0.03 Тл (або 300 G). У згаданих роботах [106, 107] розглядалися механізми генерації магнітних полів у високо-температурній плазмі, коли в процесі теплопередачі стали суттєвими «косі» теплові потоки. У цьому випадку масштаби згенерованих полів є малими порівняно з характерними масштабами неоднорідностей плазми за температурою та густиною. У зв'язку з цим постає питання про можливість генерації магнітних полів у неоднорідній плазмі в усьому діапазоні довжин збурень із врахуванням конвективних потоків плазми.

В цьому розділі розглядається генерація магнітних полів у неоднорідній повністю іонізованій плазмі в зовнішньому постійному магнітному полі [260]. Для опису процесів генерації магнітних полів у плазмі ми використовуємо відомі рівняння Брагінського [111], які враховують залежність коефіцієнтів перенесення від магнітного поля. Отримано критерії виникнення нестійкостей і, відповідно, генерації магнітних полів з урахуванням конвективного теплоперенесення та термомагнітних явищ. Проведено детальний аналіз виразів для швидкості зростання збурень магнітного поля та температури в короткохвильовому діапазоні.

5.5.1 Рівняння для амплітуд магнітного поля та температурних збурень

Розглянемо повністю іонізовану плазму з рівноважними градієнтами температури та густини, що підтримуються зовнішніми джерелами (лазерним випромінюванням, пучком заряджених частинок). На плазму діє однорідне магнітне поле \mathbf{B}_0 , а незбурений гідродинамічний рух відсутній. Припустимо, що процес розвитку збурень відбувається настільки швидко, що іони залишаються «нерухомими» та «холодними». Для спрощення розглянемо плоску геометрію задачі, в якій незбурена температура T_0 і N_0 густина залежать лише від однієї декартової координати x . Оскільки градієнти температури та густини колінеарні, це автоматично забезпечує виконання умови $[\nabla N_0 \times \nabla T_0] = 0$. У такому випадку відсутнє джерело збудження магнітного поля через бароклінний ефект: $\partial \mathbf{B} / \partial t \sim [\nabla N_0 \times \nabla T_0] = 0$. Розглянемо декартову геометрію задачі генерації магнітних полів у плазмі з колінеарними градієнтами густини та температури $\nabla N_0, \nabla T_0 \parallel \mathbf{e}_x$, поміщеної в однорідне магнітне поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ (де \mathbf{e}_z одиничний вектор уздовж осі z). Рух електронів та процеси теплоперенесення у повністю іонізованій плазмі описуються рівняннями Брагінського [111] (див. (2.81)-(2.83)). Наведемо основні припущення, що обмежують фізичну модель генерації магнітних полів у неоднорідній замагніченій плазмі:

1. Ми використовуємо гідродинамічний опис руху електронів, що передбачає, що довжини збурень λ всіх параметрів плазми та характерні просторові масштаби неоднорідностей L значно більші за довжину вільного пробігу електронів l : $\lambda, L \gg l$.
2. Ми нехтуємо силами в'язкості в порівнянні з силами тертя, оскільки

$$\frac{|\mathbf{R}_v|}{\left| \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \right|} \cong \frac{L^2}{NT\tau_{ei}^2} \sim \frac{L^2}{l^2} \gg 1.$$

3. Передбачається, що частка джоулевого нагріву $\mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_v / (eN)$ мала в порів-

нянні з часткою тепловиділення, пов'язаного зі зіткненнями електронів з іонами:

$$\begin{cases} C_s \gg V_e(\omega_{Be}\tau_e)^{1/2}, & \text{за } \xi \ll 1, \\ C_s \gg V_e(\omega_{Be}\tau_e)^{-1/2}, & \text{за } \xi \gg 1, \end{cases}$$

де $C_s = \sqrt{T/M}$ — швидкість іонного звуку.

4. Ми також нехтуємо відносним внеском роботи теплової сили $\mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_T / (eN)$ у рівнянні теплового балансу електронів у порівнянні з процесом виділення тепла, пов'язаним із зіткненнями електронів з іонами:

$$\begin{cases} \frac{mL}{M\tau_e} \gg V_e, & \text{за } \xi \ll 1, \\ \frac{mL}{M\tau_e} \gg V_e(\omega_{Be}\tau_e)^{-2}, & \text{за } \xi \gg 1. \end{cases}$$

5. З рівняння неперервності випливає, що $\text{div}(N\mathbf{V}) = 0$, тому рівняння неперервності дає сталість густини у часі: $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$. Це означає, що профіль густини не порушується збуреннями швидкості електронів.
6. Частота електрон-електронних зіткнень ($\nu_{ee} \cong \tau_e^{-1}$) приблизно така сама, як частота електрон-іонних зіткнень ($\nu_{ei} \cong \tau_{ei}^{-1}$).

Враховуючи вищевикладені припущення, отримуємо лінійну систему рівнянь для еволюції малих збурень магнітного поля B_1 та температури T_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \nabla_{\perp}^2 B_1 - \frac{c^2 K_N}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) + \frac{\tilde{\alpha}_{\perp}^{(0)} c^2}{\omega_{pe}^2} \nabla_{\perp}^2 B_1 - \frac{\partial B_1}{\partial t} - U_n \frac{\partial B_1}{\partial y} - U_T \frac{\partial B_1}{\partial x} = \frac{c}{e} K_N \frac{\partial T_1}{\partial y} - \\ - \beta_T \left[B_0 \nabla_{\perp}^2 T_1 + \frac{3 B_0}{2 T_0} \frac{d^2 T_0}{dx^2} T_1 + (3K_T - K_N) B_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + \left(\frac{3}{4} K_T^2 - \frac{3}{2} K_T K_N \right) B_0 T_1 + \right. \\ \left. + (3K_T^2 - 2K_T K_N) T_0 B_1 + B_1 \frac{d^2 T_0}{dx^2} \right] \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{c T_0}{4\pi e N_0} \left(\left(1 + \frac{2}{3} \beta_{\perp} \right) K_T - \frac{2}{3} K_N \right) \frac{\partial B_1}{\partial y} = \\ = \frac{2 \beta_T B_0 T_0}{3 \cdot 4\pi N_0} \left(\nabla_{\perp}^2 B_1 + \left(\frac{5}{2} K_T - K_N \right) \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} \chi_{\perp}^{(0)} \nabla_{\perp}^2 + \frac{5}{3} \chi_{\perp}^{(0)} \left(\frac{T_1}{T_0} \frac{d^2 T_0}{dx^2} + \frac{3}{2} K_T^2 T_1 + K_T \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \chi_{\wedge}^{(0)} \frac{e\tau}{mc} \frac{\partial B_1}{\partial y} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \\
& + \frac{2}{3} \chi_{\wedge}^{(0)} \frac{eB_0\tau}{mc} K_N \frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{mT_1}{M\tau}, \tag{5.91}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{\perp}^{(0)} &= \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{\alpha'_1 \xi^2 + \alpha'_0}{\Delta} \right), \quad \beta_T = \tau \frac{(\beta''_1 \xi^2 + \beta''_0)}{m\Delta}, \quad \beta_{\perp} = \frac{\beta'_1 \xi^2 + \beta'_0}{\Delta}, \\
U_n &= \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \omega_{Be} K_N, \quad U_T = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\alpha}_{\perp}^{(0)} c^2}{\omega_{pe}^2} K_T, \quad \chi_{\perp}^{(0)} = \frac{\tau T_0}{m} \frac{(\gamma'_1 \xi^2 + \gamma'_0)}{\Delta}, \quad \chi_{\wedge}^{(0)} = \frac{\tau T_0}{m} \frac{(\gamma''_1 \xi^2 + \gamma''_0)}{\Delta},
\end{aligned}$$

$\tau = (\tau_0 T_0^{3/2})/N_0$ характерний час між зіткненнями електронів за рівноважної температури T_0 і щільності N_0 , $\tau_0 = \text{const}$. Параметри K_N і K_T є характерними масштабами неоднорідності плазми:

$$K_N = \frac{1}{N_0} \frac{dN_0}{dx}, \quad K_T = \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx}.$$

Уявімо обурення малої інтенсивності як хвильові рухи, що не впливають на рівноважні властивості плазми. Тоді в короткохвильовій межі $L \gg \lambda$ представимо обурення магнітного поля і температури у вигляді гармонійних коливань:

$$(B_1, T_1) = (A_{B_1}, A_{T_1}) \exp \left(ik_y + i \int^x k_x(x') dx' - i\omega t \right). \tag{5.92}$$

Нехтуючи похідними функції $k_x(x)$, тобто обмежуючись нульовим наближенням геометричної оптики, отримуємо дисперсійне рівняння, що шукається. Це рівняння має громіздкий вигляд, тому розглянемо окремі випадки.

5.5.2 Збудження магнітного поля в однорідній замагніченій плазмі

У цьому випадку дисперсійне рівняння набуває вигляду:

$$\omega^2 + i\omega(\gamma_T + \gamma_B) - \gamma_T \gamma_B - \frac{2}{3} \gamma_{\beta}^2 (\omega_{Be} \tau)^2 \frac{k^2 r_d^2}{1 + k^2 r_d^2} = 0, \tag{5.93}$$

де $r_d = c/\omega_{pe}$ – радіус Дебая електронів, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ – ленгмюрівська частота електронів, $\xi = \omega_{Be} \tau_e$ – параметр Холла, $\gamma_{\beta} = \frac{(\beta''_1 \xi^2 + \beta''_0)}{\Delta} \sqrt{\frac{T_0 k^2}{m}}$ – характерна

частота коливань, зумовлена впливом теплової сили та зовнішнього магнітного поля, $\gamma_T = \left(\frac{2}{3} \chi_{\perp}^{(0)} k^2 + \frac{m\nu_{ei}}{M} \right) = \gamma_{\chi} + \gamma_{\nu}$, γ_{χ} є частиною декременту затухання, пов'язаного з теплопровідністю електронного газу, γ_{ν} – це частина декременту затухання, пов'язаного з передачею теплової енергії під час зіткнень електронів і іонів. Додатний корінь квадратного рівняння (5.93) дозволяє знайти вираз для швидкості зростання $\Gamma = \text{Im } \omega$ термомагнітних збурень:

$$\Gamma = \frac{2}{3} \frac{\gamma_{\beta}^2 (\omega_{Be\tau})^2 k^2 r_d^2}{(\gamma_T + \gamma_B)(1 + k^2 r_d^2)} - \frac{\gamma_T^2 + \gamma_B^2 + \gamma_T \gamma_B}{\gamma_T + \gamma_B} \quad (5.94)$$

Розглянемо випадок, коли інерція електронів мала, тобто $kr_d \ll 1$. Тоді за умови

$$\gamma_{\chi} \gg \gamma_B \quad \text{або} \quad \frac{2}{3} \frac{\chi_{\perp}^{(0)}}{\tilde{\alpha}_{\perp}^{(0)} r_d^2} \gg 1,$$

необхідна умова для розвитку нестабільності, що призводить до генерації магнітних полів, виконується, якщо задовольняється наступна нерівність:

$$\left(\frac{3}{2} \right)^3 \frac{(\omega_{Be\tau})^2 \nu_e^2 r_d^2 m}{(4.66)^2 T_0} = \frac{(3/2)^3}{(4.66)^2} \frac{B_0^2}{4\pi P_0} > 1 \quad (5.95)$$

Нерівність (5.95) можна записати через параметр β (бета-плазми): $\beta = 8\pi N_0 T_0 / B_0^2$: $\frac{2(3/2)^3}{(4.66)^2} = 0.31 > \beta$.

Параметр β плазми – це безрозмірний параметр, що представляє відношення тиску плазми до магнітного тиску. Висока β плазми означає, що тиск плазми домінує, тоді як низька β плазми означає, що магнітний тиск домінує. Умова (5.95) показує, що нестабільність можлива при низьких значеннях бета-плазми. Приклади низької бета-плазми спостерігаються в токамаках, а також в астрофізичних плазмах, таких як магнітосфера Землі, плазма сонячного вітру тощо. Для плазми токамака (термоядерні експерименти) густина електронів коливається від 10^{19} до 10^{20} частинок на м^{-3} , температура близько 10^8K , а магнітне поле змінюється від 2 до 5 Т. У цьому випадку значення бета-плазми лежить в діапазоні від 0.01 до 0.1 і задовольняє нерівність (5.95). Магнітне поле Землі

достатньо сильне для того, щоб утримувати частинки плазми, тому магнітний тиск домінує над термічним тиском. Значення β в магнітосфері Землі зазвичай менше одиниці (близько 10^{-3} до 10^{-5}) для густини електронів, що змінюється від 10^{10} до 10^{12} частинок на м^{-3} , температури від 1160 до 2320 К, а магнітне поле змінюється в діапазоні від $3 \cdot 10^{-5}$ до $6 \cdot 10^{-5}$ Т. Сонячний вітер – це потік заряджених частинок, що рухається від Сонця і взаємодіє з магнітним полем Землі. Оскільки магнітний тиск сонячного вітру значно вищий за його термічний тиск, значення β дуже низьке (близько 10^{-6}). Параметри плазми сонячного вітру мають густину електронів від 10^7 частинок на м^{-3} , температура близько 10^5 К, а магнітне поле близько 10^{-6} Т. Якщо виконується інша умова

$$\gamma_{\chi} \ll \gamma_B \quad \text{або} \quad \frac{2}{3} \frac{\chi_{\perp}^{(0)}}{\tilde{\alpha}_{\perp}^{(0)} r_d^2} \ll 1,$$

то швидкість зростання порушень дорівнює

$$\Gamma \approx \frac{2}{3} \frac{\gamma_{\beta}^2 (\omega_{BeT})^2}{\tilde{\alpha}_{\perp}^{(0)}} - \tilde{\alpha}_{\perp}^{(0)} k^2 r_d^2. \quad (5.96)$$

З виразу (5.96) випливає, що генерація магнітного поля можливе, якщо задовольняється нерівність:

$$\left(\frac{3}{2}\right) \frac{4\pi P_0}{B_0^2} > 1 \quad \text{або} \quad \beta > \frac{4}{3}. \quad (5.97)$$

Як видно з умови (5.97), для розвитку нестабільності необхідно, щоб рівноважний тиск плазми був більшим за магнітний тиск. Сонячна корона є прикладом плазми з високим β значенням $\beta \gg 1$. Температура сонячної корони досягає мільйонів градусів ($\simeq 10^6$ К), що створює високий термічний тиск, який домінує над магнітним тиском. Характеристики плазми сонячної корони: густина електронів від 10^{14} до 10^{15} частинок на м^{-3} , температура від 10^6 до $3 \cdot 10^6$ К, а магнітне поле близько 10^{-4} до $4 \cdot 10^{-4}$ Т.

5.5.3 Генерація магнітного поля в температурно-неоднорідній плазмі

У цьому розділі розглядаються механізми генерації магнітних полів в температурно-неоднорідній плазмі, в якій концентрація густини електронів є сталою ($N_0 = \text{const}$) в просторі, зайнятому плазмою. Одним з можливих механізмів генерації магнітного поля в температурно-неоднорідній плазмі є ефект Нернста. Ми отримуємо частоту осциляцій ω_0 і швидкість зростання Γ термомагнітних збурень:

$$\omega_0 = \frac{\frac{3}{2} \cdot 0.51 \nu_{ei} r_d^2 k_x K_T}{1 + k^2 r_d^2}, \quad \Gamma = 0.81 \frac{T_0 \tau}{m} \left(\frac{1}{T_0} \frac{d^2 T_0}{dx^2} + 3K_T^2 \right) - \frac{0.51 \nu_{ei} r_d^2 k^2}{1 + k^2 r_d^2}. \quad (5.98)$$

Термомагнітні осциляції осцилюють з частотою ω_0 і розповсюджуються в напрямку градієнта температури ∇T_0 . Генерація магнітного поля відбувається внаслідок розвитку термомагнітної (ТМ) нестабільності з інкрементом Γ . Ця нестабільність викликана ефектом Нернста, завдяки якому частина теплової енергії перетворюється на магнітну енергію. Подібне рівняння для інкременту ТМ нестабільності було отримано в [233] для термальної генерації магнітного поля в поверхневих шарах масивних зірок. Для плазми високої температури омічне дисипування можна знехтувати, оскільки $\nu_{ei} \sim T_0^{-3/2}$. У цьому випадку швидкість зростання порушень визначається профілем температурної неоднорідності. У тонкій корі масивних зірок залежність температури від координати можна вважати лінійною. Тоді магнітні поля генеруються із інкрементом:

$$\Gamma \approx 0.81 \cdot \frac{3\tau}{mT_0} \left(\frac{dT_0}{dx} \right)^2 \approx 2.43 \cdot \frac{\tau T_0}{m} L_T^{-2} \quad (5.99)$$

Використовуючи значення температури $T_0 \approx 10^8$ К з рівняння (5.99), легко знайти швидкість зростання магнітних збурень: $\Gamma \approx 10^9 - 10^{11} \text{ s}^{-1}$. Тоді час зростання нестабільності $t_0 \approx 10^{-11} - 10^{-9} \text{ s}$. Зазначені оцінки часу зростання магнітних полів добре узгоджуються з результатами лабораторних експериментів.

Далі отримуємо наступне дисперсійне рівняння для ТМ збурень у температурно неоднорідній замагніченій плазмі. Рішення цього рівняння у вигляді апроксимації для коротких хвиль $kL \gg 1$ і межі високого плазмового β : $1 \ll \frac{\beta}{2(kL)^2} \ll \frac{\beta}{2}$, має такий вигляд:

$$\omega_0 \approx -\frac{15/4}{4.66} \frac{T_0 k_y K_T}{m \omega_{Be} (1 + k_y^2 r_d^2)}, \quad \Gamma \approx \frac{\frac{3}{2} \frac{\tau T_0}{m} \left(\frac{1}{T_0} \frac{d^2 T_0}{dx^2} + 3K_T^2 \right)}{(\omega_{Be} \tau)^2 (1 + k_y^2 r_d^2)}. \quad (5.100)$$

Порівнюючи інкремент нестійкості ТМ у незамагніченій плазмі (5.98) з інкрементом для замагніченій плазми (5.100), отримуємо

$$\frac{\Gamma_{\xi \ll 1}}{\Gamma_{\xi \gg 1}} \approx \frac{2}{3} \cdot 0.81 (\omega_{Be} \tau)^2 \gg 1.$$

Отже, нестійкість ТМ в незамагніченій плазмі має більший інкремент, ніж у замагніченій плазмі, що означає, що збурення, пов'язані з першою нестійкістю, ростуть швидше, ніж збурення, пов'язані з другою нестійкістю.

Тепер розглянемо випадок низького плазмового β : $\frac{\beta}{2(kL)^2}, \frac{\beta}{2} \ll 1$. Тоді рішення набувають вигляду:

$$\omega_0 \approx -\frac{3}{2} \frac{\tau T_0}{m (\omega_{Be} \tau)} k_y K_T, \quad \Gamma \approx -\gamma_\chi - \frac{3 T_0 k^2}{2 m \nu_{ei}} (\omega_{Be} \tau)^{-2}. \quad (5.101)$$

Це вказує на те, що ТМ збурення пригнічуються теплопровідністю електронного газу, що призводить до неможливості генерувати магнітне поле в цьому випадку. Отже, механізм генерації магнітного поля через ефект Нернста, що обговорюється в цьому розділі, може бути спостережений лише в плазмі, яка є високотемпературною (високий плазмовий β) і температурно неоднорідною, незалежно від того, чи є вона замагніченою, чи ні.

5.5.4 Генерація магнітного поля з градієнтами густини і температури

У цьому розділі ми досліджуємо, чи можливо генерувати магнітні поля в замагніченій плазмі з градієнтами густини і температури. Було встановлено, що в рівнянні теплопередачі, збурення швидкості та відповідні збурення магнітного поля призводять до появи конвективних і «косих» теплових потоків, інтенсивність яких визначається безрозмірним параметром R_{TM} :

$$\frac{|q_{\wedge}|}{|q_{conv}|} \approx \frac{\frac{2}{3} \chi_{\wedge}^{(0)} \frac{e\tau}{mc} \frac{dT_0}{dx}}{\frac{cT_0}{4\pi e N_0} K_T} = \frac{2}{3} \frac{\gamma_0''}{\delta_0} R_{TM} \approx \frac{2}{3} \cdot 5.75 R_{TM}.$$

Одне з рішень дисперсійного рівняння, яке дає незгасаючий вклад у нестабільність ТМ для «гарячої» плазми $1 \ll \frac{R_{TM}}{(kL)^2} \ll R_{TM}$, має вигляд

$$\omega_0 \approx \frac{\frac{3}{2} \cdot 0.51 \nu_{ei} k_x K_T}{1 + k^2 r_d^2},$$

$$\Gamma \approx \left[1.82 \frac{k_y^2}{k^2} \frac{T_0}{m \nu_{ei}} K_N K_T + 0.81 \frac{\tau T_0}{m} \left(\frac{1}{T_0} \frac{d^2 T_0}{dx^2} + 3K_T^2 - 2K_T K_N \right) \right] (1 + k^2 r_d^2)^{-1}. \quad (5.102)$$

Перший термін у рівнянні (5.102) відповідає приросту нестабільності з [106], де було зроблено висновок, що генерація магнітного поля можлива при паралельних градієнтах густини і температури. Другий термін у рівнянні (5.102) пов'язаний з дією теплової сили або ефекту Нернста. Завдяки цьому ефекту генерація магнітного поля можлива в плазмі з сталою густиною електронів: $K_N = 0$. Подібне вираження для приросту нестабільності було отримано в роботі [236]. Різниця з роботою [236] полягає тільки в числових коефіцієнтах перед K_T^2 і $K_N K_T$ у вкладі теплової сили. Це пояснюється тим, що в рівняннях для імпульсу і енергії електронного газу ми врахували вплив температурних коливань на коефіцієнти переносу. Час, необхідний для розвитку нестабільності, визначається величиною градієнтів густини $dN_0/dx = K_N N_0$ і температури $dT_0/dx = K_T T_0$ і задається виразом (5.102) як $t_0 = \Gamma^{-1}$. Зі збільшенням K_N і K_T

характерний час розвитку нестабільності зменшується, що призводить до швидшої генерації магнітного поля. Враховуючи, що $\nu_{ei} \sim N_0 T_0^{-3/2}$, $K_N \sim N_0/L$, $K_T \sim T_0/L$, ми можемо вивести вираз для характерного часу розвитку нестабільності у вигляді $t_0 \sim m N_0 L^2 / T_0^{5/2}$. Це означає, що нестабільність ефективно розвивається в плазмі, яка є розрідженою, гарячою та неоднорідною, з характерною малим значенням L . Використовуючи наступні значення для лазерної плазми:

$$T_0 \approx 10^7 \text{К}, \quad N_0 \approx 10^{27} \text{м}^{-3}, \quad \tau \approx 10^{-12} \text{с}, \quad L \approx 10^{-4} \text{м},$$

ми отримуємо оцінку для значення характерного часу розвитку нестабільності $t_0 \sim 10^{-11}$, що набагато коротше за час розширення плазми $t_p \sim 10^{-9}$: $t_p \gg t_0$. Величина генерованого магнітного поля може бути оцінена за допомогою виразу для батареї Бірмана:

$$\frac{B_{max}}{t_0} \cong \frac{c}{e N_0} [\nabla N_0 \times \nabla T_1]_z, \quad B_{max} \cong \frac{mc}{e\tau} \left(\frac{L}{\lambda}\right) \left(\frac{T_1}{T_0}\right),$$

$$L \gg \lambda, \quad T_0 \gg T_1, \quad \left(\frac{L}{\lambda}\right) \left(\frac{T_1}{T_0}\right) \sim 1.$$

Важливо зазначити, що плазма повинна залишатися незамагніченою $\omega_{Be}\tau \ll 1$, і тому величина генерованого магнітного поля не повинна перевищувати певне значення $B_{max} \ll 1\text{Т}$.

Для випадку «холодної» плазми, коли теплопередача переважно здійснюється за рахунок конвективних теплових потоків: $\frac{R_{TM}}{(kL)^2}$, $R_{TM} \ll 1$ отримано:

$$\omega_0 \approx 3.16 \frac{\tau T_0}{m} k_x K_T, \quad \Gamma \approx \gamma_\chi \left[0.93 \frac{k_y^2}{k^4} \left(1.47 K_N K_T - \frac{2}{3} K_N^2 \right) - 1 \right]. \quad (5.103)$$

У межі коротких хвиль $kL \gg 1$ осциляційні короткохвильові термомагнітні збурення гаснуть за характерний час $t_d \sim \gamma_\chi^{-1}$. Нарешті, розглянемо питання можливості розвитку нестабільності ТМ в замагніченій неоднорідній плазмі з

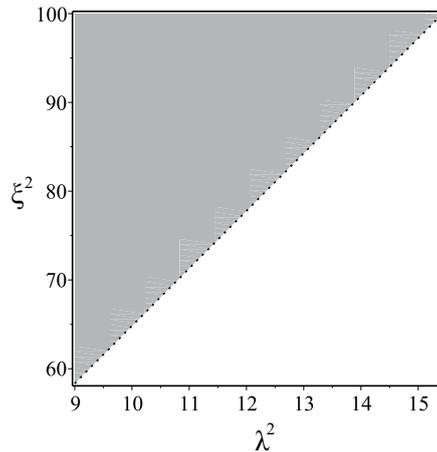


Рис. 5.17: На графіку область ТМ-нестійкості у зовнішньому магнітному полі \mathbf{B}_0 та $L_N = 3L_T$ виділена сірим кольором.

градієнтами густини і температури. Для високого плазмового бета ми знайшли:

$$\omega_0 \approx \frac{\omega_{Be} k_y K_N r_d^2}{1 + k^2 r_d^2}, \quad \Gamma \approx \frac{5/2 k_y^2 T_0 K_N K_T}{4.66 k^2 m \nu_{ei} (1 + k^2 r_d^2)}. \quad (5.104)$$

Порівнюючи вираз (5.104) з виразом (5.103), ми робимо висновок, що швидкість зростання ТМ збурень в незамагніченій гарячій плазмі є більшою. Далі, для низького плазмового бета ми знайшли:

$$\omega_0 \approx -\frac{5}{3} \frac{\tau T_0}{m} (\omega_{Be} \tau) k_y K_N, \quad \Gamma \approx \frac{k_y^2 T_0}{k^2 m \nu_{ei}} \left(K_N K_T - \frac{7}{3} K_N^2 \right) - \frac{2}{3} \cdot 4.66 \frac{\tau T_0 k^2}{m (\omega_{Be} \tau)^2}. \quad (5.105)$$

Отже, необхідна умова для нестабільності ТМ в цьому випадку має вигляд:

$$(\omega_{Be} \tau)^2 > \frac{7}{3} \frac{L_T}{L_N} (\omega_{Be} \tau)^2 + \frac{2}{3} \cdot 4.66 (k^2 L_N L_T) \gg 1,$$

$$L_N \cong K_N^{-1}, \quad L_T \cong K_T^{-1}, \quad \lambda^2 = \frac{4\pi^2}{k^2}. \quad (5.106)$$

На рисунку 5.17 в площині (λ^2, ξ^2) показано регіон розвитку нестабільності ТМ в низькотемпературній замагніченій плазмі з паралельними градієнтами густини і температури, виділений сірим кольором. Графік побудовано за наступного співвідношення масштабів неоднорідності плазми: $L_N/L_T = 3$. Таким чином, в сильно замагніченій неоднорідній плазмі механізм розвитку нестабільності стає

конкурентним з механізмом гасіння навіть у випадку короткохвильових збурень $(k^2 L_N L_T) \gg 1$.

5.6 Висновки до розділу 5

Наведемо основні результати, отримані у цьому розділі.

1) У наближенні локальної геометричної оптики отримано дисперсійне рівняння для малих ТМ-збурень в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається, у зовнішньому аксіальному магнітному полі $\mathbf{B}_0 \parallel OZ$. За відсутності зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}_0 = 0$ отримані критерії стійкості ТМ-збурень у слабо неоднорідному безмежному середовищі залежно від профілю неоднорідного обертання (числа Россбі Ro). У межі «плавних» градієнтів ∇T_0 і $\nabla \alpha$ (слабонеоднорідне середовище) отримані інкременти ТМ нестійкості та встановлено, що для низькопровідного середовища (магнітне число Прандтля $\widetilde{Pm} = \eta/\chi \gg 1$) генерація магнітного поля не ефективна через втрати, пов'язані з теплопровідністю та в'язкістю рідини. Встановлено, що у слабонеоднорідному середовищі генерація магнітного поля ефективна для високопровідної ($\widetilde{Pm} = \eta/\chi \ll 1$) рідини, якщо ефект «замагнічування» теплопровідності (ефект Ледюка-Ріги) є переважним порівняно із конвекцією тепла.

2) Показано, що для збурень, що розповсюджуються в аксіальному напрямку ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k_z$), ефект Холла може як стабілізувати, так і дестабілізувати зростання збурень залежно від профілю неоднорідного обертання (Россбі Ro). Для збурень, що поширюються в радіальному напрямку ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_R k_R$) встановлено, що ефект Нернста у зовнішньому магнітному полі \mathbf{B}_0 , ефект Ледюка-Ріги, неоднорідності рівноважної температури та питомої термо е.р.с. (ω_{TM}), і ефект архімедової сили призводять до дестабілізації осесиметричних збурень, тобто до генерації магнітного поля.

3) Отримано нелінійне рівняння Гінзбурга-Ландау для опису слабонелінійної конвективної нестійкості з урахуванням ТМ-ефектів. Точне рішення цього рів-

няння показує вихід генерованого тороїдального магнітного поля на стаціонарний рівень.

4) Отримано нову 6D динамічну систему нелінійних рівнянь з урахуванням генерації збурень тороїдального магнітного поля ТМ-нестійкістю. Виявлено режими конвекції для кеплерівського ($Ro = -3/4$) профілю обертання, при яких виникають хаотичні зміни напрямку (інверсії) та амплітуди збурень генерованого магнітного поля. Для 6D рівнянь хаотичної динаміки виконано комп'ютерне моделювання в Matlab-Simulink та LabVIEW. У комп'ютерному середовищі Multisim на базі цих рівнянь побудована електронна схема генератора хаосу.

5) Отримано новий тип термомагнітної (ТМ) нестійкості в стратифікованому за температурою тонкому шарі електронної рідини (плазмі), що знаходиться у постійному гравітаційному полі. Показано, що при зменшенні параметра $\xi = h/r_d$ (характеристика співвідношення масштабу конвекції до плазмового масштабу) знижується граничне число Релея Ra_{min}^{st} , тобто знижується поріг розвитку нестійкості, що призводить до спонтанної генерації магнітного поля. Отримано точне аналітичне рішення рівняння типу Гінзбурга - Ландау, яке показало вихід на стаціонарний рівень амплітуди магнітного поля, що генерується.

6) Встановлено, що швидкості зростання (інкременти нестійкостей) термомагнітних (ТМ) збурень у слабонеоднорідній незамагніченій плазмі з колінеарними градієнтами густини та температури є вищою, ніж у замагніченій плазмі. У слабонеоднорідній замагніченій плазмі з колінеарними градієнтами густини та температури магнітне поле може генеруватися оскільки механізм розвитку нестабільності стає конкурентним з механізмом гасіння навіть у випадку короткохвильових збурень.

Отримані в цьому розділі результати опубліковані у роботах [235, 243, 244, 247, 248, 253, 260]

РОЗДІЛ 6

БІО-ТЕРМАЛЬНА КОНВЕКЦІЯ У ТОНКИХ ШАРАХ РІДИН

Останніми роками активно розвивається міждисциплінарний напрям на перетині гідродинаміки та мікробіології – біо-термальна конвекція. Дослідження таких процесів є важливим для розуміння нелінійної динаміки в біологічних та екологічних середовищах, а також для проектування біоінженерних систем, зокрема мікрофлюїдних пристроїв і біореакторів. Біо-термальна конвекція є різновидом біоконвекції, за якої напрямлений рух мікроорганізмів взаємодіє з тепловими градієнтами в рідині. Цей механізм поєднує біологічні таксиси з теплоперенесенням і призводить до виникнення просторово-часових структур та самоорганізованої поведінки середовища. Формування теоретичних основ біо-термальної конвекції стало можливим завдяки фундаментальним дослідженням як у галузі біоконвекції, так і природної (вільної) конвекції.

Біоконвекція це рух рідини, викликане спрямованим потоком мікроорганізмів, що призводить до перерозподілу густини середовища. В результаті виникають гідродинамічні процеси в середовищі, аналогічні до природної конвекції за наявності градієнтів температури. Біоконвекція враховує рух бактерій та водоростей, причому мікроорганізми мають вищу густину, ніж вода. Мікроорганізми можуть рухатися за рахунок сил гравітації (гіротактичні мікроорганізми), градієнтів концентрації кисню (окситактичні мікроорганізми), світлового випромінювання (фототаксисні мікроорганізми), градієнтів живлення (хемотаксисні мікроорганізми) та інших факторів. Кількість саморухомих мікроорганізмів може бути дуже значним, варіюючи від 10^7см^{-3} в низькоконцентрованому режимі до 10^{11}см^{-3} в турбулентному режимі з майже щільним укладанням мікроорганізмів. Лінійна теорія стійкості біоконвекції гіротактичних мікроорганізмів у шарі кінцевої глибини звичайної рідини була розвинена Педлі зі співавторами [261–263]. У цих роботах було визначено критерії виникнення біоконвективної течії. Авраменко [264] на основі підходу Лоренца [162] розробив

нелінійну теорію біоконвекції для гіротактичних мікроорганізмів у шарі звичайної (ньютонівської) рідини. У [264] визначено межі різних гідродинамічних режимів двовимірної біоконвекції.

На відміну від мікроорганізмів, наночастинки не є саморухомими, і рухаються за рахунок броунівського руху і термофорезу, а також рухаються потоком рідини. Піонерські роботи Кузнєцова [265, 266] присвячені взаємодії нанорідин з біоконвекцією. В роботі [265] досліджувалась можливість коливальної нестійкості в суспензії нанорідин, що містить окситатні бактерії. В [266] аналізується спільне впливом геть виникнення біотермічної конвекції у суспензії наночастинок, гіротактичних мікроорганізмів і водоростей. Проведено лінійний аналіз нестійкості, що дозволяє визначити межі коливальної нестійкості. Дестабілізуючий вплив броунівського руху та термофорезу наночастинок, вертикальної течії та гіротактичних мікроорганізмів на біо-термальну нестійкість було виявлено Сайні та Шармою [267].

Про вплив гіротактичних мікроорганізмів на течії нанорідин в обмежених пористих середовищах відомо багато публікацій. Вивчення біологічних процесів у пористих середовищах останнім часом бурхливо розвивається. Кузнєцов, Нільд і Авраменко [223, 268–271] зробили значний внесок у динаміку біологічних процесів у пористих середовищах. У роботі [272] проведено лінійний аналіз біотермальної конвекції на основі моделі Дарсі-Брінкмана у суспензії гіротактичних мікроорганізмів у високопористому середовищі, що нагрівається знизу. При цьому були зроблені такі висновки [272]: суспензія, що містить більш швидкопливні клітини, більш нестабільна; гіротаксис сприяє розвитку біоконвекційної нестійкості; модифіковане число Дарсі, пов'язане з ефективною в'язкістю, стабілізує суспензію. Детальний огляд основних аспектів процесу біоконвекції в нанорідинах та пористих середовищах представлений Дмитренком [273]. В [273] наводиться математична модель біоконвекції, заснована на законі Дарсі для пористих середовищ. Шарма і Кумар [274] аналітично і чисельно досліджува-

ли вплив високочастотної вертикальної вібрації на виникнення біоконвекції в розведеному розчині гіротактичних мікроорганізмів. Спостерігається [274], що висока частота, мала амплітуда вертикальної вібрації та біоконвекційне число Пекле надають стабілізуючу дію на систему. Докладніший аналіз стійкості коливальної системи неглибоких шарів, заповнених хаотично плаваючими гіротактичними мікроорганізмами, був проведений Кушваха та ін. [275].

Однією з найпоширеніших форм таксису є термотаксис – рух мікроорганізмів у відповідь на температурні градієнти. За різних температурних умов мікроорганізми можуть демонструвати позитивний термотаксис, рухаючись у бік вищих температур, або негативний термотаксис, віддаляючись від них. Попри значний потенціал термотаксису для покращення контролю за рідинами та мікромасштабної динаміки рідинних систем, лише незначна кількість досліджень присвячена лінійному аналізу стійкості термотактичних мікроорганізмів. Нгуєн-Куанг і Аллуї [276] запропонували детерміновану модель для дослідження колективної поведінки популяцій мікроорганізмів, підкресливши вплив температурних градієнтів як фактора, що спрямовує їх таксичну активність. Їхнє дослідження також показало, що рух мікроорганізмів уздовж температурних градієнтів може призводити до неоднорідного розподілу клітин, що, у свою чергу, формує активно стратифіковану суспензію через термотактичну поведінку. Бішт і Махешварі аналітично дослідили термічну біоконвекцію в шарі нанорідини, що містить термотактичні мікроорганізми. У статті [277] було показано, що наявність наночастинок і плаваючих мікроорганізмів дестабілізує систему, спричиняючи конвекцію, що відбувається у напрямку згори вниз. Крім того, встановлено, що зменшення дифузійної здатності клітин підвищує стійкість системи.

Незважаючи на значний прогрес у вивченні біоконвекції в пористих та нанорідинних середовищах, ще багато проблем належить дослідити. У цьому розділі ми розглянемо такі питання:

- 1) біо-термальна конвекція в пористому шарі, який обертається, насиченому ньютонівською рідиною, що містить гіротактичні мікроорганізми [278];
- 2) вплив гравітаційної модуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища [279];
- 3) вплив гравітаційної модуляції та наскрізного потоку на слабонелінійну біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища [280];
- 4) біо-термальна конвекція в пористому середовищі, насиченому нанорідиною, що містить гіротактичні мікроорганізми у зовнішньому магнітному полі [281];
- 5) вплив гравітаційної модуляції та обертання на слабонелінійну біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища [282];
- 6) вплив ефектів обертання, гравітаційної модуляції та джерела тепла на слабонелінійну біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища [283];
- 7) ефекти термомодуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію з термотактичними мікроорганізмами у шарі рідини [284].

6.1 Біо-термальна конвекція в пористому шарі, який обертається, насиченому ньютонівською рідиною

У цьому підрозділі на основі моделі Дарсі-Брінкмана досліджується біо-термальна конвекція в шарі пористого середовища, що обертається, насиченою ньютонівською рідиною з гіротактичними мікроорганізмами. Модель Дарсі-Брінкмана зазвичай використовується для дослідження течії в пористих середовищах з високою пористістю. Закон Дарсі говорить, що опір пропорційно швидкості в пористому середовищі з низькою пористістю. Тому для опису течій у високопористих середовищах, класичне рівняння Дарсі доповнено додатковим лапласовським (в'язким) елементом (членом Брінкмана) [285]. Лінійний аналіз біо-термальної конвекції ми проводимо за допомогою методом Галеркіна для жорстко-жорстких граничних умов. У стаціонарному режимі буде досліджено

вплив числа Пекле, гіротаксису, числа Дарсі, числа Релея-Дарсі, ексцентриситету осередку мікроорганізмів та параметра обертання на біоконвективні процеси.

6.1.1 Постановка задачі та основні рівняння

Розглянемо нескінченний горизонтальний шар пористого середовища, насиченого ньютонівською рідиною, що містить гіротактичні мікроорганізми. Пористий шар завтовшки h обертається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю Ω_0 і нагрівається знизу. Нагрів знизу шару викликає конвективні течії рідини. T_0, T_1 - температури на нижній і верхній межах відповідно. Ми використовуємо декартові координати (x, y, z) з віссю z , спрямованою вертикально вгору. Сила гравітації $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ діє вертикально вниз. Для розведеної суспензії плаваючих мікроорганізмів ми припускаємо, що вона стислива і пориста матриця не поглинає мікроорганізми. Крім того, в моделі Дарсі-Брінкмана використовується наближення Буссінеска, а вплив ефекту обертання враховується силою Коріоліса. Відповідно до зроблених вище припущень, рівняння нерозривності, імпульсу, енергії та рівняння збереження осередків мають вигляд [278]:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_D = 0, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial t} = -\nabla P + \tilde{\mu} \nabla^2 \mathbf{V}_D - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}_D + \frac{2\rho_0}{\varepsilon} [\mathbf{V}_D \times \boldsymbol{\Omega}_0] + \\ -\mathbf{e}g\rho_0(1 - \beta_T(T - T_0)) - \mathbf{e}g(\delta\rho)\mathcal{V}n, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{V}_D \cdot \nabla T = k_m \nabla^2 T, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div} \left(n \mathbf{V}_D + n W_c \hat{\mathbf{l}} - D_m \nabla n \right). \quad (6.4)$$

Тут $\mathbf{V}_D = (u, v, w)$ - швидкість Дарсі, яка пов'язана зі швидкістю рідини \mathbf{V} співвідношенням $\mathbf{V}_D = \varepsilon \mathbf{V}$, ε - пористість пористого середовища, K - проникність пористого середовища, ρ_{f0} - щільність рідини при еталонній температурі, $\tilde{\mu}$ - ефективна в'язкість за Брінкманом, μ - в'язкість рідини, $(\rho c)_f$ - теплоємність

рідини, $(\rho c)_m$ – ефективна теплоємність, k_m – ефективна теплопровідність. n – концентрація мікроорганізмів, $\delta\rho$ – різниця щільностей мікроорганізмів і базової рідини: $\rho_m - \rho_f$, \mathcal{V} – середній обсяг мікроорганізму, D_m – коефіцієнт дифузії мікроорганізмів. Ми припустили, що випадкові рухи мікроорганізмів моделюються дифузійним процесом. $W_c \hat{\mathbf{1}}$ – середня швидкість плавання мікроорганізмів (W_c – постійна, $\hat{\mathbf{1}}$ – одиничний вектор руху мікроорганізмів). Вважається, що температура на кордонах залишається незмінною. Таким чином, граничні умови наступні [269], [272]:

$$w = 0, \quad T = T_0, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (6.5)$$

$$w = 0, \quad T = T_1, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \text{at } z = h, \quad (6.6)$$

де $\mathbf{J} = n \frac{\mathbf{V}_D}{\varepsilon} + n W_c \hat{\mathbf{1}} - D_m \nabla n$ – потік мікроорганізмів.

Використовуючи метод Галеркіна [286], ми отримуємо стаціонарні біоконвективні та теплові числа Релея-Дарсі, які можна записати наступним чином

$$\hat{R}_b = \frac{\text{Pe}^2 r_0 r_1}{a^2 (10 - \text{Pe}^2) (a^2 + 10) r_2}, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Ra} = & \frac{(a^2 + 10)^2 + D_a (a^4 + 20a^2) (a^2 + 10)}{a^2} \\ & - \hat{R}_b (10 - \text{Pe}^2) (a^2 + 10) \frac{r_2}{r_0} + \frac{10 \text{Ta} (a^2 + 10)}{a^2 (1 + a^2 D_a)}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

де

$$r_0 = 10 \text{Pe}^4 + a^2 (120 - 10 \text{Pe}^2 + \text{Pe}^4),$$

$$r_1 = (a^2 + 10)^2 + D_a (a^4 + 20a^2) (a^2 + 10) - a^2 \text{Ra} + \frac{10 \text{Ta} (a^2 + 10)}{1 + a^2 D_a},$$

$$r_2 = 30(1 + a^2 \text{G}(1 - \alpha_0)) [-e^{\text{Pe}} (\text{Pe} - 4)^2 + (\text{Pe} + 4)^2] + 120 \text{Pe}^2 \text{G}(1 + \alpha_0) (e^{\text{Pe}} - 1),$$

тут $a = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ – горизонтальне хвильове число обурень, $\text{Pe} = \frac{W_c h}{D_m}$ – числом Пекле біоконвекції, $D_a = \frac{\tilde{\mu} K}{\mu h^2}$ – число Дарсі, $\text{Ta} = \frac{4 \Omega_0^2 K^2}{\varepsilon^2 \mu^2} \rho_0^2$ – число Тейлора-Дарсі, $R_b = \frac{g(\delta\rho)hK}{\mu D_m}$ – числом біоконвекції Релея-Дарсі, $\text{Ra} = \frac{\rho_0 g h K \beta (T_0 - T_1)}{\mu \alpha_m}$ –

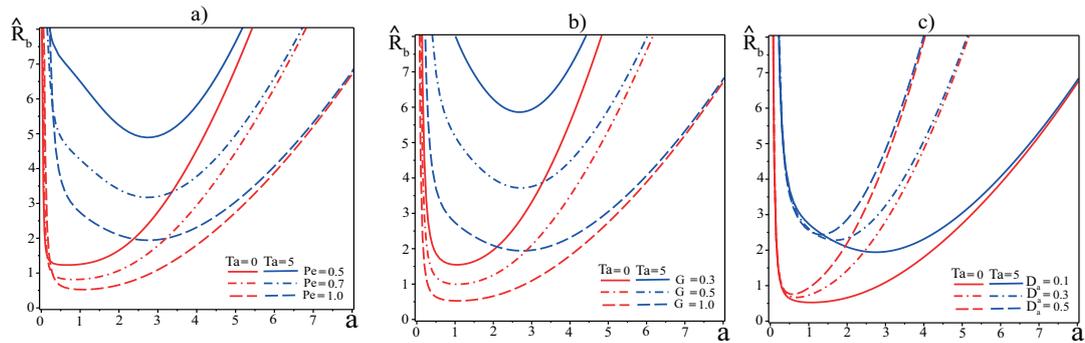


Рис. 6.1: Залежність біоконвективного числа Релея-Дарсі \hat{R}_b від хвильового числа a при різних параметрах: а) біоконвективного числа Пекле $Pe = 0.5, 0.7, 1.0$; б) числа гіротаксису $G = 0, 3, 0, 5, 1, 0$; с) числа Дарсі $D_a = 0.1, 0.3, 0.5$.

число Релея-Дарсі, $G = D_m \mathcal{B} / h^2$ – безрозмірний параметр орієнтації [261], $\mathcal{B} = (3\tilde{\mu} / \rho_m g d)(\alpha_m / h^2)$ – безрозмірний параметр, що характеризує переорієнтацію мікроорганізмів під дією поля тяжіння на тлі в'язкого опору рідини, d – зміщення центру мас осередку від центру плавучості, α_0 – ексцентриситет осередку.

Для випадку, коли нагрівання ($Ra = 0$) та обертання $Ta = 0$ відсутнє, а динамічна в'язкість зневажливо мала ($D_a = 0$), отримуємо результат статті [268].

6.1.2 Обговорення результатів впливу обертання на біо-термальну конвекцію в моделі Дарсі-Брінкмана

У цьому розділі ми досліджуємо вплив біоконвективного числа Пекле, гіротаксису, числа Дарсі, теплового числа Релея і геометричних форм мікроорганізмів на біо-термальну конвекцію в пористому середовищі, що обертається. Якщо припустити, що мікроорганізми (або клітини) важчі за воду (або іншу рідину), то це означає, що біоконвективне число Релея завжди позитивне.

Рис. 6.1а представлена залежність біоконвективного числа Релея-Дарсі \hat{R}_b від безрозмірного хвильового числа a для різних значень біоконвективного числа Пекле Pe для випадку середовища, що обертається ($Ta = 5$) і середовища, що не обертається ($Ta = 0$). Видно, що зі збільшенням значень числа Тейлора

біоконвективне число Релея-Дарсі також збільшується при фіксованих значеннях $D_a = 0.1, \alpha_0 = 0.2, G = 1, Ra = 25$. Таким чином, обертання затримує розвиток біо-термічної конвекції. Як бачимо на Рис. 6.1а, збільшення Pe робить суспензію менш стабільною. Фізичний зміст такий: чим більше значення Pe , тим більше W_c осередків; отже, суспензія з швидкими осередками менш стійка, ніж суспензія з повільнішими клітинами, і в ній легше розвивається біоконвекція як при обертанні середовища, так і без нього.

На Рис. 6.1b показаний графік залежності біоконвективного числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа для фіксованих значень $Pe = 1, D_a = 0, 1, \alpha_0 = 0, 2, Ra = 25$. Ми бачимо, що зі збільшенням числа гіротаксиса G біоконвективне число Релея-Дарсі зменшується. Цей ефект спостерігається і за наявності обертання. Число гіротаксису G характеризує відхилення напрямку руху клітин від строго вертикального. Якщо $G = 0$, то гіротаксису немає і мікроорганізми плавають вертикально вгору. Педлі та ін. [261] показали, що суспензія гіротактичних мікроорганізмів ($G > 0$) нестабільна. В результаті гіротаксис відіграє важливу роль у виникненні біоконвективної нестійкості.

На Рис. 6.1c показано вплив числа Дарсі на виникнення біо-термічної нестабільності для фіксованих значень $Pe = 1, G = 1, \alpha_0 = 0.2, Ra = 25$. Видно, що зі збільшенням Дарсі критичне число Релея біоконвекції \hat{R}_b також зростає як у пористих середовищах, що обертаються, так і в пористих середовищах, що не обертаються. Збільшення числа Дарсі обумовлено збільшенням ефективної в'язкості $\tilde{\mu}$, що стабілізує суспензію та гальмує розвиток біоконвекції.

На Рис. 6.2а показано вплив температурного нагріву на біоконвективні процеси для середовища, що обертається і не обертається. Рис. 6.2а побудований для фіксованих значень $D_a = 0.1, Pe = 1, G = 1, \alpha_0 = 0.2$. З Рис. 6.2а видно, що збільшення значення Ra означає збільшення перепаду температур між двома шарами, що дестабілізує систему та покращує процес біоконвекції. Фізичне пояснення у тому, що підвищення температури призводить до природної кон-

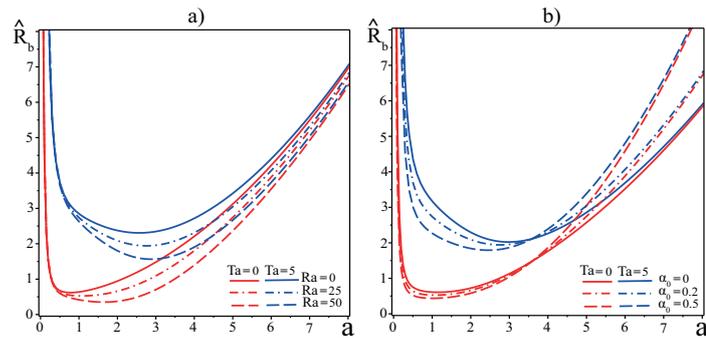


Рис. 6.2: Залежність біоконвективного числа Релея-Дарсі \hat{R}_b від хвильового числа a при різних параметрах: а) числа Релея-Дарсі $Ra = 0, 25, 50$; б) ексцентриситета осередку $\alpha_0 = 0, 0.2, 0.5$.

векції. В результаті біоконвекція виникає, коли транспортування клітин викликається конвективним потоком рідини. Результати показані на Рис. 6.1а-6.1с, 6.2а для випадку $\Omega_0 = 0$ добре узгоджуються з висновками статті [272]. На Рис. 6.2б біоконвективне число Релея-Дарсі \hat{R}_b представлено залежно від безрозмірного хвильового числа a для різних значень ексцентриситету осередку α_0 при фіксованих значеннях $D_a = 0.1, Pe = 1, G = 1, Ra = 25$. Як видно із Рис. 6.2б, сферична форма мікроорганізмів $\alpha_0 = 0$ уповільнює розвиток біоконвекції як в пористих середовищах, що обертаються, так і в пористих середовищах, що не обертаються. Тому сферична форма мікроорганізмів сприяє стабілізації біоконвекції. Аналогічний висновок був зроблений в [264], [269] для випадку середовища, що не обертається.

6.2 Вплив гравітаційної модуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища

У цьому підрозділі ми розглянемо новий ефект впливу модуляції поля тяжіння на біо-термальну конвекцію в пористому середовищі, насиченої водним розчином, що містить гіротактичні мікроорганізми. Щоб врахувати ефект періодичного в часі гравітаційного поля, ми розглянемо вертикально спрямовану вниз діючу силу, що визначається виразом $\mathbf{e}g_0(1 + \epsilon^2\delta \cos(\omega_g t))$, де δ і ω_g пред-

ставляють амплітуду і частоту гравітаційної модуляції відповідно, а ϵ - малий безрозмірний параметр. Тут ми також зосередимо увагу на рухах двожгутикових клітин зеленої водорості *Chlamydomonas reinhardtii*. Ці клітини виявляють негативний гравітаційний гіротаксис, який є тенденцією плисти проти сили тяжіння і переорієнтуватися за рахунок в'язкого та гравітаційних моментів відповідно. У цьому дослідженні розглядається модуляція гравітаційного поля та його вплив на характерний час гіротактичної переорієнтації. Під вплив модуляції гравітаційного поля характерний час гіротактичної переорієнтації \mathcal{B} стає періодичною в часі величиною:

$$\mathcal{B} = \frac{\mu\alpha_{\perp}}{2d\rho g(t)},$$

де $g(t)$ — прискорення гравітаційного поля, яке змінюється за періодичним законом. Основною метою даного підрозділу є аналіз поведінки слабонелінійної біотермальної конвекції в пористому середовищі, заповненої ньютонівської рідиною, що містить гіротактичні мікроорганізми. У дослідженні особлива увага приділяється вивчення динаміки системи на основі моделі Гінзбурга-Ландау (GL) з урахуванням ефекту модуляції гравітаційного поля.

6.2.1 Опис задачі та основні рівняння

Розглянемо постановку завдання як у підрозділі 4.1 з тією різницею, що поле тяжкості змінюється за періодичним законом: $\mathbf{g}(t) = -\mathbf{e}g_0(1 + \epsilon^2\delta \cos(\omega_g t))$. Тут ми також використовуємо модель Дарсі-Брінкмана в рамках наближення Бусінеска. При цих припущеннях основні рівняння складаються з рівнянь безперервності, імпульсу, енергії та рівняння збереження для клітин мікроорганізмів, які виражаються наступним чином [279]

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_D = 0, \quad (6.9)$$

$$\frac{\rho_0}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial t} = -\nabla P + \tilde{\mu} \nabla^2 \mathbf{V}_D - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}_D - \mathbf{e}g(t)\rho_0(1 - \beta_T(T - T_0)) - \mathbf{e}g(t)(\delta\rho)\mathcal{V}n, \quad (6.10)$$

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{V}_D \cdot \nabla T = k_m \nabla^2 T, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(n \mathbf{V}_D + n W_c \hat{\mathbf{1}} - D_m \nabla n \right),$$

$$g(t) = g_0 (1 + \epsilon^2 \delta \cos(\omega_g t)). \quad (6.12)$$

Вектор $\hat{\mathbf{1}}(t)$ являє собою напрямок руху мікроорганізмів і є періодичною в часі величиною, обумовленою модуляцією гравітаційного поля. Рівняння (6.9)-(6.12) доповнюються граничними умовами (6.5)-(6.6). Для простоти аналізу ми розглянемо випадок малих чисел Пекле (Pe), що означає $n_b(z)$ приблизно постійна у всьому шарі, тобто $n_b(z) \approx n_0$. Аналогічний підхід застосовувався у роботі [264] для дослідження хаотичного режиму біоконвекції.

Для зручності введемо функцію струму ψ і визначимо швидкості як

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6.13)$$

Після підстановки (6.13) рівняння (6.9)-(6.12), і використовуючи результати для основного стану, виключаючи тиск, ми отримаємо основні рівняння для збурень у безрозмірному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\perp}^2 - D_a \nabla_{\perp}^4 & f_m \operatorname{Ra} \frac{\partial}{\partial x} & -f_m \frac{R_b}{L_b} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -\nabla_{\perp}^2 & 0 \\ \operatorname{PeG}_0 (2 - f_m) n_0 \hat{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\operatorname{Pe}}{L_b} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{L_b} \nabla_{\perp}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ T \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon^2}{\nu_a} \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla_{\perp}^2 \psi \\ -\epsilon^2 \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, z)} \\ -\frac{\epsilon^2}{\sigma} \frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{\partial(\psi, n)}{\partial(x, z)} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

де $G_0 = D_m \mathcal{B}_0 / h^2$ - безрозмірний параметр орієнтації за відсутності модуляції [261], $\hat{\alpha} = \nabla_{\perp}^2 + \alpha_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$.

Зосереджуючи свою увагу на стаціонарному режимі біо-термальної конвекції в системі, в рівняннях (6.14) ми врахували повільні варіації збурень у часі, використовуючи перемасштабування часу $\tau = \epsilon^2 t$. Рішення системи, що описується рівнянням (6.14), може бути отримано з урахуванням непроникних граничних умов, як це представлено у роботах [189, 190]. Ці граничні умови

задаються таким чином:

$$\psi = \nabla_{\perp}^2 \psi = T = n = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{і} \quad z = 1. \quad (6.15)$$

У теорії біо-термальної конвекції широко застосовується слабонелінійний аналіз [279], що ґрунтується на методі збурень за малим параметром надкритичності. У першому порядку розкладу за цим параметром відтворюються результати лінійної теорії стійкості, які визначають критичні умови виникнення нестабільності та характер збуджуваних мод:

$$\text{Ra}_c = \frac{(\pi^2 + k_c^2)^2 (1 + D_a(\pi^2 + k_c^2))}{k_c^2} - \text{PeG}_0 n_0 \text{R}_b ((1 - \alpha_0)k_c^2 + (1 + \alpha_0)\pi^2). \quad (6.16)$$

Для визначення хвильового числа k_c , відповідного початку конвекції, ми мінімізуємо критичне число Релея Ra_c . Це досягається диференціюванням Ra_c по k_c і прирівнюванням до нуля похідної. Потім рішення цього рівняння дає значення k_c , пов'язане з початком конвекції. Якщо рідина не містить мікроорганізмів ($n_0 = 0$), критичне число Релея для моделі Дарсі-Брінкмана пористого середовища можна визначити з рівняння (6.16). Однак за відсутності внутрішнього нагріву в системі спостерігається звичайна біоконвекція, спричинена рухом мікроорганізмів. У цьому випадку ключовим параметром біоконвекції є біоконвективне число Релея R_b . Критичне значення цього параметра R_b^{cr} для біоконвекції в моделі Дарсі пористого середовища вперше було визначено Нілдом та співавторами [269].

У третьому порядку наближення враховується вплив нелінійних ефектів, що дозволяє побудувати рівняння для повільної еволюції амплітуди збурень. У випадку стаціонарного режиму конвекції таке рівняння набуває вигляду рівняння Гінзбурга-Ландау з періодичними за часом коефіцієнтами:

$$A_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - A_2(\tau)A + A_3 A^3 = 0, \quad (6.17)$$

де коефіцієнти визначаються як

$$A_1 = \frac{a^2}{\mathcal{V}_a} + \frac{k_c^2}{a^4} \text{Ra}_c + \frac{k_c^2}{a^4} \frac{\text{R}_b}{\tilde{\sigma}} \Pi, \quad A_2(\tau) = \frac{k_c^2}{a^2} \text{Ra}_c \left(\frac{\text{Ra}_2}{\text{Ra}_c} + \delta \cos(\Omega\tau) \right),$$

$$A_3 = \frac{k_c^4}{8a^4} (\text{Ra}_c + \text{R}_b L_b \Pi). \quad (6.18)$$

Рівняння Гінзбурга-Ландау, задане формулою (6.17) є неавтономним рівнянням, і отримання аналітичного рішення для нього є складним завданням. Тому вона була вирішена чисельно за допомогою Mathematica NDSolve. Рівняння вирішується за початковою умовою $A(0) = A_0$, де A_0 представляє обрану початкову амплітуду конвекції. У розрахунках ми припускаємо, що $\text{Ra}_2 \approx \text{Ra}_c$, оскільки ми орієнтуємося на нелінійність поблизу критичного стану конвекції. Так, у слабонелінійній теорії конвективної нестійкості вводиться малий параметр розкладання ϵ^2 , що є відносним відхиленням числа Релея Ra від його критичного значення Ra_c :

$$\epsilon^2 = \frac{\text{Ra} - \text{Ra}_c}{\text{Ra}_c} \ll 1.$$

Для немодульованого випадку аналітичне рішення наведеного вище рівняння (6.17) набуває наступного вигляду:

$$\tilde{A}(\tau) = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{A_3}{A_2} A_0^2 + \left(1 - A_0^2 \frac{A_3}{A_2}\right) \exp\left(-\frac{2\tau A_2}{A_1}\right)}}, \quad (6.19)$$

де $\tilde{A}(\tau)$ являє собою амплітуду конвекції для немодульованого випадку, а A_1 і A_3 мають ті ж вирази, що й у (6.18), а $A_2 = k_c^2 \text{Ra}_2 / a^2$.

6.2.2 Обговорення чисельних результатів

Рівняння Гінзбурга-Ландау, отримане шляхом аналізу збурень, дозволяє дослідити поведінку системи при кінцевих амплітудах. Задавши початкову амплітуду $A(0) = 0.3$ та параметри модуляції сили тяжіння (δ, Ω) у програмно-

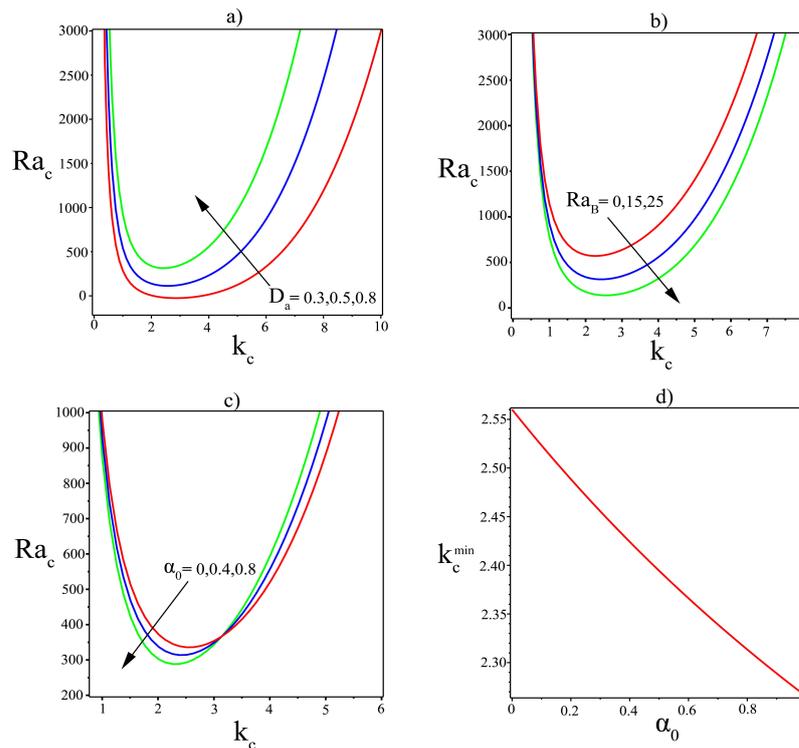


Рис. 6.3: а)-с) Графіки залежності стаціонарного числа Релея Ra_c від хвильових чисел k_c ; d) залежність мінімального критичного хвильового числа k_c^{\min} від параметра α_0 .

му середовищі Mathematica, ми можемо моделювати часову еволюцію системи. Графічне представлення результатів чисельних розрахунків наведено на Рис. 6.3-6.4. Ми проаналізували залежність теплопередачі Nu від безрозмірного параметра часу τ . Вивчаючи параметри змішаної рідини, такі як \mathcal{V}_a , R_b , PeG_0 і α_0 , а також параметри модуляції (δ , Ω), ми дослідили їхній вплив на характеристики теплопередачі. У цьому дослідженні ми робимо наступні припущення щодо числа Вадасза \mathcal{V}_a , амплітудної модуляції δ та частоти гравітаційної модуляції Ω :

- 1) припускаємо, що в'язкість шару рідини не надто висока, що дозволяє досліджувати явища конвекції та теплообміну при розумній рухливості рідини та сприйнятливості до зовнішніх впливів;
- 2) ми вибрали помірні значення числа Вадасза \mathcal{V}_a , що вказують на те, що рідина демонструє збалансоване співвідношення між температуропровідністю та кінематичною в'язкістю у високопористому середовищі;

- 3) ми зосередимося на поведінці системи за малих обурень. Це дозволяє нам досліджувати вплив модуляції на характеристики конвекції та теплообміну;
- 4) припускаємо низьку частоту гравітаційної модуляції, що вказує на те, що нижчі частоти вибираються, щоб максимізувати вплив гравітаційної модуляції на поведінку системи з часом.

Криві стійкості, що ілюструють зв'язок між стаціонарним числом Релея (6.16) і безрозмірним хвильовим числом k_c в лінійній теорії, представлені на Рис. 6.3. На Рис. 6.3а зображено залежність стаціонарного числа Релея-Дарсі Ra_c від безрозмірного хвильового числа k_c для різних значень числа Дарсі: $D_a = (0.3, 0.5, 0.8)$. Фіксовані параметри для цього графіка: $Ra_B = 15$ і $\alpha_0 = 0.4$, де $Ra_B = ReG_0n_0R_b$ – модифіковане біоконвективне число Релея-Дарсі. Графік показує, що зі збільшенням числа Дарсі мінімальне значення числа Релея-Дарсі також зростає. Це свідчить про те, що вищі значення числа Дарсі мають стабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію, затримуючи її початок.

На Рис. 6.3б зображено залежність стаціонарного числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа для різних значень модифікованого біоконвективного числа Релея-Дарсі: $Ra_B = (0, 15, 25)$. Фіксовані параметри для цього графіка: $D_a = 0.5$ та $\alpha_0 = 0.4$. Червона крива показує залежність стаціонарного числа Релея-Дарсі від хвильового числа у разі відсутності біоконвекції мікроорганізмів ($Ra_B = 0$). Подібна залежність спостерігається і за відсутності гіротаксису ($G = 0$), що також представлено як $Ra_B = 0$. З рисунка 6.3б видно, що зі збільшенням параметра Ra_B поріг виникнення біотермічної конвекції знижується. Це означає, що рух мікроорганізмів спричиняє перерозподіл густини рідини, що, у свою чергу, зменшує ефективність теплопередачі. Внаслідок цього плавальний рух мікроорганізмів може дестабілізувати стаціонарний процес біотермічної конвекції.

На Рис. 6.3с зображено залежність стаціонарного числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа для різних значень ексцентриситету осередку:

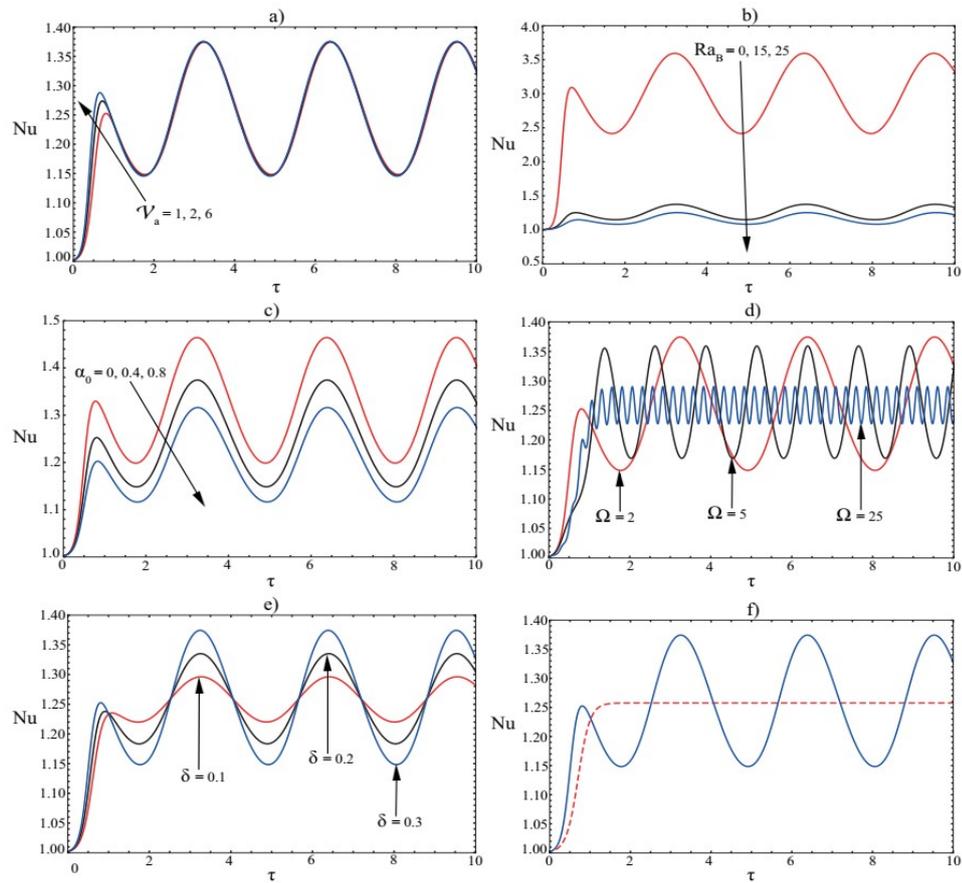


Рис. 6.4: Залежність числа Нуссельта Nu від часу τ для а) \mathcal{V}_a , б) Ra_B , в) α_0 , г) Ω , е) δ варіацій, ф) варіації числа Нуссельта $Nu(\tau)$ за відсутності $\delta = 0$ (штрихова лінія) та наявності $\delta = 0.3, \Omega = 2$ (суцільна лінія) модуляції гравітаційного поля.

$\alpha_0 = (0, 0.4, 0.8)$. Фіксовані параметри для цього графіка: $Da = 0.8$ та $Ra_B = 15$. З графіка видно, що зі збільшенням ексцентриситету осередку поріг виникнення біотермічної конвекції знижується. Це означає, що сферична форма мікроорганізмів чинить стабілізуючий вплив на початок біотермічної конвекції. Іншими словами, мікроорганізми з більш витягнутою або несферичною формою мають тенденцію посилювати розвиток біотермічної конвекції порівняно з мікроорганізмами сферичної форми. Аналогічний висновок було зроблено в роботах [263, 268]. Це відкриття свідчить про те, що морфологія або форма мікроорганізмів може відігравати важливу роль у поведінці та стабільності процесу біотермічної конвекції в досліджуваній системі.

Використовуючи вираз для критичного числа Релея (6.16), можна чисель-

но визначити мінімальні значення хвильового числа k_c . Це значення впливає на розмір конвективних осередків, який, у свою чергу, залежить від ексцентриситету клітин мікроорганізмів α_0 . Згідно з Рис. 6.3d, зі збільшенням параметра α_0 , тобто зі зменшенням сферичності форми мікроорганізмів, зростає і розмір конвективного осередку $l_c \sim (k_c^{\min})^{-1}$.

На Рис. 6.4a показано, що збільшення числа Вадасза $\mathcal{V}_a = (1, 2, 6)$ відповідає збільшенню теплопередачі за короткий проміжок часу. Це спостереження узгоджується з попередніми дослідженнями, проведеними Кіран та ін. [185–187] і Бхадаурія і Агарвал [281], де спостерігався аналогічний ефект. Число Вадасза, пропорційне числу Прандтля, яке відіграє вирішальну роль у визначенні конвективного теплообміну. Збільшення числа Вадасза вказує на більш високе відношення кінематичної в'язкості до температуропровідності рідини. Це призводить до підвищеної рухливості рідини; отже, за рахунок збільшення числа Вадасза здатність рідини передавати тепло покращується, що призводить до більш високої швидкості теплопередачі всередині системи.

На Рис. 6.4b показано вплив модифікованого біоконвекційного числа Релея-Дарсі на теплове число Нуссельта. Червона крива на графіку представляє сценарій без біоконвекції мікроорганізмів ($Ra_B = 0$), коли теплоперенесення відбувається виключно за рахунок градієнта температури. У міру збільшення модифікованого числа біоконвекції Релея-Дарсі $Ra_B = (15, 25)$, що свідчить про більш високу концентрацію мікроорганізмів та їх підвищену активність, інтенсивність конвективного потоку, що індукується мікроорганізмами, стає сильнішим. Цей посилений потік сприяє більш ефективному перемішуванню та розсіюванню тепла всередині рідини. Отже, градієнти температури в рідині зменшуються, що призводить до зменшення числа Нуссельта, яке становить швидкість теплопередачі. Зменшення числа Нуссельта означає, що у рідині розсіюється більша кількість тепла через підвищену активність гіротактичних мікроорганізмів. Беручи активну участь у конвективному потоці, мікроорганізми сприяють

перерозподілу тепла, що призводить до більш рівномірного розподілу температури всередині системи. Це явище зрештою призводить до зменшення числа Нуссельта і передбачає ефективніший загальний процес теплообміну за наявності біоконвекції.

Графіки на Рис. 6.4с демонструють суттєвий вплив форми мікроорганізму на теплообмін у системі, що відображається у зміні в часі числа Нуссельта $Nu(\tau)$. Це фізичне явище можна пояснити, якщо врахувати, як форма мікроорганізмів впливає їх рух і взаємодія з рідиною, цим впливаючи на процес конвективного теплообміну. У разі сферичних мікроорганізмів $\alpha_0 = 0$ (представлених червоною кривою на Рис. 6.4с) їх симетрична форма забезпечує відносно безперешкодний рух у рідині. Це сприяє ефективному перемішуванню та покращує теплопередачу всередині системи, що призводить до більш високої швидкості конвективного теплообміну і, отже, до вищих чисел Нуссельта. З іншого боку, коли мікроорганізми мають несферичну або неправильну форму $\alpha_0 = (0.4, 0.8)$ (представлену чорними і синіми кривими на Рис. 6.4с), їх рух у рідині стає більш складний. Наявність асиметрій та неоднорідностей у їх формі може призвести до зміни режиму течії та утруднити перемішування частинок рідини. В результаті процес конвективної теплопередачі може бути утруднений, що призводить до нижчої швидкості теплопередачі та менших чисел Нуссельта порівняно з випадком сферичних мікроорганізмів.

На Рис. 6.4d показано вплив частоти модуляції Ω на теплообмін у системі. Можна зауважити, що при нижчих частотах модуляції, особливо в низькочастотному випадку ($\Omega = 2$), досягаються вищі швидкості теплообміну в порівнянні з більш високими швидкостями коливань ($\Omega = 5$ і $\Omega = 25$). Це говорить про те, що нижчі частоти модуляції призводять до більш ефективної передачі тепла всередині системи. Спостережена тенденція узгоджується з висновками, зробленими Грешо і Сані [167] та Копп та ін. [133] у контексті звичайних рідин, підкреслюючи важливість використання низькочастотного g -джиттера для оптимізації

процесу перенесення та підвищення теплопередачі.

На Рис. 6.4e показано вплив амплітуди модуляції δ на теплообмін у системі. У дослідженні розглядається діапазон значень δ , спеціально обраних для поліпшення теплопередачі, від 0.1 до 0.3. На графіку показано, як зміна амплітуди модуляції впливає характеристики теплопередачі. Очевидно, що вищі амплітуди модуляції призводять до збільшення швидкостей теплопередачі. Це свідчить про прямий вплив амплітуди гравітаційної модуляції на ефективність теплообміну всередині системи. Правильно вибравши амплітуду модуляції, можна оптимізувати теплопередачу та підвищити загальну продуктивність системи.

Рівняння (6.19) дає аналітичний вираз для амплітуди конвекції у немодульованому випадку. На Рис. 6.4f представлено порівняння модульованої та немодульованої систем. Графік ясно ілюструє різну поведінку двох систем з погляду теплопередачі, представленої числом Нуссельта $Nu(\tau)$. У немодульованій системі можна спостерігати, що число Нуссельта різко зростає при малих значеннях часового параметра τ . За цим початковим сплеском теплопередачі слідує фаза стабілізації при більш високих значеннях τ . Така поведінка вказує на те, що відсутність модуляції гравітаційного поля процес теплообміну виходить на стаціонарний режим після початкової перехідної фази. З іншого боку, модульована система демонструє коливальну поведінку числа Нуссельта $Nu(\tau)$. Це означає, що теплообмін відчуває періодичних змін унаслідок модуляції гравітаційного поля. Коливання числа Нуссельта відображають чергування посилення та пригнічення теплопередачі під впливом змінної гравітації. Цю періодичну зміну теплопередачі можна пояснити взаємодією між конвективним рухом і змінними гравітаційними силами, що виникають унаслідок модуляції.

6.3 Вплив наскрізного потоку та гравітаційної модуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію в шарі пористого середовища

В природних умовах, таких як відкладення, біоплівки або пористі водні системи, наскрізний потік може змінювати розподіл поживних речовин та рухливість мікроорганізмів. У зв'язку з цим виникає проблема управління процесами біо-термальної конвекції, зокрема за допомогою гравітаційної модуляції, з урахуванням наскрізного потоку. На відміну від попереднього розділу, ми не накладаємо обмежень на швидкість руху мікроорганізмів і враховуємо стратифікацію їх концентрації. Крім того, ми враховуємо наскрізний потік на межах шару. У цьому розділі представлені результати роботи [280], у якій була розвинена теорія слабонелінійної біо-термальної конвекції в пористому середовищі з гіротаксичними організмами під впливом наскрізного потоку та модуляції гравітаційного поля.

6.3.1 Постановка проблеми та нелінійне рівняння для амплітуди збурень

Постановка та геометрія задачі аналогічні розділу 6.2 з тією різницею, що ми враховуємо швидкість наскрізного потоку \mathbf{W}_0 на межах. У цьому розділі ми розглянемо вертикальний потік у двох можливих напрямках. У першому випадку потік спрямований вертикально вгору, тобто проти напрямку гравітаційного поля, а в другому – вертикально вниз, тобто паралельно напрямку гравітаційного поля. Для опису процесів біо-термальної конвекції застосовується модель Дарсі-Брінкмана на основі рівнянь (6.9)-(6.12) із граничними умовами такого вигляду:

$$w = W_0, \quad \frac{dw}{dz} = 0, \quad T = T_d, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (6.20)$$

$$w = W_0, \quad \frac{dw}{dz} = 0, \quad T = T_u, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \text{at } z = h, \quad (6.21)$$

де $\mathbf{J} = n\mathbf{V}_D + nW_c\hat{\mathbf{i}}(t) - D_m\nabla n$ - потік мікроорганізмів. Припускаємо, що основний (стаціонарний) стан рідини не змінюється з часом. Профілі температур $T_b(z)$, концентрації мікроорганізмів $n_b(z)$ та розподілу тиску $P_b(z)$ у стаціонарному стані визначаються з розв'язку таких рівнянь:

$$\frac{d^2T_b}{dz^2} - \text{Pe}_0\frac{dT_b}{dz} = 0, \quad \frac{dn_b}{dz} = n_b(\text{Pe}_0L_b + \text{Pe}), \quad \frac{dP_b}{dz} = -\frac{R_b}{L_b}n_b + \text{Ra}T_b. \quad (6.22)$$

Після інтегрування рівнянь (6.22) та застосування граничних умов (6.20)-(6.21) знаходимо:

$$T_b(z) = \frac{e^{\text{Pe}_0z} - e^{\text{Pe}_0}}{1 - e^{\text{Pe}_0}}, \quad n_b(z) = n_b(0)e^{(\text{Pe}_0L_b + \text{Pe})z}, \quad (6.23)$$

де $n_b(0)$ - значення густини в нижній частині шару. Константа $n_b(0)$ знаходиться як

$$n_b(0) = \frac{\langle n \rangle (\text{Pe}_0L_b + \text{Pe})}{e^{(\text{Pe}_0L_b + \text{Pe})} - 1}, \quad \langle n \rangle = \int_0^1 n_b(z) dz. \quad (6.24)$$

Як було показано в роботі [280], осцилюючий режим конвекції для параметрів біоконвекції ($\tilde{\sigma} \approx 1.4$, $\alpha_m = 0.143 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$, $D_m = 5 \cdot 10^{-8} \text{m}^2/\text{s}$) неможливий, тому зосередимося на дослідженні стаціонарного режиму. Горизонтально усереднене число Нуссельта $Nu(\tau)$ для стаціонарного режиму конвекції оцінюється за допомогою такого виразу [280]:

$$Nu(\tau) = 1 + \frac{\left[\frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_c} \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}}{\left[\frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_c} \left(\frac{dT_b}{dz} \right) dx \right]_{z=0}} = 1 + \frac{k_c^2 \pi^2 (e^{\text{Pe}_0} - 1)}{a^2 (4\pi^2 + \text{Pe}_0^2) \text{Pe}_0} A^2(\tau). \quad (6.25)$$

Кількісна характеристика масопереносу (число Шервуда Sh) для концентрації мікроорганізмів визначається за таким виразом:

$$Sh(\tau) = 1 + \frac{k_c^2 \pi^2 (e^{(\text{Pe} + \text{Pe}_0L_b)} - 1) L_b^2 A^2(\tau)}{a^2 (\text{Pe} + \text{Pe}_0L_b)^2 (4\pi^2 + (\text{Pe} + \text{Pe}_0L_b)^2)} \times \\ \times (\text{Pe}G_0(a^2 + \alpha_0(\pi^2 - k^2)) + \text{Pe} + \text{Pe}_0L_b). \quad (6.26)$$

Аналогічно до попереднього розділу, рівняння для амплітуди $A(\tau)$ отримує-

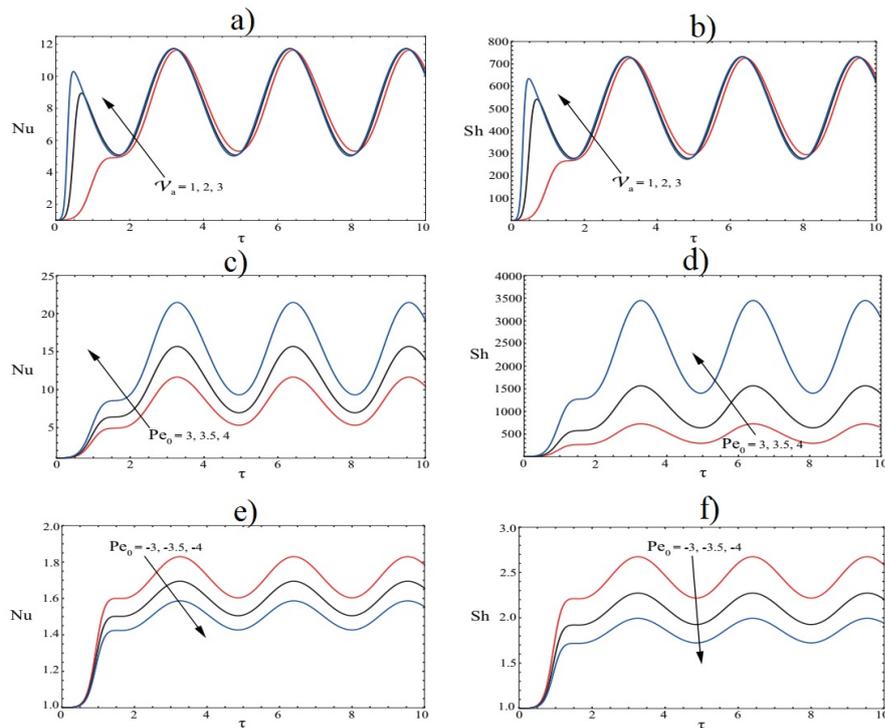


Рис. 6.5: Залежність Nu і Sh від часу τ для різних параметрів: а)-b) зміна числа Вадаша \mathcal{V}_a ; с)-d) позитивні значення числа Пекле $Pe_0 > 0$; е)-f) негативні значення числа Пекле $Pe_0 < 0$.

ться на третьому порядку асимптотичного розкладу та має вигляд рівняння Гінзбурга-Ландау для стаціонарного режиму конвекції з коефіцієнтом, що змінюється періодично в часі:

$$K_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - K_2(\tau)A + K_3 A^3 = 0, \quad (6.27)$$

де

$$K_1 = \frac{a^2}{\mathcal{V}_a} + Ra_c \frac{k_c^2 \theta_0}{a^4} + R_b \frac{k_c^2 L_b}{a^4 \tilde{\sigma}} \tilde{G}, \quad K_2(\tau) = \frac{k_c^2 \theta_0}{a^2} Ra_c \left(\frac{Ra_2}{Ra_c} + \delta \cos(\Omega\tau) \right) + \\ + R_b \frac{4\pi^2 k_c^2 \langle n \rangle (Pe + Pe_0 L_b)}{a^2 (4\pi^2 + (Pe + Pe_0 L_b)^2)} \delta \cos(\Omega\tau), \quad K_3 = \frac{k_c^4}{8a^4} (Ra_c \theta_0 + R_b L_b^2 \tilde{G}). \quad (6.28)$$

За відсутності наскрізного потоку та за низької швидкості руху мікроорганізмів рівняння Гінзбурга-Ландау (6.27) спрощується до рівняння (6.17).

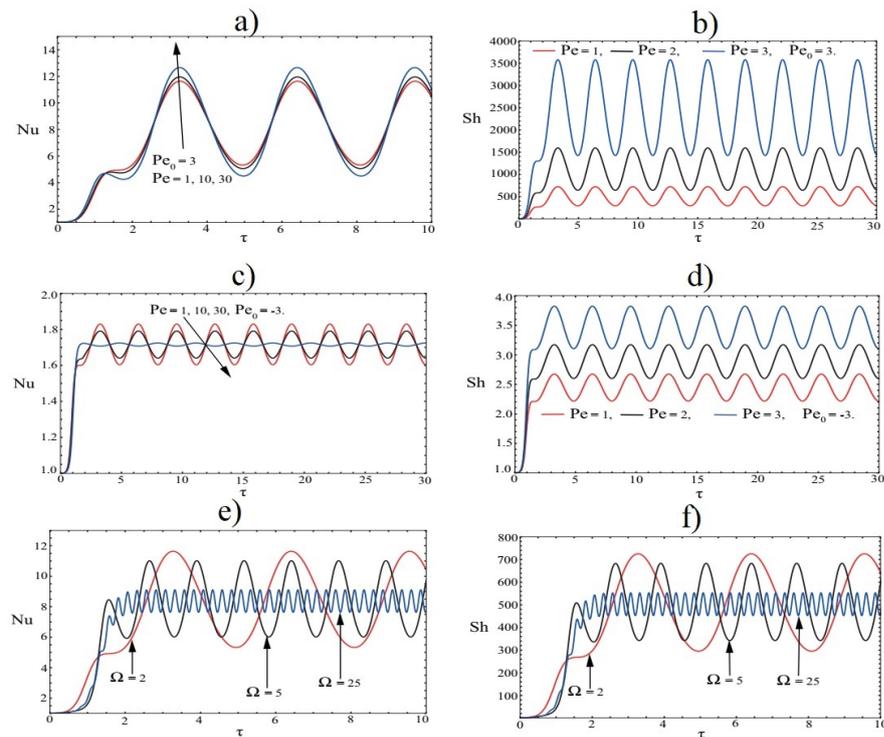


Рис. 6.6: Залежність Nu і Sh від часу τ для різних параметрів: а)-b) зміна числа Пекле Pe при позитивному значенні $Pe_0 = 3$; c)-d) зміна числа Пекле Pe при негативному значенні $Pe_0 = -3$; e)-f) варіації Ω .

6.3.2 Обговорення чисельних результатів

Для чисельного розв'язання рівняння (6.27) приймаємо початкову амплітуду $A(0) = 0.5$. Результати чисельних розрахунків представлені на Рис. 6.5-6.7, де графічно зображено перенесення тепла Nu та маси Sh залежно від безрозмірного часового параметра τ .

Визначимо роль варіації числа Вадасза \mathcal{V}_a у процесах перенесення тепла та маси, залишаючи інші параметри сталими при $Pe_0 = 3$, $Pe = 1$, $\Omega = 2$, $\delta = 0.3$. Із Рис. 6.5а та 6.5b видно, що системи з вищими значеннями числа Вадасза демонструють більш ефективні характеристики перенесення тепла та маси. Оскільки число Вадасза пропорційне числу Прандтля, аналогічна тенденція спостерігалася в дослідженнях Кірана та ін. [188]- [192], а також Коппа і Яновського [279].

На Рис. 6.5c-6.5d та 6.5e-6.5f показано вплив значень наскрізного потоку на тепло- та масоперенесення при біотермічній конвекції. Як видно із Рис.

6.5c-6.5d, при позитивних значеннях числа Пекле $Pe_0 > 0$ збільшуються числа Нуссельта Nu та Шервуда Sh . При позитивних числах Пекле наскрізний потік спрямований проти сили тяжіння, як і напрямок руху мікроорганізмів. У цьому випадку конвективні потоки збільшуються, що призводить до зростання тепло- та масопереносу. При негативних числах Пекле $Pe_0 < 0$ наскрізний потік спрямований вздовж напрямку сили тяжіння. Як показано на Рис. 6.5e-6.5f, зі зростанням абсолютних значень числа Пекле числа Нуссельта Nu та Шервуда Sh зменшуються. Таку поведінку можна пояснити тим, що наскрізний потік, спрямований уздовж сили тяжіння, перешкоджає переміщенню мікроорганізмів і, як наслідок, призводить до зниження тепло- та масопереносу.

З'ясуємо тепер, як зміна швидкості плавання мікроорганізмів (біоконвективне число Пекле Pe) впливає на тепло- і масоперенесення у системі за наявності наскрізного потоку. Рис. 6.6a і 6.6b ілюструють, що зі збільшенням біоконвективного числа Пекле Pe у разі наскрізного потоку, спрямованого проти гравітації ($Pe_0 = 3$), відбувається помітне зростання як теплоперенесення, так і масоперенесення. Навпаки, коли напрямок наскрізного потоку збігається з гравітаційним (див. Рис. 6.6c-6.6d), ми спостерігаємо пригнічення теплоперенесення у поєднанні зі збільшенням масоперенесення.

На Рис. 6.6e-6.6f показано вплив частоти модуляції (Ω) на процеси тепло- та масоперенесення. При низьких значеннях частоти модуляції ($\Omega = 2$) досягаються вищі рівні тепло- і масоперенесення порівняно з випадками більш високочастотних коливань ($\Omega = 5$ і $\Omega = 25$).

Рис. 6.7a-6.7b демонструють вплив амплітуди модуляції (δ) на процеси тепло- та масоперенесення в системі. Збільшення амплітуди модуляції (δ) сприяє підвищенню як теплоперенесення, так і масоперенесення.

З рівняння (6.27) для немодульованого випадку можна отримати аналітичний вираз для амплітуди конвекції. На рис. 6.7c-6.7d представлено результати для модульованої та немодульованої системи. Графіки демонструють різку

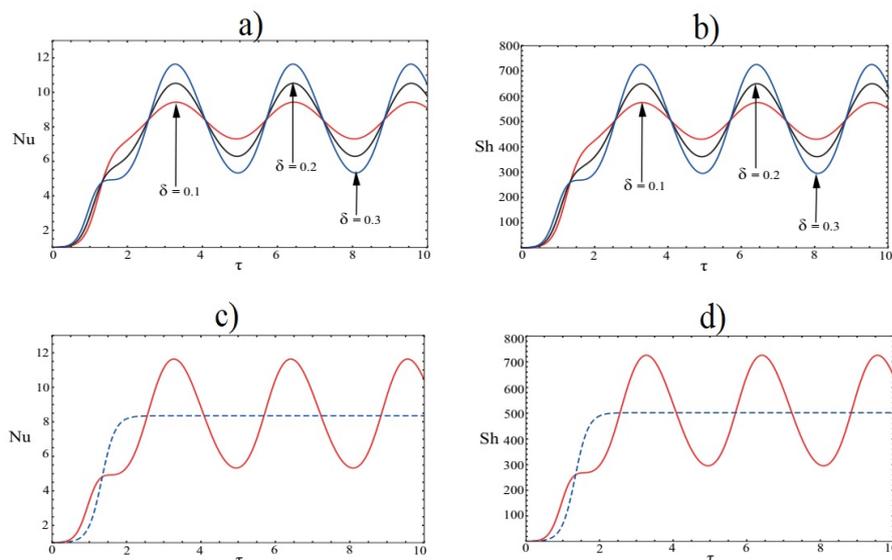


Рис. 6.7: Залежність Nu і Sh від часу τ для різних параметрів: а)-b) варіації δ ; c)-d) зміни $Nu(\tau)$ і Sh за відсутності $\delta = 0$ (штрихова лінія) та наявності $\delta = 0.3$, $\Omega = 2$ (суцільна лінія) модуляції гравітаційного поля.

зміну $Nu(\tau)$ і $Sh(\tau)$ на малих значеннях тимчасового параметра τ , після чого відбувається стабілізація на більших значеннях τ . У разі модульованої системи $Nu(\tau)$ і $Sh(\tau)$ проявляють коливальну поведінку.

6.4 Біо-термальна конвекція в пористому середовищі, насиченому нанорідиною, що містить гіротактичні мікроорганізми у зовнішньому магнітному полі

У цьому підрозділі ми досліджуємо вплив гіротактичних мікроорганізмів на теплову нестійкість у шарі пористого середовища, насиченого нанорідиною, під впливом магнітного поля [281]. Буде проведено аналіз лінійної та нелінійної стадій біо-термальної конвекції в пористому середовищі, насиченому нанорідиною, для різних типів наночастинок, таких як метал, оксиди металів та наночастинки напівпровідників у зовнішньому магнітному полі.

6.4.1 Постановка задачі та основні рівняння

Розглянемо нескінченний горизонтальний шар нестисливої електропровідної нанорідини, що містить наночастинки та гіротактичні мікроорганізми, в пористому середовищі. Спочатку передбачається, що однорідний пористий шар товщиною h перебуває у стані спокою. Нагрів знизу шару викликає збурення, де T_0, T_1 - температури на нижній та верхній межах відповідно. Вважається, що присутність наночастинок не впливає на напрямок та швидкість руху мікроорганізмів. Фізично це можливо, якщо течія, що генерується біоконвекцією, існує при малій концентрації наночастинок. Ми використовували декартові координати (x, y, z) з віссю z , спрямованої вертикально вгору. Гравітаційна сила $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ діє вертикально вниз, а магнітне поле $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$ діє вертикально вгору. \mathbf{V}_D - швидкість Дарсі, яка пов'язана зі швидкістю нанорідини \mathbf{V} співвідношенням $\mathbf{V}_D = \varepsilon \mathbf{V}$. Фізична модель нашого завдання складається з наступних припущень:

1. Всі теплофізичні характеристики постійні, крім щільності сили, що виштовхує (наближення Буссинеска).
2. Оскільки рідка фаза, мікроорганізми та наночастки перебувають у стані теплової рівноваги, тепловий потік можна описати за допомогою моделі з одним рівнянням.
3. Нанорідина нестислива, електропровідна, в'язка, ламінарна, а наночастинки є немагнітними сферичними частинками.
4. Кожен граничний шар передбачається непроникним та ідеально теплопровідним.
5. Пористий матеріал повністю насичений нанорідиною, у якій можуть плавати мікроорганізми.
6. Пори матеріалу повинні бути досить великими, щоб вмістити біологічні організми та їх рух.
7. Тверда пориста матриця не поглинає мікроорганізми, і кожен з них має одна-

ковий об'єм та форму, а також плаває з однаковою швидкістю.

8. Нагрів знизу не впливає на гіротактичну активність клітин і не вбиває їх.

Відповідно до зроблених припущень, біоконвективний рух гіротактичних мікроорганізмів у пористому середовищі, насиченому нанорідиною, у присутності магнітного поля будемо описувати за допомогою моделі Дарсі-Брінкмана. Припустимо, що суміш плаваючих мікроорганізмів та наночастинок стислива, а значить

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_D = 0, \quad (6.29)$$

Рівняння збереження для наночастинок, задається виразом

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{V}_D}{\varepsilon} \cdot \nabla \right) \phi = D_B \nabla^2 \phi + \frac{D_T}{T_u} \nabla^2 T, \quad (6.30)$$

Рівняння збереження клітин мікроорганізмів має вигляд [268]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(n \mathbf{V}_D + n W_c \hat{\mathbf{I}} - D_m \nabla n \right), \quad (6.31)$$

Рівняння імпульсу може бути записано з використанням наближення Бусінеска [287] як

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial t} = & -\nabla P + \tilde{\mu} \nabla^2 \mathbf{V}_D - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}_D + \frac{\mu_e}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \\ & + \mathbf{g} [\phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_{f0} (1 - \beta(T - T_u))] + \mathbf{g} (\delta \rho) \mathcal{V} n, \end{aligned} \quad (6.32)$$

Тут архімедова сила складається з трьох різних компонентів: зміни температури рідини, розподілу наночастинок (наночастинки важчі за воду) і концентрації мікроорганізмів (мікроорганізми також важчі за воду). У рівнянні (6.32) зовнішнє магнітне поле враховується за допомогою додаткової сили - сили Лоренца, що впливає на рух електропровідної нанорідини.

Рівняння збереження теплової енергії має вигляд

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{V}_D \cdot \nabla T = k_m \nabla^2 T +$$

$$+\varepsilon(\rho c)_p \left(D_B \nabla \phi \cdot \nabla T + D_T \frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T_u} \right), \quad (6.33)$$

Індуктивні магнітні поля, викликані конвективними течіями електропровідної нанорідини, описуються такими рівняннями [40]

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{V}_D}{\varepsilon} \cdot \nabla \right) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \frac{\mathbf{V}_D}{\varepsilon} + \eta \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (6.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (6.35)$$

$(\rho c)_f, (\rho c)_p, (\rho c)_m$ – теплоємність рідини, теплоємність наночастинок та теплоємність середовища відповідно. Вважатимемо, що температура і об'ємна частка наночастинок мають фіксовані значення на межах пористого шару:

$$w = 0, \quad T = T_0, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (6.36)$$

$$w = 0, \quad T = T_1, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \text{at } z = h. \quad (6.37)$$

Введемо такі безрозмірні параметри

$$\begin{aligned} (x^*, y^*, z^*) &= \frac{(x, y, z)}{h}, \quad \mathbf{V}_D^*(u^*, v^*, w^*) = \mathbf{V}_D(u, v, w) \frac{h}{\alpha_m}, \quad t^* = \frac{t \alpha_m}{h^2 \tilde{\sigma}}, \\ P^* &= \frac{PK}{\mu \alpha_m}, \quad \alpha_m = \frac{k_m}{(\rho c)_f}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{(\rho c)_m}{(\rho c)_f}, \quad N^* = \frac{N}{N_0}, \\ \mathbf{H}^* &= \frac{\mathbf{H}}{H_0}, \quad \phi^* = \frac{\phi - \phi_d}{\phi_u - \phi_d}, \quad T^* = \frac{T - T_u}{T_d - T_u}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

where $N_0 = \text{const}$ середня концентрація мікроорганізмів у шарі.

Аналіз рівнянь для збурень виконуватиметься методом нормальних мод, за якого припускається, що збурені величини мають вигляд гармонічних функцій у просторі та часі:

$$[u', v', w', T', \phi', n', \mathbf{b}'] = [U(z), V(z), W(z), \Theta(z), \Phi(z), N(z), \mathbf{B}(z)] e^{i(k_x x + k_y y + \gamma t)}, \quad (6.39)$$

де k_x, k_y – хвильове число вздовж напрямів x та y , $a = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ – горизонтальне хвильове число збурень. Параметр швидкості зростання позначений γ .

Використовуючи (6.39), ми отримуємо число Релея Ra:

$$\begin{aligned} \text{Ra} = & \left(\frac{(\pi^2 + a^2)\Gamma_D\Gamma_T}{a^2} + \frac{\text{QPr}}{\varepsilon\text{Pm}} \frac{\Gamma_T}{a^2\Gamma_B} \pi^2(\pi^2 + a^2) \right) \frac{(1 + P_{N_2})}{\left(1 - \frac{P_{N_1}}{\Gamma_\phi}\right)} - \\ & - \frac{\text{R}_n}{\Gamma_\phi - P_{N_1}} \left(\frac{L_e}{\varepsilon} \Gamma_T + N_A(\pi^2 + a^2) + P_{N_1}(1 - 2N_A) \right) - \frac{\left(\frac{\text{R}_b}{L_b}\right) \Gamma_\alpha \Gamma_T}{\Gamma_N \left(1 - \frac{P_{N_1}}{\Gamma_\phi}\right)}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

де

$$\Gamma_D = D_a(\pi^2 + a^2) + \gamma\mathcal{V}_a^{-1} + 1, \quad \Gamma_T = \pi^2 + a^2 + \gamma, \quad \Gamma_N = \frac{1}{L_b}(\pi^2 + a^2) + \frac{\gamma}{\tilde{\sigma}},$$

$$P_{N_1} = \frac{\pi^2 N_B \text{Pe}}{\varepsilon L_b \Gamma_N}, \quad P_{N_2} = 1 + \frac{\varepsilon P_{N_1}}{\Gamma_T L_e} \left(1 - 2N_A + \frac{N_A}{\Gamma_\phi} (\pi^2 + a^2) \right),$$

$$\Gamma_B = \frac{\text{Pr}}{\text{Pm}}(\pi^2 + a^2) + \frac{\gamma}{\tilde{\sigma}}, \quad \Gamma_\alpha = \text{PeG}((1 + \alpha_0)\pi^2 + (1 - \alpha_0)a^2).$$

Для більшості нанорідин величини $\text{Pe}\frac{N_B}{L_e}$, $\text{Pe}\frac{N_B}{\varepsilon}$ малі ($N_B = 7.5 \times 10^{-4}$, $L_e = 5000$ [?]), і вираз (6.40) спрощується

$$\begin{aligned} \text{Ra} = & \frac{(\pi^2 + a^2)\Gamma_D\Gamma_T}{a^2} + \frac{\text{QPr}}{\varepsilon\text{Pm}} \frac{\Gamma_T}{a^2\Gamma_B} \pi^2(\pi^2 + a^2) - \frac{\text{R}_n}{\Gamma_\phi} \left(\frac{L_e}{\varepsilon} \Gamma_T + N_A(\pi^2 + a^2) \right) - \\ & - \frac{\left(\frac{\text{R}_b}{L_b}\right) \Gamma_\alpha \Gamma_T}{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

У рівнянні (6.41) швидкість зростання збурень γ , взагалі кажучи, комплексна $\gamma = \gamma_r + i\omega_i$. Вочевидь, що система стійка, як $\gamma_r < 0$ і нестійка, якщо $\gamma_r > 0$. Визначимо межу стійкості для монотонних $\omega_i = 0$ та коливальних $\omega_i \neq 0$ збурень. На межі стійкості (нейтральні стани) $\gamma_r = 0$. Тому, роблячи заміну $\gamma = i\omega_i$ у рівнянні (6.41), знаходимо

$$\text{Ra} = \text{Ra}^{(r)} + i\omega_i \text{Ra}^{(i)}, \quad (6.42)$$

де $\text{Ra}^{(r)}$ і $\text{Ra}^{(i)}$ – дійсна та уявна частини дисперсійного рівняння для Ra:

$$\text{Ra}^{(r)} = \frac{(\pi^2 + a^2)}{a^2} \left((D_a(\pi^2 + a^2) + 1)(\pi^2 + a^2) - \omega_i^2 \mathcal{V}_a^{-1} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\text{QPr}}{\varepsilon \text{Pm}} \frac{\pi^2(\pi^2 + a^2)}{a^2} \cdot \frac{\frac{\text{Pr}}{\text{Pm}}(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2}{\tilde{\sigma}}}{\frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2}(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2}{\tilde{\sigma}^2}} - \\
& - \frac{\text{R}_n}{(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_e^2}{\tilde{\sigma}^2}} \left(\frac{L_e}{\varepsilon} \left((\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_e}{\tilde{\sigma}} \right) + N_A(\pi^2 + a^2)^2 \right) - \\
& - \text{Ra}_B(\pi^2 + a^2 + \alpha_0(\pi^2 - a^2)) \times \frac{(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_b}{\tilde{\sigma}^2}}{(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_b^2}{\tilde{\sigma}^2}}, \tag{6.43}
\end{aligned}$$

де $\text{Ra}_B = \text{R}_b \text{ReG}$ – модифіковане число Релея-Дарсі біоконвекції, $\text{Q} = \frac{\mu_e H_0^2 K}{4\pi\mu\eta}$ – число Чандрасекара-Дарсі.

$$\begin{aligned}
\text{Ra}^{(i)} &= \frac{(\pi^2 + a^2)}{a^2} (D_a(\pi^2 + a^2) + 1 + \mathcal{V}_a^{-1}(\pi^2 + a^2)) + \\
& + \frac{\text{QPr}}{\varepsilon \text{Pm}} \frac{\pi^2(\pi^2 + a^2)^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{\tilde{\sigma}\text{Pr}-\text{Pm}}{\tilde{\sigma}\text{Pm}}}{\frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2}(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2}{\tilde{\sigma}^2}} - \\
& - \frac{\text{R}_n L_e (\pi^2 + a^2)}{(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_e^2}{\tilde{\sigma}^2}} \left(\frac{\tilde{\sigma}(\tilde{\sigma} - L_e) - \varepsilon N_A}{\varepsilon \tilde{\sigma}} \right) - \frac{\text{Ra}_B(\pi^2 + a^2 + \alpha_0(\pi^2 - a^2))}{(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_b^2}{\tilde{\sigma}^2}} \left(\frac{\tilde{\sigma} - L_b}{\tilde{\sigma} L_b} \right). \tag{6.44}
\end{aligned}$$

Оскільки значення Ra дійсне, то уявна частина (6.42) повинна звертатися в нуль. І тут можлива наступна ситуація $\omega_i = 0$ чи $\text{Ra}^{(i)} = 0$.

6.4.2 Коливальний та стаціонарний режими конвекції

6.4.2.1 Коливальний режим конвекції

У разі обурення, що осцилюють $\omega_i \neq 0$ ($\text{Ra}^{(i)} = 0$) знаходимо критичне число Релея-Дарсі для коливальної нестійкості за формулою (6.43)

$$\begin{aligned}
\text{Ra}_{osc} &= \frac{(\pi^2 + a^2)}{a^2} ((D_a(\pi^2 + a^2) + 1)(\pi^2 + a^2) - \omega_i^2 \mathcal{V}_a^{-1}) + \frac{\text{QPr}}{\varepsilon \text{Pm}} \frac{\pi^2(\pi^2 + a^2)}{a^2} \times \\
& \times \frac{\frac{\text{Pr}}{\text{Pm}}(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2}{\tilde{\sigma}}}{\frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2}(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2}{\tilde{\sigma}^2}} - \frac{\text{R}_n}{(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_e^2}{\tilde{\sigma}^2}} \times \\
& \times \left(\frac{L_e}{\varepsilon} \left((\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_e}{\tilde{\sigma}} \right) + N_A(\pi^2 + a^2)^2 \right) -
\end{aligned}$$

$$-\text{Ra}_B(\pi^2 + a^2 + \alpha_0(\pi^2 - a^2)) \times \frac{(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_b}{\tilde{\sigma}^2}}{(\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\omega_i^2 L_b^2}{\tilde{\sigma}^2}}, \quad (6.45)$$

і частоту нейтральних коливань $\omega = \omega_i$, що задовольняє наступному рівнянню:

$$\kappa_0 \left(\frac{\omega}{\tilde{\sigma}}\right)^6 + \kappa_1 \left(\frac{\omega}{\tilde{\sigma}}\right)^4 + \kappa_2 \left(\frac{\omega}{\tilde{\sigma}}\right)^2 + \kappa_3 = 0, \quad (6.46)$$

де введені такі позначення:

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= q \cdot L_e^2 L_b^2, \quad p = \frac{(\pi^2 + a^2)}{a^2} ((\pi^2 + a^2)(D_a + \mathcal{V}_a^{-1}) + 1), \\ \kappa_1 &= p(\pi^2 + a^2)^2 \left(L_e^2 + L_b^2 + \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2} L_e^2 L_b^2 \right) + q L_e^2 L_b^2 - (r_n L_b^2 + r_B L_e^2), \\ q &= \frac{\text{QPr}}{\varepsilon \text{Pm}} \frac{\pi^2 (\pi^2 + a^2)^2 \tilde{\sigma} \text{Pr} - \text{Pm}}{a^2 \tilde{\sigma} \text{Pm}}, \quad r_n = \frac{\text{R}_n (\pi^2 + a^2) L_e}{\varepsilon \tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma} (\tilde{\sigma} - L_e) - \varepsilon N_A), \\ r_B &= \frac{\text{Ra}_B (\tilde{\sigma} - L_b)}{\tilde{\sigma} L_b} (\pi^2 + a^2 + \alpha_0 (\pi^2 - a^2)), \quad \kappa_2 = p(\pi^2 + a^2)^4 \left(1 + \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2} (L_e^2 + L_b^2) \right) + \\ &+ q(\pi^2 + a^2)^2 (L_e^2 + L_b^2) - (\pi^2 + a^2)^2 \left(r_n \left(1 + \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2} L_b^2 \right) + r_B \left(1 + \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2} L_e^2 \right) \right), \\ \kappa_3 &= p(\pi^2 + a^2)^5 \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2} + q(\pi^2 + a^2)^4 - \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pm}^2} (\pi^2 + a^2)^4 (r_n + r_B). \end{aligned}$$

Рівняння (6.46) є кубічним по ω^2 тому воно може призвести до більш ніж одного позитивного значення ω^2 при фіксованих значеннях параметрів $D_a, \mathcal{V}_a, \text{Q}, \text{Pr}, \text{Pm}, \tilde{\sigma}, \text{R}_n, L_e, N_A, L_b, \text{Ra}_B$ і α_0 . Якщо немає позитивних розв'язків рівняння (6.46), то коливальна нестійкість неможлива. Наше чисельне рішення рівняння (6.46) для аналізованого діапазону параметрів дає тільки негативне значення ω^2 , що вказує на неможливість коливального нейтрального рішення. Таким чином ми докладно розглянемо стаціонарний режим конвекції.

6.4.2.2 Стаціонарний режим конвекції

У стаціонарному стані $\omega_i = 0$, а дисперсійне співвідношення (6.43) зводиться до

$$\begin{aligned} \text{Ra}_{st} = \frac{1}{a^2} \left(D_a(\pi^2 + a^2)^3 + (\pi^2 + a^2)^2 + \frac{\pi^2 Q}{\varepsilon}(\pi^2 + a^2) \right) - \\ - \text{R}_n \left(\frac{L_e}{\varepsilon} + N_A \right) - \text{R}_b \text{PeG}(\pi^2 + a^2 + \alpha_0(\pi^2 - a^2)) \end{aligned} \quad (6.47)$$

Останній член (6.47) описує новий ефект впливу руху гіротактичних мікроорганізмів на теплову нестійкість. Таким чином, ми отримали новий спосіб управління магнітною конвекцією в пористому середовищі, насиченим нанорідиною, за допомогою біоконвекції гіротактичних мікроорганізмів. Перейдемо тепер до аналізу рівняння (6.47). Критичні хвильові числа для виникнення конвекції перебувають із умови

$$\left(\frac{\partial \text{Ra}_{st}}{\partial a} \right)_{a=a_{cr}} = 0 \quad (6.48)$$

Отримаємо рівняння визначення a_{cr} , підставивши вираз (6.47) у (6.48). Це рівняння виглядає досить громіздко, тому ми його не наводимо. Однак можна зробити висновок, що критичне хвильове число a_{cr} не залежить від параметрів нанорідини (R_n, L_e, N_A), а залежить від безрозмірних параметрів $\varepsilon, D_a, Q, \text{R}_b, \text{Pe}, \text{G}, \alpha_0$. Ми проведемо чисельне дослідження дисперсійного рівняння (6.47), використовуючи фізичні характеристики нанорідини Al_2O_3 -вода [24]:

$$\begin{aligned} \phi_0 = 0.001, \quad \rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}, \\ \rho_d = 4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \alpha_m = 2 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \beta = 3.4 \times 10^{-3} \text{ 1/K}, \\ D_B = 4 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}, \quad D_T = 6 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}, \\ (\rho c)_p = 3.1 \times 10^6 \text{ J/m}^3, \quad (\rho c)_f = 4 \times 10^6 \text{ J/m}^3, \\ T_d - T_u = 1\text{K}, \quad T_u = 300 \text{ K}, \quad L_e = 5000, \quad \rho_p = 4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Вищезазначені значення параметрів дають такі безрозмірні значення параметрів: $L_e = 5000$, $Pr = 5$ і $N_A = 5$. Концентраційні числа Релея-Дарсі та біоконвекційні числа Релея-Дарсі можна змінювати, варіюючи відстань між межами та об'ємну концентрацію наночастинок та мікроорганізмів. Для повноцінного чисельного аналізу необхідні розрахункові параметри гіротактичних мікроорганізмів, наприклад водорості *Chlamydomonas nivalis* [263]:

$$D_m = 5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}, \quad N_0 = 10^6 \text{ cm}^{-3}, \quad (\delta\rho)/\rho_0 = 5 \times 10^{-2},$$

$$\mathcal{V} = 5 \times 10^{-10} \text{ cm}^3, \quad W_c = 10^{-2} \text{ cm/s}. \quad (6.50)$$

Далі зафіксуємо значення параметра R_n як $R_n = 0.122$ і R_b як $R_b = 1.2 \times 10^5$. Значення параметрів Pe і G змінюються на околиці $Pe = 0.1$ та $G = 0.01$ [261]. Ексцентриситет клітини може змінюватися в межах $\alpha_0 \in [0, 1]$ [263]. Крім того, ми будемо проводити чисельне дослідження дисперсійного рівняння (6.47) з використанням фізичних характеристик нанорідин із металевих та напівпровідникових наночастинок. Янг та ін. [288] виявили, що фізичні характеристики нанорідин змінюються в залежності від форми, розміру та об'ємного відсотка наночастинок. Металеві нанорідини, як випливає з назви, є металевими наночастинками, дисперговані в базовій рідині. Оскільки металеві наночастинки мають високу теплопровідність, вони збільшують теплопровідність нанорідин. Розглянуто наночастинки металів (Cu і Ag), дисперговані у воді базової рідини, для аналізу стабільності металевих нанорідин. Для Cu-водної нанорідини значення параметрів нанорідини при $\delta\phi = \phi_u - \phi_d = 0.001$ (концентрація наночастинок) дорівнюють $R_n = 0.392$, $N_A = 0.5$, $L_e = 5000$, а для Ag-водної нанорідини: $R_n = 0.465$, $N_A = 0.5$, $L_e = 5000$ [226]. Електропровідність напівпровідникових матеріалів знаходиться приблизно між провідником та ізолятором. При $\phi_0^* = 0.001$ (концентрація наночастинок) значення параметрів нанорідини становлять $R_n = 0.159$, $N_A = 20$, $L_e = 5000$ для TiO_2 -водної нанорідини і $R_n = 0.0785$, $N_A = 17.5$, $L_e = 5000$ для SiO_2 -водної нанорідини [226].

6.4.3 Аналіз слабонелінійної стійкості

У попередньому підрозділі ми досліджували лінійний аналіз стабільності з використанням методу нормальних мод. Однак цей підхід не може дати інформацію про амплітуди конвекції і, отже, про швидкості тепло- та масопереносу. У цьому підрозділі ми розглядаємо ситуацію із двовимірними конвективними осередками, припускаючи, що всі фізичні змінні не залежать від y . У цьому випадку рівняння (6.29) і (6.35) для збурень швидкості та магнітного поля набудуть вигляду

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial b'_x}{\partial x} + \frac{\partial b'_z}{\partial z} = 0. \quad (6.51)$$

Ми можемо ввести дві скалярні функції, використовуючи рівняння (6.51), гідродинамічна функція струму ψ та магнітна функція Φ , для яких виконуються наступні співвідношення:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad b'_x = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad b'_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (6.52)$$

Тоді рівняння для збурених величин з урахуванням нелінійних ефектів набувають наступного вигляду для безрозмірних змінних

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{L_e} \nabla_1^2 \phi' + \frac{N_A}{L_e} \nabla_1^2 T' = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\psi, \phi')}{\partial(x, z)}, \quad (6.53)$$

$$\frac{1}{L_b} \nabla_1^2 N' - \frac{\text{Pe}}{L_b} \frac{\partial N'}{\partial z} - \text{PeG} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial N'}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\psi, N')}{\partial(x, z)} + \text{PeG} \zeta \frac{\partial N'}{\partial x} + \text{PeGN}' \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \psi - D_a \nabla_1^4 \psi + \text{Ra} \frac{\partial T'}{\partial x} - \text{R}_n \frac{\partial \phi'}{\partial x} - \frac{\text{R}_b}{L_b} \frac{\partial N'}{\partial x} - \frac{\text{QPr}}{\text{Pm}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla_1^2 \Phi = \\ - \frac{1}{\mathcal{V}_a} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_1^2 \psi - \frac{\text{QPr}}{\text{Pm}} \frac{\partial(\Phi, \nabla_1^2 \Phi)}{\partial(x, z)}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\nabla_1^2 T' + \frac{N_B}{L_e} \left(\frac{\partial T'}{\partial z} - \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) - \frac{2N_A N_B}{L_e} \frac{\partial T'}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial(\psi, T')}{\partial(x, z)} - \frac{N_B}{L_e} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial z} \frac{\partial T'}{\partial z} \right) - \frac{N_A N_B}{L_e} \left(\left(\frac{\partial T'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T'}{\partial z} \right)^2 \right), \quad (6.56)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\text{Pr}}{\text{Pm}} \nabla_1^2 \Phi = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\psi, \Phi)}{\partial(x, z)}, \quad (6.57)$$

де

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \zeta = \nabla_1^2 \psi + \alpha_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).$$

Граничні умови для вирішення системи рівнянь (6.53)-(6.57), мають вигляд

$$\psi = D^2 \psi = \Phi = D\Phi = \phi' = N' = T' = 0, \quad \text{при } z = (0, 1). \quad (6.58)$$

У цьому підрозділі ми використовуємо підхід Лоренца [162] до опису слабонелінійної стадії конвективної нестійкості і обмежимо наше дослідження Фур'є-аналізом мінімального порядку

$$\psi = A_{11}(t) \sin(kx) \sin(\pi z),$$

$$\Phi = B_{11}(t) \sin(kx) \cos(\pi z),$$

$$\phi' = C_{11}(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + C_{02}(t) \sin(2\pi z), \quad (6.59)$$

$$N' = D_{11}(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + D_{02}(t) \sin(2\pi z),$$

$$T' = E_{11}(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + E_{02}(t) \sin(2\pi z).$$

Тут ми не торкаємося питань, пов'язаних з хаотичним поведінкою отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (6.53)-(6.57), тому застосуємо слабонелінійну теорію [289, 290] до завдання визначення характеристик теплома-соперенесення: нестационарних чисел Нуссельта $\text{Nu}(t)$ та Шервуда $\text{Sh}(t)$.

Підставляючи (6.59) в (6.53)-(6.57) і враховуючи умову ортогональності, отримуємо еволюційні рівняння для амплітуд:

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial t} = -\mathcal{V}_a(1 + D_a(k^2 + \pi^2))A_{11} - \frac{k\text{Ra}\mathcal{V}_a}{k^2 + \pi^2}E_{11} +$$

$$+ \frac{kR_n \mathcal{V}_a}{k^2 + \pi^2} C_{11} + \frac{kR_b \mathcal{V}_a}{L_b(k^2 + \pi^2)} D_{11} - \frac{\pi QPr \mathcal{V}_a}{Pm} B_{11}, \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial t} = -\tilde{\sigma}(k^2 + \pi^2) \frac{Pr}{Pm} B_{11} + \frac{\pi \tilde{\sigma}}{\varepsilon} A_{11}, \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial C_{11}}{\partial t} = -\frac{\tilde{\sigma}}{L_e}(k^2 + \pi^2) C_{11} - \frac{N_A \tilde{\sigma}}{L_e}(k^2 + \pi^2) E_{11} + \frac{k \tilde{\sigma}}{\varepsilon} A_{11} - \frac{k \pi \tilde{\sigma}}{\varepsilon} A_{11} C_{02}, \quad (6.62)$$

$$\frac{\partial C_{02}}{\partial t} = -\frac{4\pi^2 \tilde{\sigma}}{L_e} C_{02} - \frac{N_A}{L_e} 4\pi^2 \tilde{\sigma} E_{02} + \frac{k \pi \tilde{\sigma}}{2\varepsilon} A_{11} C_{11}, \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{11}}{\partial t} &= -\frac{\tilde{\sigma}}{L_b}(k^2 + \pi^2) D_{11} - \frac{k \pi \tilde{\sigma}}{\varepsilon} A_{11} D_{02} + \\ &+ PeG \tilde{\sigma} k(k^2 + \pi^2 + \alpha_0(\pi^2 - k^2)) A_{11}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial D_{02}}{\partial t} = -\frac{4\pi^2 \tilde{\sigma}}{L_b} D_{02} + \frac{k \pi \tilde{\sigma}}{2\varepsilon} A_{11} D_{11}, \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial t} = -(k^2 + \pi^2) E_{11} - k A_{11} - \pi k A_{11} E_{02}, \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial E_{02}}{\partial t} = -4\pi^2 E_{02} + \frac{k \pi}{2} A_{11} E_{11}. \quad (6.67)$$

У фазовому просторі восьмимодові диференціальні рівняння (6.60)-(6.67) мають цікаву властивість, що вказує на дисипативність системи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \dot{A}_{11}}{\partial A_{11}} + \frac{\partial \dot{B}_{11}}{\partial B_{11}} + \frac{\partial \dot{C}_{11}}{\partial C_{11}} + \frac{\partial \dot{C}_{02}}{\partial C_{02}} + \frac{\partial \dot{D}_{11}}{\partial D_{11}} + \frac{\partial \dot{D}_{02}}{\partial D_{02}} + \frac{\partial \dot{E}_{11}}{\partial E_{11}} + \frac{\partial \dot{E}_{02}}{\partial E_{02}} = \\ &= -\mathcal{V}_a(1 + D_a(k^2 + \pi^2)) - \tilde{\sigma}(k^2 + \pi^2) \left(\frac{Pr}{Pm} + \frac{1}{L_e} + \frac{1}{L_b} \right) - \\ &- 4\pi^2 \tilde{\sigma} \left(\frac{1}{L_e} + \frac{1}{L_b} \right) - (k^2 + \pi^2) - 4\pi^2 < 0. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Вплив параметрів $R_n, R_b, L_e, N_A, L_b, \mathcal{V}_a$ на траєкторії полягає у притягненні їх до нульового положення, або до інших фіксованих точок. Для змінних, що залежать від часу, нелінійна система диференціальних рівнянь не може бути вирішена аналітично і має вирішуватися чисельно.

Визначення перенесення тепла та маси має вирішальне значення для дослідження конвекції рідини. Це пов'язано з тим, що початок конвекції зі збільшенням числа Релея легше спостерігати завдяки її впливу на перенесення тепла

і маси. Отже, потоки тепла та маси наночастинок є важливими для виявлення теплового та біоконвективного руху на його ранніх стадіях. Теплопередачу можна розрахувати та описати за допомогою числа Нуссельта:

$$\text{Nu}(t) = 1 + \frac{\int_0^{2\pi/k_{cr}} \frac{\partial T'}{\partial z} dx}{\int_0^{2\pi/k_{cr}} \frac{\partial T_b}{\partial z} dx} \Bigg|_{z=0}. \quad (6.69)$$

Згідно (6.59) та (6.69) отримуємо

$$\text{Nu}(t) = 1 - 2\pi E_{02}(t). \quad (6.70)$$

Аналогічно визначається число Шервуда для концентрації наночастинок $\text{Sh}(t)$:

$$\text{Sh}(t) = 1 + \frac{\int_0^{2\pi/k_{cr}} \frac{\partial \phi'}{\partial z} dx}{\int_0^{2\pi/k_{cr}} \frac{\partial \phi_b}{\partial z} dx} \Bigg|_{z=0} = 1 + 2\pi C_{02}(t). \quad (6.71)$$

6.4.4. Обговорення чисельних результатів

У цьому підрозділі ми використовуємо стандартні програми комп'ютерного середовища Maple для чисельного аналізу рівнянь (6.47), (6.60)-(6.67) та (6.70)-(6.71). Нелінійні рівняння (6.60)-(6.67) вирішувалися методом Рунге-Кутта-Фельберга 4-5-го порядку (*rfk45*) з початковими умовами: $A_{11}(0) = B_{11}(0) = C_{11}(0) = C_{02}(0) = D_{11}(0) = D_{02}(0) = E_{11}(0) = E_{02}(0) = 1$.

6.4.3.1 Стаціонарна МГД-біоконвекція в нанорідині Al_2O_3 -вода

Рис. 6.8 і 6.9 зображують вплив магнітного поля, параметра Дарсі, пористості, числа Льюїса Le , модифікованого коефіцієнта дифузії N_A , концентрації наночастинок, числа Релея R_n , модифікованого біоконвекційного числа Релея-Дарсі Ra_B та ексцентриситету клітини (або мікроорганізму) α_0 на стаціонарне

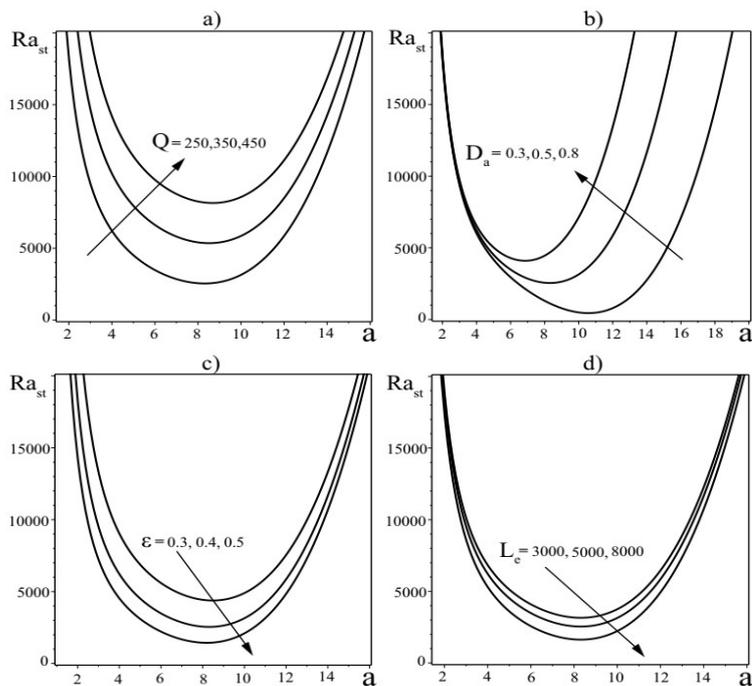


Рис. 6.8: Залежність числа Релея від хвильового числа a до різних варіацій параметрів: а) магнітного поля (числа Чандрасекара) Q ; б) числа Дарсі D_a ; с) пористості ε ; д) числа Льюїса L_e .

число Релея для нано рідини Al_2O_3 -вода. Фізичні властивості нанорідини Al_2O_3 -вода наведені в (6.49).

На Рис. 6.8а графік залежності числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа до різних значень аксіального магнітного поля (числа Чандрасекара). Це показує, що в міру збільшення значень осьового магнітного поля число Релея-Дарсі також збільшується для фіксованих значень $D_a = 0.5$, $\varepsilon = 0.4$, $L_e = 5000$, $N_A = 5$, $R_n = 0.122$, $Ra_B = 120$, $\alpha_0 = 0.4$. Як наслідок, аксіальне магнітне поле може стабілізувати стаціонарну конвекцію. Для різних значень числа Дарсі показано залежність числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа на Рис. 6.8б для фіксованих значень $Q = 250$, $\varepsilon = 0.4$, $L_e = 5000$, $N_A = 5$, $R_n = 0.122$, $Ra_B = 120$, $\alpha_0 = 0.4$. Це показує, що коли число Дарсі зростає, зростає число Релея-Дарсі. В результаті число Дарсі надає стабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію.

Для різних значень середньої пористості число Релея-Дарсі залежно від

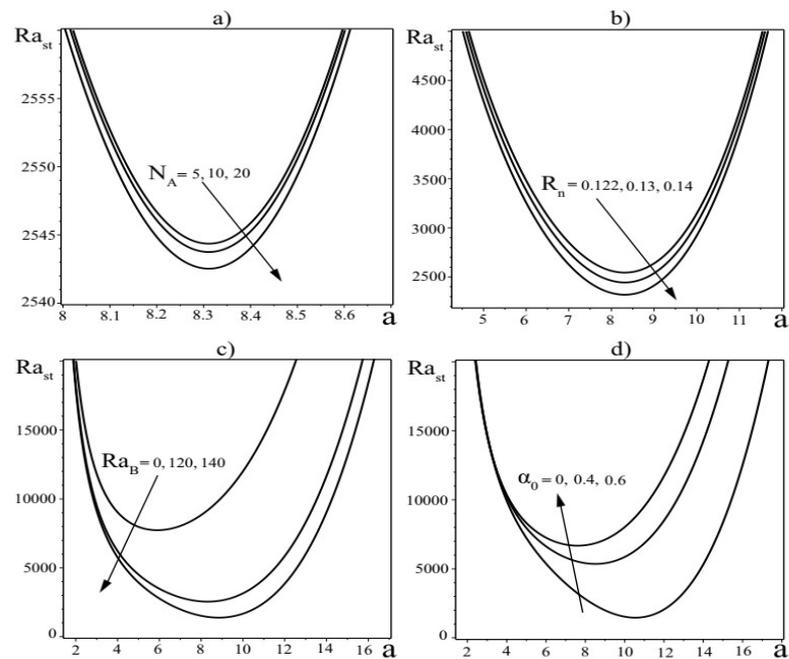


Рис. 6.9: Залежність числа Релея від хвильового числа a для різних варіацій параметрів: а) модифікованого коефіцієнта дифузії N_A ; б) концентраційного числа Релея-Дарсі R_n ; в) модифікованого біоконвективного числа Релея-Дарсі Ra_B ; д) ексцентриситету осередку α_0 .

безрозмірного хвильового числа представлено на Рис. 6.8с для фіксованих значень $D_a = 0.5$, $Q = 250$, $L_e = 5000$, $N_A = 5$, $R_n = 0.122$, $Ra_B = 120$, $\alpha_0 = 0.4$. Звідси видно, що зі збільшенням пористості значення Ra_c значно зменшуються. В результаті середня пористість має дестабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію.

На Рис. 6.8d, 6.9а, 6.9b відображено залежність числа Релея-Дарсі від безрозмірного хвильового числа для різних значень числа Льюїса, модифікованого коефіцієнта дифузії та концентраційного числа Релея. З графіків видно, що зі збільшенням числа Льюїса, модифікованого коефіцієнта дифузії і концентраційного числа Релея числа Релея-Дарсі зменшуються. Таким чином, параметри нано рідини надають дестабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію.

На Рис. 6.9с представлена залежність стаціонарного числа Релея-Дарсі Ra_{st} від безрозмірного хвильового числа a для різних варіацій модифікованого біоконвекційного числа Релея-Дарсі Ra_B при фіксованих значень $D_a =$

Q	D_a	ε	Ra_B	α_0	Ra_{st}^{min}	k_{cr}
250	0.5	0.4	120	0.4	2544.36	8.31
350	0.5	0.4	120	0.4	5355.59	8.51
450	0.5	0.4	120	0.4	8151.92	8.69
250	0.3	0.4	120	0.4	445.25	10.57
250	0.5	0.4	120	0.4	2544.36	8.31
250	0.8	0.4	120	0.4	4095.58	6.86
250	0.5	0.3	120	0.4	4379.85	8.48
250	0.5	0.4	120	0.4	2544.36	8.31
250	0.5	0.5	120	0.4	1436.89	8.19
250	0.5	0.4	0	No	7730.31	5.90
250	0.5	0.4	120	0.4	2544.36	8.31
250	0.5	0.4	140	0.4	1384.94	8.85
350	0.5	0.4	120	0	1459.64	5.32
350	0.5	0.4	120	0.4	5355.59	8.51
350	0.5	0.4	120	0.6	6675.31	7.60

Табл. 6.1: Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і критичні хвильові числа k_{cr} для нанорідини Al_2O_3 -вода при фіксованих параметрах $R_n = 0, 122$, $N_A = 5$, $L_e = 5000$.

0, 5, $Q = 250$, $\varepsilon = 0.4$, $L_e = 5000$, $N_A = 5$, $R_n = 0.122$, $\alpha_0 = 0.4$. Крива 1 відповідає випадку відсутності впливу біоконвекції мікроорганізмів $R_b = 0$. Аналогічна залежність виникає і у разі відсутності гіротаксу $G = 0$ (або $Ra_B = 0$).

Як видно із Рис. 6.9с, зі збільшенням параметра Ra_B поріг виникнення магнітної конвекції знижується. Це пов'язано з тим, що рух мікроорганізмів призводить до перерозподілу щільності нанорідини, зменшуючи процес теплообміну в нанорідині. Як наслідок, плавання клітини може дестабілізувати стаціонарну магнітоконвекцію.

На Рис. 6.9d показана залежність стаціонарного числа Релея-Дарсі Ra_{st} від безрозмірного хвильового числа a для різних значень ексцентриситету осередку α_0 при фіксованих значеннях $D_a = 0.5$, $Q = 350$, $\varepsilon = 0.4$, $L_e = 5000$, $N_A = 5$, $R_n = 0.122$, $Ra_B = 120$. Як видно з Рис. 6.9d, сферична форма мікроорганізмів дестабілізує вплив на початок магнітоконвекції.

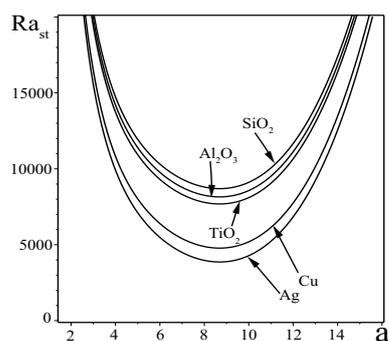


Рис. 6.10: Залежність числа Релея від хвильового числа a для оксидів металів (Al_2O_3), металевих (Cu , Ag) та напівпровідникові (TiO_2 , SiO_2) наночастинок у нанорідинах на водній основі ($D_a = 0.5$, $Q = 450$, $\varepsilon = 0.4$, $L_e = 5000$, $\text{Ra}_B = 120$, $\alpha_0 = 0.4$).

Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і відповідні їм критичні хвильові числа a_{cr} при різних значеннях Q , D_a , ε , Ra_B і α_0 для нанорідини Al_2O_3 -вода показані в таблиці 6.1.

Зауважимо, що результати таблиці 6.1 були отримані чисельно з використанням (6.46) для нанорідини Al_2O_3 -вода і добре узгоджуються з графічними результатами на Рис. 6.8a, 6.8b, 6.8c та Рис. 6.9c, 6.9d. У граничному випадку, коли мікроорганізми відсутні ($\text{Ra}_B = 0$), результати таблиці 6.1 добре узгоджуються з результатами статті [225].

6.4.3.2 Стаціонарна МГД-біоконвекція у нанорідинах $\text{Cu}(\text{Ag})$ -вода та $\text{TiO}_2(\text{SiO}_2)$ -вода

Розглянемо графічну інтерпретацію чисельних розрахунків для металевих (Cu , Ag) та напівпровідникових (TiO_2 та SiO_2) нанорідин. Досліджуємо вплив різних типів нанорідин на стаціонарну конвекцію, фіксуючи значення параметрів Da , \mathcal{V}_a , Q , Pr , Pm , $\tilde{\sigma}$, Le , Lb , Ra_B та α_0 . Теплове число Релея-Дарсі Ra_{st} показано залежно від хвильового числа для кількох видів нанорідин на Рис. 6.10. З Рис. 6.10 видно, що нанорідина SiO_2 -вода виявляє найбільшу стабільність у порівнянні з Al_2O_3 -вода, TiO_2 -вода, Cu -вода та Ag -вода. Причиною такої поведінки є не лише різна густина наночастинок, а й різні теплофізичні властивості.

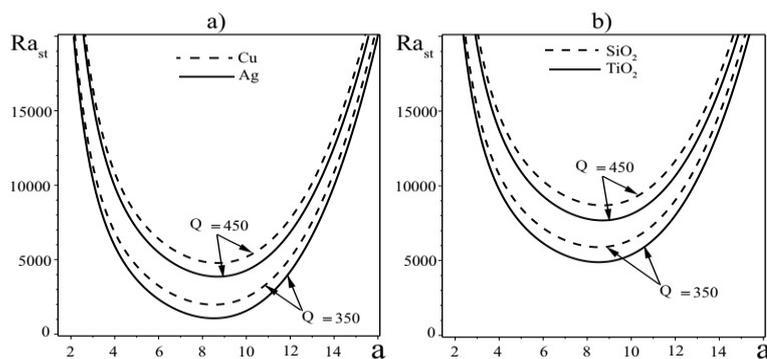


Рис. 6.11: Вплив числа Чандрасекара Q на стаціонарну конвективну нестійкість різних нанорідин: а) $Cu(Ag)$ -вода; б) $TiO_2(SiO_2)$ -вода ($D_a = 0.5, \varepsilon = 0.4, L_e = 5000, Ra_B = 120, \alpha_0 = 0.4$).

Можна зробити висновок, що наночастинки напівпровідників і оксидів металів мають більш дестабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію, ніж металеві наночастинки.

Розглянемо тепер вплив різних параметрів нанорідини на теплову нестабільність системи за одночасного впливу магнітного поля. Рис. 6.11а та 6.11б ілюструють вплив числа Чандрасекара на число Релея-Дарсі для металевих (Cu, Ag) та напівпровідникових (TiO_2, SiO_2) нанорідин на водній основі. Ці графіки показують, що зі збільшенням значення параметра Чандрасекара Q значення теплового числа Релея-Дарсі для обох форм конвекції збільшуються, що вказує на вплив магнітного поля, що стабілізує. Криві впливу числа Чандрасекара для нанорідини Cu -вода знаходяться вище кривих для нанорідини Ag -вода, що вказує на те, що нанорідина Cu -вода більше стабільна, ніж нанорідина Ag -вода. При розгляді ситуації з напівпровідниковими нанорідинами (Рис. 6.11б) виявляється, що SiO_2 -наночастинки покращують стабільність нанорідини більшою мірою, ніж TiO_2 -наночастинки. Таким чином, з цих графіків випливає, що наночастинки з напівпровідників уповільнюють виникнення конвекції порівняно з наночастинками металів під дією магнітного поля. На графіках Рис. 6.12а та 6.12б показано вплив числа Дарсі на систему. Значення Ra_{st} збільшується зі збільшенням числа Дарсі, отже, число Дарсі D_a затримує

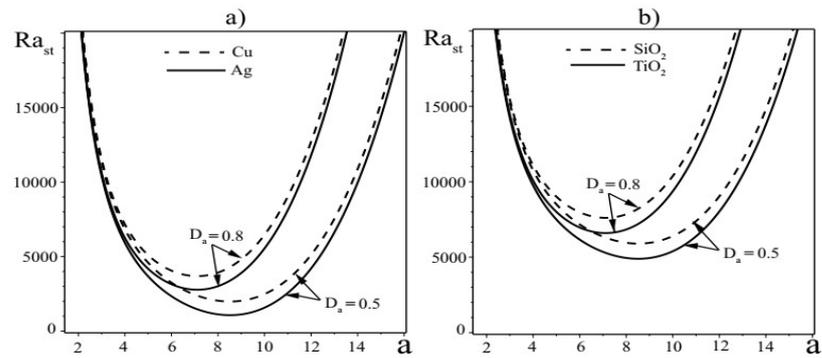


Рис. 6.12: Вплив числа Дарсі D_a на стаціонарну конвективну нестійкість для різних нанорідин: а) –Cu(Ag)-вода; б) $\text{TiO}_2(\text{SiO}_2)$ -вода ($Q = 350, \varepsilon = 0.4, L_e = 5000, \text{Ra}_B = 120, \alpha_0 = 0.4$).

настання нестійкості. За рахунок збільшення числа Дарсі нанорідини Cu-вода

Q	D_a	ε	Ra_B	α_0	а) Ra_{st}^{min}	а) k_{cr}	б) Ra_{st}^{min}	б) k_{cr}
350	0.5	0.4	120	0.4	1981.01	8.51	1068.47	8.51
450	0.5	0.4	120	0.4	4777.34	8.69	3864.80	8.69
350	0.5	0.4	120	0.4	1981.01	8.51	1068.47	8.51
350	0.8	0.4	120	0.4	3686.96	7.11	2774.42	7.11
350	0.5	0.3	120	0.4	3608.82	8.71	2392.12	8.71
350	0.5	0.5	120	0.4	994.92	8.37	264.88	8.37
350	0.5	0.3	0	No	9406.12	6.61	8189.42	6.61
350	0.5	0.3	120	0.4	3608.82	8.71	2392.12	8.71
450	0.5	0.3	120	0	3157.93	10.73	1941.22	10.73
450	0.5	0.3	120	0.6	8817.45	8.12	7600.75	8.12

Табл. 6.2: Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і критичні хвильові числа k_{cr} для металевих нанорідин (Cu-вода, Ag-вода) при фіксованих параметрах $L_e = 5000$, а) $R_n|_{Cu} = 0.392, N_A|_{Cu} = 0.5$, б) $R_n|_{Ag} = 0.465, N_A|_{Ag} = 0.5$.

і SiO_2 -вода виявляють більш високу стабільність, ніж Ag-вода та TiO_2 -вода нанорідини.

Далі досліджуємо вплив пористості на систему. Рис. 6.13а і 6.13б видно, що збільшення пористості ε стимулює виникнення нестійкості. Причому критичні числа Релея-Дарсі для неметалевих нанорідин вище, ніж металевих нанорідин. Рис. 6.14а та 6.14б ілюструють вплив модифікованого числа Релея-Дарсі біо-

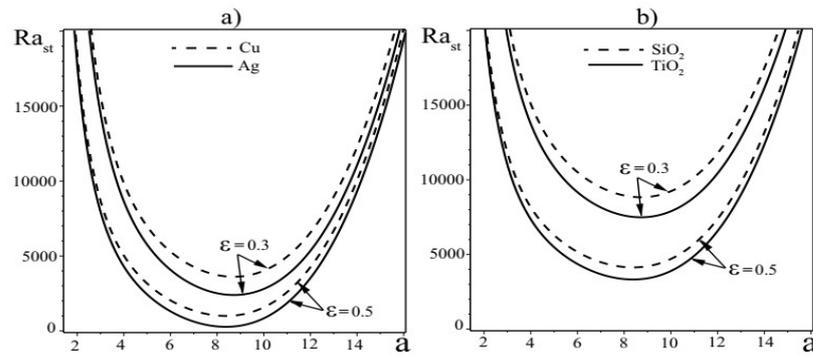


Рис. 6.13: Вплив пористості ε на стаціонарну конвективну нестійкість для різних нанорідин: а) Cu(Ag)-вода; б) $\text{TiO}_2(\text{SiO}_2)$ -вода ($D_a = 0.5$, $Q = 350$, $L_e = 5000$, $\text{Ra}_B = 120\alpha_0 = 0.4$).

конвекції Ra_B на стаціонарну конвективну нестійкість для металевих та напівпровідникових нанорідин. Можна помітити, що плавання осередку може дестабілізувати стаціонарну магнітоконвекцію, оскільки зі збільшенням параметра Ra_B поріг виникнення магнітної конвекції зменшується. Як видно із рис. 6.14, неметалеві наночастинки затримують виникнення конвекції навіть за відсутності біоконвекції $\text{Ra}_B = 0$ (або руху мікроорганізмів). Нарешті, вивчимо вплив впливу ексцентриситету осередку α_0 на теплову стабільність. Рис. 6.15а і 6.15б видно, що сферична форма мікроорганізмів надає дестабілізуючий вплив початку магнітоконвекції як металевих, так неметалевих наночастинок. Однак неметалічні наночастинки все ж таки більш уповільнюють розвиток стаціонарної конвекції. Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і відповідні їм критичні хвильові числа a_{cr} для різних значень Q , D_a , ε , Ra_B і α_0 для металевих нанорідин (Cu-вода, Ag-вода) показані в таблиці 6.2. Зверніть увагу, що результати таблиці 6.2 були отримані чисельно з використанням (6.46) металевих нанорідин (Cu-вода, Ag-вода) і добре узгоджуються з графічними результатами Рис. 6.11а, 6.12а, 6.13а, 6.14а, 6.15а. Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і відповідні їм критичні хвильові числа a_{cr} для різних значень Q , D_a , ε , Ra_B і α_0 для напівпровідникових нанорідин (TiO_2 -вода, SiO_2 -вода) показані в таблиці 6.3. Зауважимо, що чисельні результати в таблиці 6.3 для напівпровідникових нанорідин (TiO_2 -вода, SiO_2 -вода)

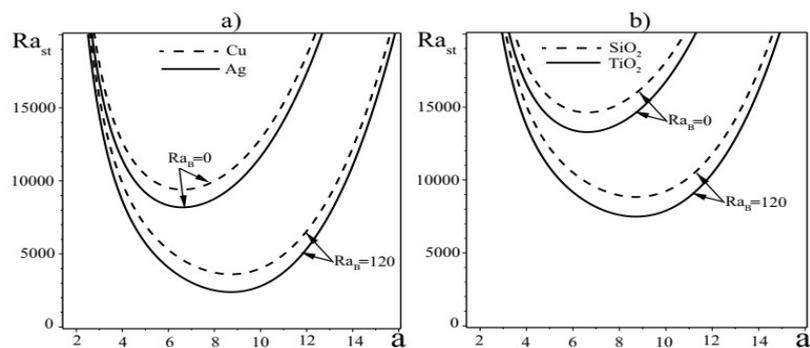


Рис. 6.14: Вплив модифікованого числа біоконвекції Релея-Дарсі Ra_B на стаціонарну конвективну нестійкість для різних нанорідин: а) $\text{Cu}(\text{Ag})$ -вода; б) $\text{TiO}_2(\text{SiO}_2)$ -вода ($D_a = 0.5$, $Q = 350$, $\varepsilon = 0.3$, $L_e = 5000$, $\alpha_0 = 0.4$).

добре узгоджуються з графічними результатами на Рис. 6.11b, 6.12b, 6.13b,

Q	D_a	ε	Ra_B	α_0	а) Ra_{st}^{min}	а) k_{cr}	б) Ra_{st}^{min}	б) k_{cr}
350	0.5	0.4	120	0.4	4890.52	8.51	5898.58	8.51
450	0.5	0.4	120	0.4	7686.86	8.69	8694.91	8.69
350	0.5	0.4	120	0.4	4890.52	8.51	5898.58	8.51
350	0.8	0.4	120	0.4	6596.47	7.11	7604.53	7.11
350	0.5	0.3	120	0.4	7489.17	8.71	8832.65	8.71
350	0.5	0.5	120	0.4	3321.94	8.37	4128.75	8.37
350	0.5	0.3	0	No	13286.47	6.61	14629.94	6.61
350	0.5	0.3	120	0.4	7489.17	8.71	8832.64	8.71
450	0.5	0.3	120	0	7038.28	10.73	8381.75	10.73
450	0.5	0.3	120	0.6	12697.80	8.12	14041.28	8.12

Табл. 6.3: Критичні числа Релея Ra_{st}^{min} і критичні хвильові числа k_{cr} для напівпровідникових нанорідин (TiO_2 -вода, SiO_2 -вода) при фіксованих параметрах $L_e = 5000$, а) $R_n|_{\text{TiO}_2} = 0.159$, $N_A|_{\text{TiO}_2} = 20$, б) $R_n|_{\text{SiO}_2} = 0.0785$, $N_A|_{\text{SiO}_2} = 17.5$.

6.14b, 6.15b. У разі відсутності мікроорганізмів ($Ra_B = 0$) результати таблиць 6.2 і 6.3 добре узгоджуються з результатами статті [253]. Примітно, що нанорідина мідь-вода більш стабільна, ніж нанорідина срібло-вода (див. Рис. 6.11a, 6.12a, 6.13a, 6.14a, 6.15a), а нанорідина оксид кремнію-вода більш стабільна, ніж нанорідина оксид титану-вода (див. Рис. 6.11b, 6.12b, 6.13b, 6.14b, 6.15b). Ці висновки відповідають результатам статті [226].

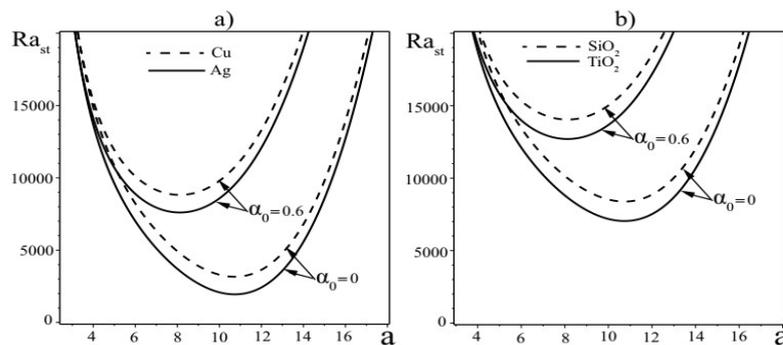


Рис. 6.15: Вплив ексцентриситету мікроорганізму α_0 на стаціонарну конвективну нестійкість для різних нанорідин: а) Cu(Ag)-вода; б) $\text{TiO}_2(\text{SiO}_2)$ -вода ($D_a = 0.5$, $Q = 450$, $\varepsilon = 0.3$, $L_e = 5000$, $\text{Ra}_B = 120$).

6.4.3.3 Чисельні результати для чисел Нуссельта $\text{Nu}(t)$ і Шервуда $\text{Sh}(t)$ Шервуда

Приступимо до дослідження нелінійних рівнянь (6.60)-(6.67). Для цього ми використовуємо метод Рунге-Кутти. Конвективний тепло- і масоперенос розраховувався щодо чисел Нуссельта $\text{Nu}(t)$ і Шервуда $\text{Sh}(t)$. Результати представлені на Рис. 6.16-6.17. Передбачається, що вихідне значення чисел Нуссельта та Шервуда дорівнює 1 за $t = 0$. Графіки показують, що з малому часу виникають коливання значень чисел Нуссельта і Шервуда. Ця поведінка вказує на нестаціонарність швидкості тепломасоперенесення в системі теплової конвекції. З часом ці значення наближаються до сталого стану, що еквівалентно стадії стаціонарної конвекції. Рис. 6.16а-6.16h показано тимчасову поведінку теплового числа Нуссельта $\text{Nu}(t)$ при різних значеннях магнітного поля (число Чандрасекара Q), числа Дарсі D_a , концентраційного числа Релея-Дарсі R_n , біоконвективного числа Релея-Дарсі R_b , модифікованого числа гіротаксису ReG , параметра геометричної форми мікроорганізмів α_0 та біоконвективного числа Льюїса L_b . Помічено, що зі зростанням Q , D_a , R_n , α_0 і L_b (див. Рис. 6.16а, 6.16с, 6.16d, 6.16g і 6.16h), значення $\text{Nu}(t)$ трохи збільшилися, що свідчить про збільшення теплопереноса. Ці результати добре узгоджуються з роботою [284].

Згідно рис. 6.16b, 6.16e і 6.16f, коли пористість ε , число Релея-Дарсі біокон-

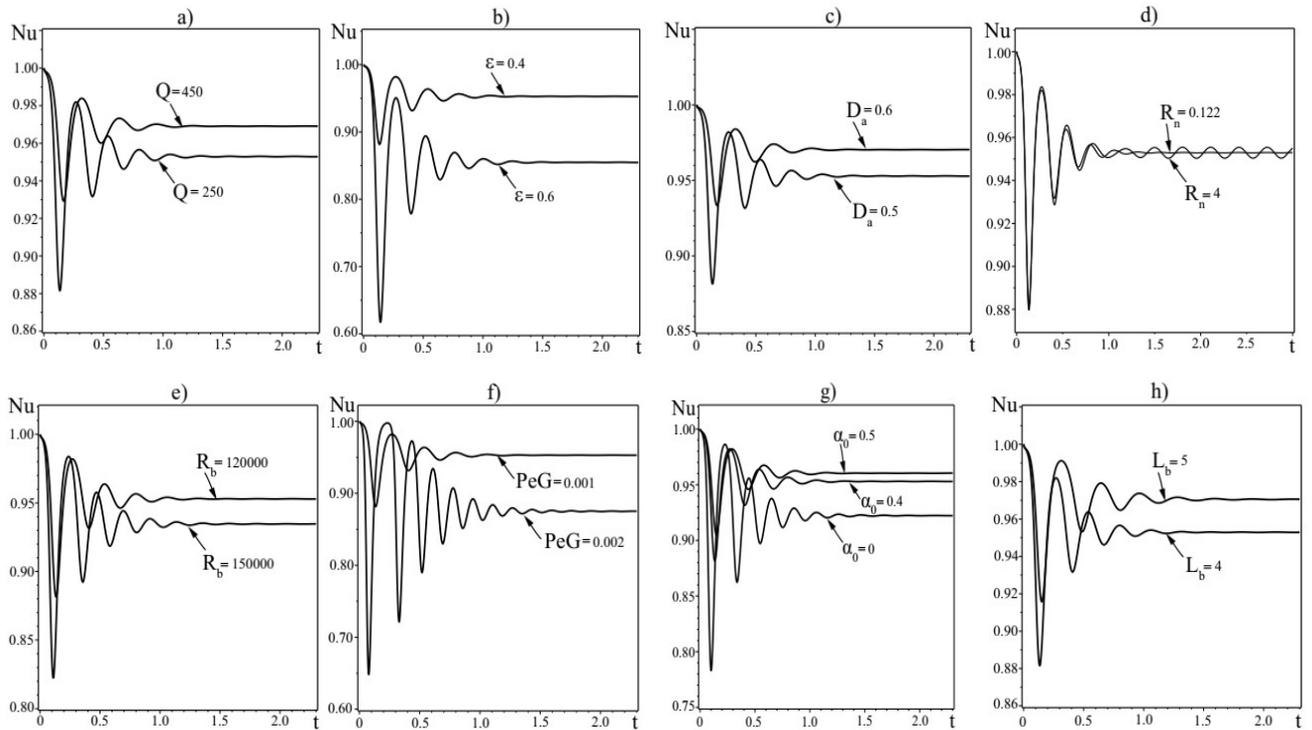


Рис. 6.16: Зміна теплового числа Нуссельта $Nu(t)$ з часом t для різних значень: а) числа Чандрасекара Q ; б) пористості ε ; в) числа Дарсі D_a ; д) концентраційного числа Релея-Дарсі R_{a_n} ; е) біоконвективного числа Релея-Дарсі R_b ; ф) модифікованого числа гіротаксису PeG ; г) параметра геометричної форми мікроорганізмів α_0 ; г) біоконвективного числа Льюїса L_b .

векції R_b і модифіковане число гіротаксису PeG збільшуються, $Nu(t)$ зменшується, що вказує на затримку процесу тепловіддачі. Рис. 6.17а-6.17д і 6.18а-6.17д зображують тимчасову поведінку числа Шервуда $Sh(t)$ при різних значеннях магнітного поля (число Чандрасекара Q), пористості ε , числа Дарсі D_a , концентраційного числа Релея-Дарсі R_n , біоконвективного числа Релея-Дарсі R_b , модифікованого числа гіротаксису PeG , параметра геометричної форми мікроорганізмів α_0 та біоконвективного числа Льюїса L_b . Як показано на Рис. 6.17а-6.17д і 6.18а-6.18д стаціонарний рівень масопереносу наночастинок досягається за менший час, ніж теплоперенесення. Число Шервуда змінюється з невеликими інтервалами в залежності від параметрів $(Q, \varepsilon, D_a, R_n, R_b, PeG, \alpha_0, L_b)$.

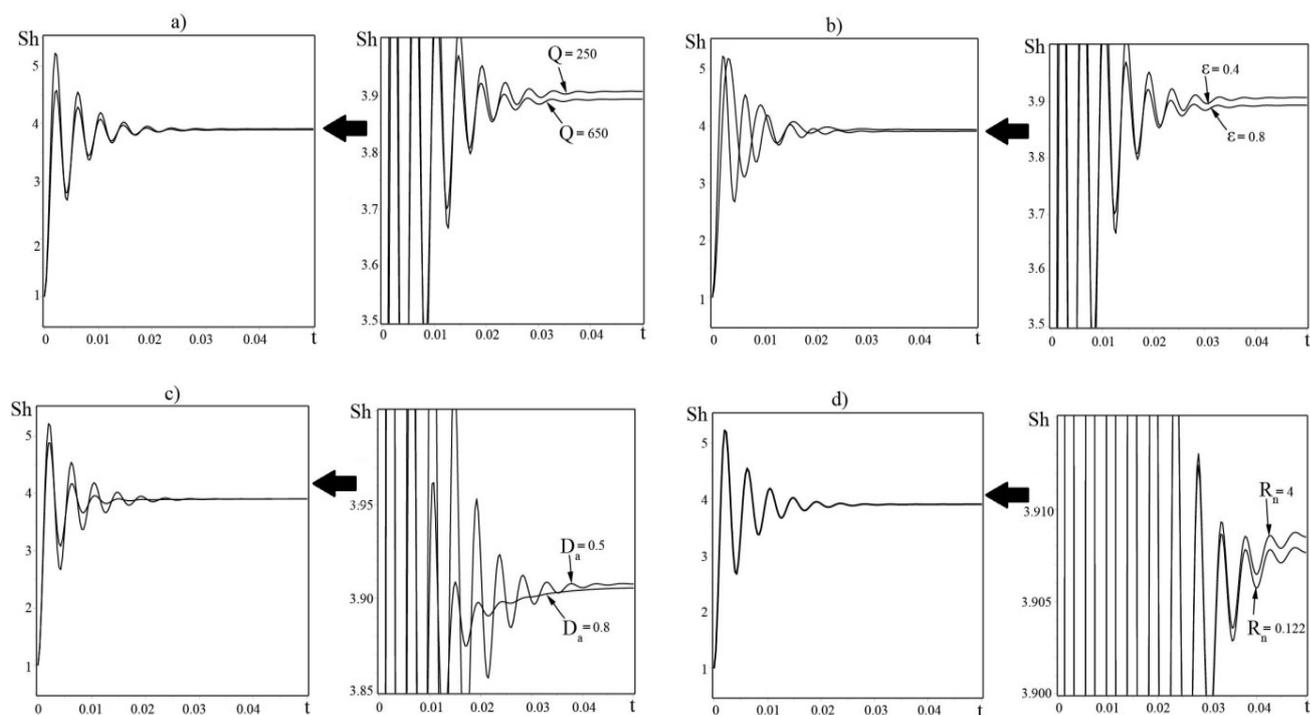


Рис. 6.17: Зміна числа Шервуда $Sh(t)$ з часом t для різних значень: а) числа Chandrasekara Q ; б) пористості ε ; в) числа Дарсі D_a ; д) концентраційного числа Релея-Дарсі Ra_n .

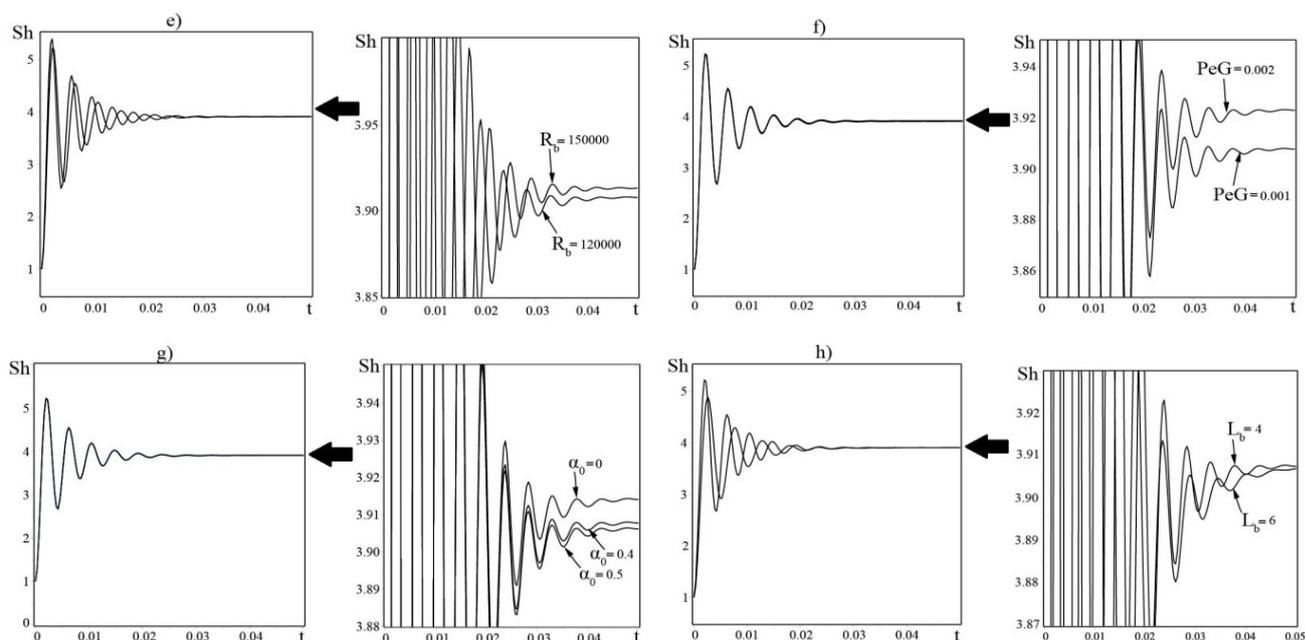


Рис. 6.18: Зміна числа Шервуда $Sh(t)$ з часом t для різних значень: е) біоконвективного числа Релея-Дарсі R_b ; ф) модифікованого числа гіротаксису PeG ; г) параметра геометричної форми мікроорганізмів α_0 ; h) біоконвективного числа Льюїса L_b .

6.5 Біо-термальна конвекція у шарі пористого середовища з урахуванням модуляції гравітаційного поля та сили Коріоліса

У цьому розділі розглядається вплив модуляції гравітаційного поля та сили Коріоліса на біо-термальну конвекцію у шарі пористого середовища. Урахування сили Коріоліса є важливим для систем, що обертаються, зокрема у геофізичних та астрофізичних застосуваннях. Описано нелінійну взаємодію гіротактичних мікроорганізмів із конвективними рухами у шарі пористого середовища, який перебуває під впливом обертання та модуляції гравітаційного поля, відповідно до результатів роботи [282].

6.5.1 Постановка проблеми та нелінійне рівняння Гінзбурга-Ландау

Постановка і геометрія задачі подібна до тієї, що в розділі 6.2, за єдиної відмінності – врахування ефекту обертання. Щоб врахувати ефект обертання, до правій частині рівняння (6.10) слід додати силу Коріоліса: $\mathbf{F}_K = \frac{2\rho_0}{\varepsilon}[\mathbf{V}_D \times \mathbf{\Omega}]$. Тоді основні рівняння для збурень (ϕ, T, n, v) , записані в матричній формі, набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \nabla_{\perp}^2 - D_a \nabla_{\perp}^4 & f_m \text{Ra} \frac{\partial}{\partial x} & -f_m \frac{\text{Rb}}{\text{L}_b} \frac{\partial}{\partial x} & -\sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -\nabla_{\perp}^2 & 0 & 0 \\ \text{PeG}_0(2 - f_m)n_0 \hat{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\text{Pe}}{\text{L}_b} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{\text{L}_b} \nabla_{\perp}^2 & 0 \\ \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 1 + D_a \nabla_{\perp}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ T \\ n \\ v \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon^2}{\nu_a} \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla_{\perp}^2 \psi \\ -\varepsilon^2 \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, z)} \\ -\frac{\varepsilon^2}{\bar{\sigma}} \frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{\partial(\psi, n)}{\partial(x, z)} \\ -\frac{\varepsilon^2}{\nu_a} \frac{\partial v}{\partial \tau} \end{bmatrix}. \tag{6.72}
 \end{aligned}$$

Рівняння (6.72) доповнюються граничними умовами (6.15). Застосуємо теорію збурень, розвинену в розділі 4.2 для біотермічної конвекції, до системи рівнянь (6.72). Тоді в першому порядку асимптотичного розкладання за малим параметром ϵ^1 отримуємо результат лінійної теорії біо-термальної конвекції, що обертається. Для цього випадку вираз для критичного числа Релея Ra_c має такий вигляд:

$$\text{Ra}_c = \frac{(\pi^2 + k_c^2)^2(1 + D_a(\pi^2 + k_c^2))}{k_c^2} + \frac{\pi^2(\pi^2 + k_c^2)\text{Ta}}{k_c^2(1 + D_a(\pi^2 + k_c^2))} - \text{PeG}_0 n_0 \text{R}_b((1 - \alpha_0)k_c^2 + (1 + \alpha_0)\pi^2). \quad (6.73)$$

За відсутності мікроорганізмів ($n_0 = 0$) вираз для критичного числа Релея відповідає результатам моделі Дарсі-Брінкмана для пористого середовища, що обертається [130]. У третьому порядку асимптотичного розкладання отримано рівняння Гінзбурга-Ландау, яке описує стаціонарний режим нелінійної біо-термальної конвекції, у такому вигляді:

$$A_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - A_2(\tau)A + A_3 A^3 = 0, \quad (6.74)$$

де

$$A_1 = \frac{a^2}{\mathcal{V}_a} + \frac{k_c^2}{a^4} \text{Ra}_c - \frac{\pi^2 \text{Ta}}{\mathcal{V}_a(1 + a^2 D_a)^2} + \frac{k_c^2 \text{R}_b}{a^4 \tilde{\sigma}} \Pi, \quad A_2(\tau) = \frac{k_c^2}{a^2} \text{Ra}_c \left(\frac{\text{Ra}_2}{\text{Ra}_c} + \delta \cos(\Omega\tau) \right),$$

$$A_3 = \frac{k_c^4}{8a^4} (\text{Ra}_c + \text{R}_b \text{L}_b \Pi). \quad (6.75)$$

Рівняння Гінзбурга-Ландау (6.74) є неавтономним рівнянням, і знаходження аналітичного рішення неможливе. Тому воно вирішувалося чисельно в комп'ютерному середовищі Mathematica. Для цього необхідно задати початкову умову $A(0) = A_0$, що є обраною початковою амплітудою конвекції.

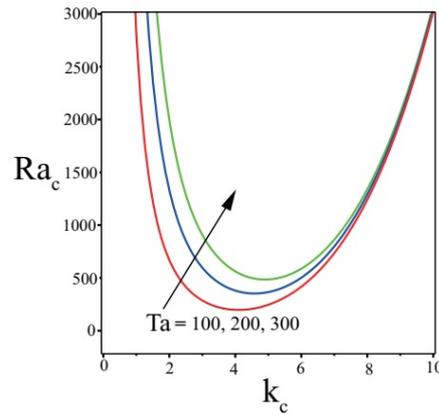


Рис. 6.19: Графіки залежності стаціонарного числа Релея Ra_c від хвильового числа k_c для різних значень числа Тейлора.

6.5.2 Обговорення чисельних результатів

Криві стійкості, що ілюструють зв'язок між стаціонарним числом Релея і безрозмірним хвильовим числом k_c в лінійній теорії (6.73), аналогічні представленим на Рис. 6.3. Доповнимо Рис. 6.3 графіком, що ілюструє вплив ефекту обертання.

На Рис. 6.19 стаціонарне число Релея Ra_c побудоване залежно від безрозмірного хвильового числа k_c для різних значень числа Тейлора: $Ta = (100, 200, 300)$. Фіксовані параметри на цьому графіку: $D_a = 0.3$, $Ra_B = 15$ та $\alpha_0 = 0.4$. Графік демонструє, що зі збільшенням числа Тейлора мінімальне число Релея також збільшується. Це свідчить про те, що вищі числа Тейлора мають стабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію, затримуючи її початок.

Фіксуєючи значення параметра обертання на рівні $Ta = 100$, ми отримали аналогічні результати, як і в розділі 5.2. Аналіз таких параметрів, як \mathcal{V}_a , Ra_B , α_0 , Ω і δ , дає цінну інформацію про їх вплив на процес конвекції. Маніпулюючи цими параметрами, можна посилювати або регулювати теплопередачу в пористому середовищі, насиченому ньютонівською рідиною, що містить гірота-кисичні мікроорганізми. Ці результати можуть бути використані для покращення методів лікування, що включають маніпулювання мікроорганізмами з терапев-

тичною метою. Наприклад, у системах доставки ліків, що використовують мікроорганізми як носії, краще розуміння їхньої поведінки в різних гравітаційних умовах може підвищити ефективність доставки ліків.

6.6 Шестивимірна модель Лоренца для біо-термальної конвекції в шарі пористого середовища під впливом гравітаційної модуляції, обертання та внутрішнього нагріву

У цьому розділі розвинено слабонелінійну теорію біо-термальної конвекції в пористому шарі під впливом гравітаційної модуляції, обертання та внутрішнього нагріву. Нелінійний аналіз біо-термальної конвекції побудований на поданні збурень у вигляді усіченого ряду Фур'є, що містить гармоніку нелінійної взаємодії. У результаті було побудовано шестивимірну модель типу рівнянь Лоренца, за допомогою якої досліджено поведінку тепло-масопереносу. Результати, подані в цьому розділі, були отримані в роботі [283].

6.6.1 Опис проблеми та математичної моделі

Постановка та геометрія задачі аналогічні тій, що представлена в розділі 6.5, за винятком того, що ми додатково враховуємо внутрішнє джерело тепла. З огляду на це, робимо важливе припущення, що внутрішнє нагрівання не впливає на гіротактичну активність та життєздатність клітин. Основні рівняння та граничні умови для опису такого типу біо-термальної конвекції наведені в розділі 6.2. У рівняння руху (6.10) необхідно включити силу Коріоліса: $\mathbf{F}_K = \frac{2\rho_0}{\varepsilon}[\mathbf{V}_D \times \boldsymbol{\Omega}]$, а в рівняння теплового балансу (6.11) – внутрішнє джерело тепла: $Q(T - T_0)$, Q - внутрішнє джерело тепла. Профілі температури основного стану $T_b(z)$ та концентрації мікроорганізмів $n_b(z)$ отримані шляхом розв'язання

таких рівнянь:

$$\frac{d^2 T_b}{dz^2} + R_i T_b(z) = 0, \quad \frac{dn_b}{dz} = n_b(z) \text{Pe}. \quad (6.76)$$

З (6.76) ми можемо отримати розподіл температури $T_b(z)$ і щільності $n_b(z)$:

$$T_b(z) = \frac{\sin(\sqrt{R_i}(1-z))}{\sin(\sqrt{R_i})}, \quad n_b(z) = n_b(0) \exp(z \text{Pe}). \quad (6.77)$$

Якщо джерело тепла $R_i \rightarrow 0$ відсутнє, то стаціонарний температурний профіль має вигляд $T_b(z) = 1 - z$; $n_b(0)$ є значення щільності чисел у нижній частині шару. Константа $n_b(0)$ може бути визначена таким чином:

$$n_b(0) = \frac{\langle n \rangle \text{Pe}}{\exp(\text{Pe}) - 1}, \quad \langle n \rangle = \int_0^1 n_b(z) dz. \quad (6.78)$$

Далі ми отримали рівняння для збурень у їхній нелінійній формі

$$\left(\frac{1}{\mathcal{V}_a} \frac{\partial}{\partial t} + 1 - D_a \nabla_{\perp}^2 \right) \nabla_{\perp}^2 \psi = \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial v}{\partial z} + f_m \frac{R_b}{L_b} \frac{\partial n}{\partial x} - f_m \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6.79)$$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{V}_a} \frac{\partial}{\partial t} + 1 - D_a \nabla_{\perp}^2 \right) v = -\sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (6.80)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dT_b}{dz} - \nabla_{\perp}^2 T - R_i T = -\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, z)}, \quad (6.81)$$

$$\text{PeG}_0(2 - f_m)n_0 \hat{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dn_b}{dz} + \frac{\text{Pe}}{L_b} \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{1}{L_b} \nabla_{\perp}^2 n = -\frac{1}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, n)}{\partial(x, z)}, \quad (6.82)$$

$$\hat{\alpha} = \nabla_{\perp}^2 + \alpha_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Ці рівняння доповнюються ідеальними граничними умовами для функції струму, температури та концентрації мікроорганізмів:

$$\psi = \nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{dv}{dz} = T = n = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad \text{and} \quad z = 1. \quad (6.83)$$

Для нелінійної системи, що описується рівняннями (6.79)-(6.82), використовуємо розкладання рядів Фур'є для фізичних змінних:

$$\psi = A_{11}(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \quad v = V_{11}(t) \sin(kx) \cos(\pi z),$$

$$\begin{aligned}
T &= B_{11}(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + B_{02}(t) \sin(2\pi z), \\
n &= C_{11}(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + C_{02}(t) \sin(2\pi z).
\end{aligned}
\tag{6.84}$$

Після підстановки (6.84) у рівняння (6.79)–(6.82) та врахування умови ортогональності виходять рівняння еволюції для амплітуд:

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1 + D_a a^2}{a^2} A_{11} + \frac{\pi \sqrt{\text{Ta}}}{a^4} V_{11} - f_m \frac{k \text{Ra}}{a^2} B_{11} + f_m \frac{k \text{R}_b}{a^2 L_b} C_{11},
\tag{6.85}$$

$$\frac{\partial V_{11}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1 + D_a a^2}{a^2} V_{11} - \frac{\pi \sqrt{\text{Ta}}}{a^4} A_{11}
\tag{6.86}$$

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{(1-b)}{\mathcal{V}_a} B_{11} - \frac{k \theta_0}{a^2 \mathcal{V}_a} A_{11} - \frac{\pi k}{a^2 \mathcal{V}_a} A_{11} B_{02},
\tag{6.87}$$

$$\frac{\partial B_{02}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\gamma - b}{\mathcal{V}_a} B_{02} + \frac{k \pi}{2a^2 \mathcal{V}_a} A_{11} B_{11},
\tag{6.88}$$

$$\frac{\partial C_{11}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\tilde{\sigma}}{L_b \mathcal{V}_a} C_{11} - \frac{k \pi \tilde{\sigma}}{a^2 \mathcal{V}_a} A_{11} C_{02} + \frac{\tilde{\sigma}}{a^2 \mathcal{V}_a} ((2 - f_m) \gamma_1 + \gamma_2) k A_{11},
\tag{6.89}$$

$$\frac{\partial C_{02}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\gamma \tilde{\sigma}}{\mathcal{V}_a L_b} C_{02} + \frac{k \pi \tilde{\sigma}}{2a^2 \mathcal{V}_a} A_{11} C_{11},
\tag{6.90}$$

де $a = \sqrt{k^2 + \pi^2}$ – повне хвильове число, а $\tilde{t} = (a^2 \mathcal{V}_a) t$ – редукований час, $\gamma = 4\pi^2/a^2$, $b = \text{R}_i/a^2$, $(\omega_g/a^2 \mathcal{V}_a) \tilde{t} = \tilde{\omega}_g \tilde{t}$. Систему автономних звичайних диференціальних рівнянь можна вирішити лише чисельно. Однак у стаціонарному стані рівняння (6.85)–(6.90) мають точні розв'язки:

$$\frac{A_{11}^2}{8} = -\frac{w_1}{2} + \sqrt{\frac{w_1^2}{4} - w_2},
\tag{6.91}$$

$$\begin{aligned}
V_{11} &= -\frac{\pi \sqrt{\text{Ta}}}{1 + D_a a^2} A_{11}, \quad B_{11} = -\frac{2k \theta_0 (4\pi^2 - \text{R}_i) A_{11}}{2(a^2 - \text{R}_i)(4\pi^2 - \text{R}_i) + k^2 \pi^2 A_{11}^2}, \\
B_{02} &= -\frac{\pi k^2 \theta_0 A_{11}^2}{2(a^2 - \text{R}_i)(4\pi^2 - \text{R}_i) + k^2 \pi^2 A_{11}^2}, \quad C_{11} = \frac{8(\gamma_1 + \gamma_2) L_b k A_{11}}{8a^2 + k^2 L_b^2 A_{11}^2}, \\
C_{02} &= \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) L_b^2 k^2 A_{11}^2}{\pi(8a^2 + k^2 L_b^2 A_{11}^2)},
\end{aligned}$$

де

$$w_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_1 \xi_2} - \frac{1}{r \xi_1} \left(\text{R}_b(\gamma_1 + \gamma_2) + \frac{\text{Ra} \theta_0}{1 - \frac{\text{R}_i}{a^2}} \right), \quad \xi_1 = \frac{k^2 L_b^2}{a^2}, \quad \xi_2 = \frac{4\pi^2 k^2}{(a^2 - \text{R}_i)(4\pi^2 - \text{R}_i)},$$

$$r = \frac{a^4(1 + D_a a^2)}{k^2} + \frac{\pi^2 a^2 \text{Ta}}{k^2(1 + D_a a^2)}, \quad \theta_0 = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 - \text{R}_i},$$

$$\gamma_1 = \frac{4\pi^2 \langle n \rangle}{4\pi^2 + \text{Pe}^2} [\text{PeG}_0((1 - \alpha_0)k^2 + (1 + \alpha_0)\pi^2)], \quad \gamma_2 = \frac{4\pi^2 \langle n \rangle \text{Pe}}{4\pi^2 + \text{Pe}^2},$$

$$w_2 = -\frac{(\text{Ra} - \text{Ra}_c)\theta_0}{r \xi_1 \xi_2 \left(1 - \frac{\text{R}_i}{a^2}\right)}.$$

Вираз для амплітуди A_{11} отримується з розв'язку квадратного рівняння вигляду

$$\left(\frac{A_{11}^2}{8}\right)^2 + w_1 \left(\frac{A_{11}^2}{8}\right) + w_2 = 0. \quad (6.92)$$

Важливо відзначити, що амплітуда функції струму повинна бути дійсною. Тому в розв'язку (6.91) враховується лише позитивний знак перед радикалом. Якщо ми визначимо значення A_{11} , ми зможемо розрахувати тепло- та масоперенос у стаціонарному стані. Для малої амплітуди ($A_{11} \rightarrow 0$) рівняння (6.92) перетворюється на дисперсійне рівняння для лінійної стаціонарної біо-термальності конвекції:

$$\text{Ra}_c = \left[\frac{a^4(1 + D_a a^2)}{k_c^2} + \frac{\pi^2 a^2 \text{Ta}}{k_c^2(1 + D_a a^2)} - \text{R}_b(\gamma_1 + \gamma_2) \right] \left[\frac{4\pi^2}{(4\pi^2 - \text{R}_i) \left(1 - \frac{\text{R}_i}{a^2}\right)} \right]^{-1}. \quad (6.93)$$

При малих чисел Пекле вираз (6.93) збігається з результатом, вперше отриманим Коппом і Яновським [279] за відсутності обертання ($\text{Ta} = 0$) та внутрішнього джерела тепла ($\text{R}_i = 0$). На Рис. 6.20 показано залежність стаціонарного числа Релея Ra_c від безрозмірного хвильового числа k_c для різних значень внутрішнього параметра нагрівання R_i . Фіксовані параметри на цьому графіку: $D_a = 0.3$, $\text{Ta} = 100$, $\text{Ra}_B = 3000$, $\text{Pe} = 0.1$ та $\alpha_0 = 0.4$. З графіка видно, що збільшення значення R_i чинить дестабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію.

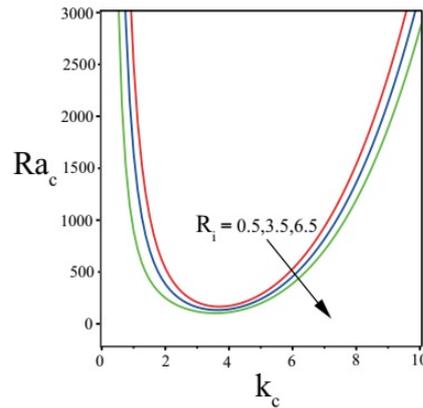


Рис. 6.20: Графіки залежності стаціонарного числа Релея Ra_c від хвильового числа k_c для різних значень R_i .

кцію. Рівняння (6.85)-(6.90) можна переписати в компактнішій формі у вигляді шестивимірної моделі Лоренца:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -\mathcal{D}X - TV + f_m(RY - Rb\tilde{Y}) \\ \dot{Y} = \nu_a^{-1}(-(1-b)Y + X - XZ) \\ \dot{Z} = \nu_a^{-1}(-(\gamma-b)Z + XY) \\ \dot{\tilde{Y}} = \tilde{\sigma}\nu_a^{-1}(-L_b^{-1}\tilde{Y} - ((2-f_m)\gamma_1 + \gamma_2)X - X\tilde{Z}) \\ \dot{\tilde{Z}} = \tilde{\sigma}\nu_a^{-1}(-\gamma L_b^{-1}\tilde{Z} + X\tilde{Y}) \\ \dot{V} = -\mathcal{D}V + \sqrt{\text{Ta}}X \end{array} \right. \quad (6.94)$$

де

$$\begin{aligned} A_{11}(\tilde{t}) &= -\frac{a^2\sqrt{2}}{k\pi}X(\tilde{t}), & B_{11}(\tilde{t}) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}Y(\tilde{t}), & C_{11}(\tilde{t}) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\tilde{Y}(\tilde{t}), \\ B_{02}(\tilde{t}) &= -\frac{Z(\tilde{t})}{\pi}, & C_{02}(\tilde{t}) &= -\frac{\tilde{Z}(\tilde{t})}{\pi}, & V_{11}(\tilde{t}) &= \frac{\sqrt{2}}{k}V(\tilde{t}), \\ \mathcal{D} &= \frac{1 + D_a a^2}{a^2}, & R &= \frac{k^2 Ra}{a^6}, & Rb &= \frac{k^2 R_b}{a^6 L_b}, & T &= \frac{\pi^2 \sqrt{\text{Ta}}}{a^6}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Рівняння (6.94) у випадку звичайної рідини зводяться до фундаментальної моделі Лоренца [162]. Модель (6.94) є шестивимірною: змінні X і V представляють поля швидкості, Y і Z описують зміни температури вздовж горизонтального та вертикального напрямків, а змінні \tilde{Y} і \tilde{Z} відповідають за зміни концентрації

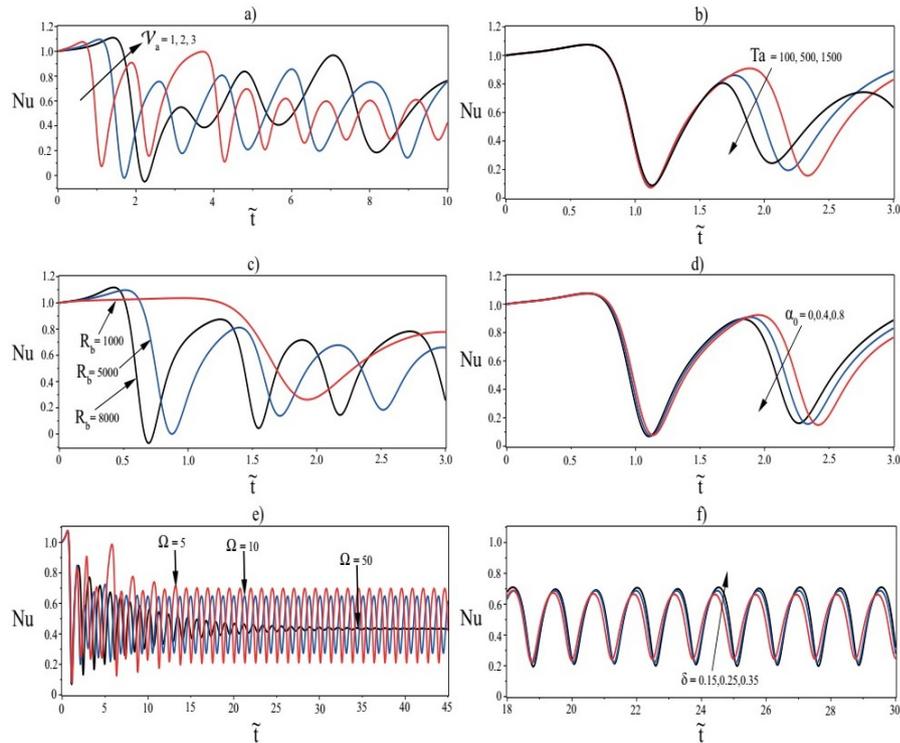


Рис. 6.21: Залежність числа Нуссельта Nu від часу \tilde{t} для варіацій: а) \mathcal{V}_a , б) Ta , в) R_b , д) α_0 , е) Ω , ф) δ .

мікроорганізмів у цих же напрямках. Зазначимо, що рівняння (6.94) шестивимірної моделі Лоренца інваріантні щодо перетворення $(X, Y, Z, \tilde{Y}, \tilde{Z}, V) \rightarrow (-X, -Y, Z, -\tilde{Y}, \tilde{Z}, -V)$.

Визначення тепло- і масопереносу мікроорганізмів є важливим для біотермальної конвекції рідин. Початок конвекції із зростанням числа Рейля легше спостерігати через його вплив на тепло- та масоперенос. Тому теплові та масові потоки мікроорганізмів відіграють ключову роль у визначенні термо- та біоконвективного руху на його ранніх стадіях. Теплоперенос можна розрахувати та описати за допомогою числа Нуссельта Nu :

$$Nu(\tilde{t}) = 1 + \frac{\int_0^{2\pi/k_{cr}} \frac{\partial T}{\partial z} dx}{\int_0^{2\pi/k_{cr}} \frac{\partial T_b}{\partial z} dx} \Bigg|_{z=0} = 1 - 2\pi B_{02}(\tilde{t}) \left(\sqrt{R_i} \text{ctg}(R_i) \right). \quad (6.96)$$

Аналогічно до (6.96) визначаємо кількісну характеристику масопереносу – чи-

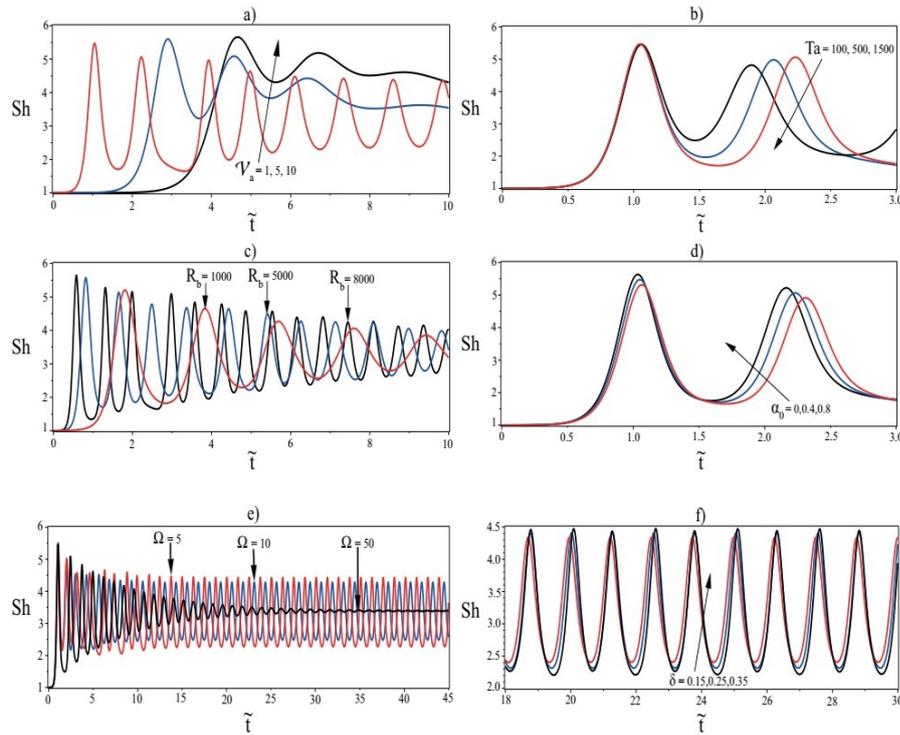


Рис. 6.22: Залежність числа Шервуда Sh від часу \tilde{t} для варіацій: а) \mathcal{V}_a , б) Ta ,
 с) R_b , д) α_0 , е) Ω , ф) δ .

сло Шервуда Sh , що описує концентрацію мікроорганізмів:

$$Sh(\tilde{t}) = 1 + \left[\frac{\int_0^{2\pi/k_{cr}} \frac{\partial n}{\partial z} dx}{\int_0^{2\pi/k_{cr}} \frac{\partial n_b}{\partial z} dx} \right]_{z=0} = 1 + 2\pi C_{02}(\tilde{t}) \left(\frac{e^{Pe} - 1}{\langle n \rangle Pe^2} \right). \quad (6.97)$$

6.6.2 Обговорення чисельних результатів

Для визначення коефіцієнтів тепло- та масообміну, Nu і Sh , використовуємо чисельні розв'язки нелінійної системи рівнянь (6.85)–(6.90). Виберемо амплітуду модуляції $\delta = 0.1$ і початкові умови для амплітуд збурень: $A_{11}(0) = B_{11}(0) = C_{11}(0) = B_{02}(0) = C_{02}(0) = V_{11}(0) = 0.5$.

Як показано на Рис. 6.21а та 6.22а, збільшення числа Вадасза \mathcal{V}_a сприяє інтенсифікації тепло- та масопереносу на коротких часових інтервалах. Збільшення \mathcal{V}_a відповідає зростанню відношення кінематичної в'язкості до температуропровідності рідини. Відтак, підвищення числа Вадасза призводить до зро-

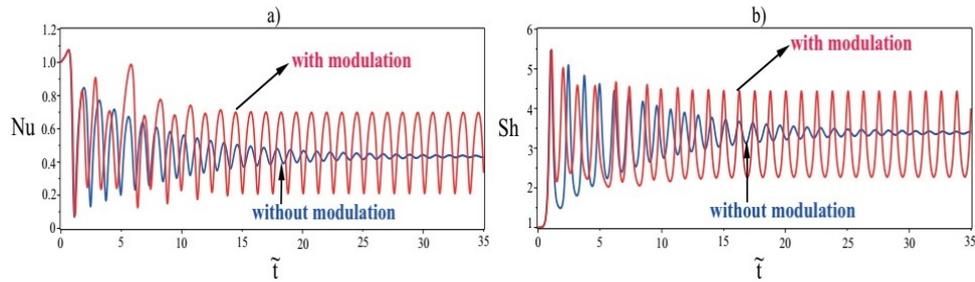


Рис. 6.23: а) Залежність числа Нуссельта $Nu(\tilde{t})$ від безрозмірного часу \tilde{t} за відсутності модуляції гравітаційного поля ($\delta = 0$) та за наявності модуляції з параметрами $\delta = 0.3, \Omega = 5$. б) Залежність числа Шервуда $Sh(\tilde{t})$ від безрозмірного часу \tilde{t} за відсутності модуляції гравітаційного поля ($\delta = 0$) та за наявності модуляції з параметрами $\delta = 0.3, \Omega = 5$.

стання швидкості тепло- та масопереносу в системі. Згідно з Рис. 6.21b і 6.22b, зі збільшенням числа Тейлора Ta значення чисел Нуссельта Nu та Шервуда Sh зменшуються, що спричиняє уповільнення тепло-масопереносу та, як наслідок, стабілізацію системи.

На Рис. 6.21c і 6.22c проілюстровано вплив зростання біоконвективного числа Релея R_b на тепло- і масоперенесення. Його збільшення може бути зумовлене зростанням проникності пористого середовища або зниженням в'язкості рідини. В обох випадках це призводить до прискорення конвективних потоків, що посилює перенесення тепла та маси мікроорганізмів і, відповідно, дестабілізує систему. У результаті числа Нуссельта та Шервуда зростають на коротких часових інтервалах, як показано на Рис. 6.21a та 6.22a.

Графіки на Рис. 6.21d та 6.22d демонструють значний вплив форми мікроорганізмів на тепло- та масообмін у системі, що проявляється у часовій зміні чисел Нуссельта та Шервуда. Це явище можна пояснити через вплив форми мікроорганізмів на їхній рух і взаємодію з рідиною. У випадку сферичних мікроорганізмів ($\alpha_0 = 0$), представлених червоною кривою на Рис. 6.21d і 6.22d, симетрична форма забезпечує відносно безперешкодний рух у рідині. Це сприяє ефективнішій теплопередачі всередині системи, що зумовлює підвищення

швидкості конвективного теплообміну та, відповідно, збільшення числа Нуссельта. Натомість для мікроорганізмів несферичної або неправильної форми ($\alpha_0 = 0.4, 0.8$), представлених синіми та чорними кривими. Асиметрія у формі може змінювати режим течії, що, своєю чергою, ускладнює процес конвективного теплообміну. Як наслідок, швидкість теплопередачі та число Нуссельта знижуються, тоді як швидкість масоперенесення і число Шервуда, навпаки, зростають порівняно з випадком сферичних мікроорганізмів.

На Рис. 6.21e та 6.22e проілюстровано вплив частоти модуляції Ω на тепло- та масоперенесення в системі. Видно, що при нижчих значеннях Ω , зокрема за низької частоти ($\Omega = 5$), швидкість тепло- та масоперенесення є вищою порівняно з випадками вищих частот модуляції ($\Omega = 10$ і $\Omega = 50$). Це свідчить про те, що нижчі частоти модуляції сприяють ефективнішій передачі тепла в системі. На Рис. 6.21f та 6.22f проілюстровано вплив амплітуди модуляції δ на тепло- та масоперенесення в системі. Графіки демонструють, що зі збільшенням амплітуди модуляції інтенсивність тепло- та масоперенесення зростає, що вказує на посилення конвективних процесів у середовищі.

На Рис. 6.23a та 6.23b представлено порівняння модульованих і немодульованих систем. У немодульованій системі спостерігається різке зростання чисел Нуссельта та Шервуда на початковому етапі при малих значеннях \tilde{t} , після чого відбувається стабілізація на вищому рівні Nu і Sh . Натомість у модульованій системі тепло- та масоперенесення демонструє коливальну поведінку, що зумовлено періодичним впливом гравітаційної модуляції.

6.7 Вплив термомодуляції на слабонелінійну біо-термальну конвекцію з термотактичними мікроорганізмами

В цьому розділі викладено результати роботи [284], у якій було розвинено слабонелінійну теорію стаціонарної біо-термальної конвекції в шарі ньютонівської рідини, що містить термотактичні мікроорганізми під впливом теплової

модуляції. Термотактичні мікроорганізми реагують на зміни температури, а регулювання температурних градієнтів за допомогою теплової модуляції дозволяє маніпулювати їхнім рухом. Метою роботи [284] був аналіз процесів тепломасопереносу в рамках побудованої слабонелінійної теорії біо-термальності конвекції з урахуванням температурної модуляції на верхній і нижній межах рідинного шару.

6.7.1 Постановка задачі та основні рівняння

Розглянемо потік рідини у двох вимірах, який містить термотактичні мікроорганізми, наприклад *Dictyostelium slugs* або *Caenorhabditis elegans*. Нехай шар рідини має товщину h і нагрівається зверху. Температури на нижній та верхній межах позначаються як T_d та T_u відповідно. Мікроорганізми демонструють позитивний таксис, тобто вони прагнуть рухатися у бік вищих температур із середньою швидкістю плавання клітин \mathbf{W}_c . Періодична за часом теплова модуляція на межах шару рідини змінюється за гармонічним законом:

$$\begin{aligned} T_d &= T_0 - \frac{\Delta T}{2} [1 - \epsilon^2 \delta \cos(\omega t)] \quad \text{at } z = 0 \\ T_u &= T_0 + \frac{\Delta T}{2} [1 + \epsilon^2 \delta \cos(\omega t + \varphi)] \quad \text{at } z = h, \end{aligned} \quad (6.98)$$

Основні рівняння наведеної вище моделі мають такий вигляд:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.99)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{e}g(1 - \beta(T - T_0)) - \mathbf{e}g \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \mathcal{V}n, \quad (6.100)$$

$$(\rho c)_f \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = k_m \nabla^2 T, \quad (6.101)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div} (n(\mathbf{u} + \mathbf{W}_c) - D_m \nabla n), \quad (6.102)$$

$$\mathbf{W}_c = W_0 \nabla T, \quad (6.103)$$

де W_c – середня спрямована швидкість плавання мікроорганізмів, W_0 – константа, що характеризує потужність термотактичного руху мікроорганізмів (розмірністю $\text{m}^2\text{s}^{-1}\text{K}^{-1}$), тобто коефіцієнт дифузії мікроорганізмів на 1 градус температури. Температура і нульовий потік на верхній та нижній стінках визначаються так:

$$w = 0, \quad T = T_d, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (6.104)$$

$$w = 0, \quad T = T_u, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \text{at } z = h, \quad (6.105)$$

де $\mathbf{J} = n(\mathbf{u} + \mathbf{W}_c) - D_m \nabla n$ is the flux of microorganisms. Вважаємо, що в основному (незбуреному) стані рідина перебуває в спокої. Тоді фізичні величини в цьому стані визначаються такими виразами:

$$\mathbf{u}_b = 0, \quad P = P_b(z, t), \quad T = T_b(z, t) = T_s(z) + \epsilon^2 \delta T_1(z, t), \quad n = n_b(z), \quad (6.106)$$

де T_s – стаціонарне температурне поле, а T_1 – температурне поле коливальної частини. Стаціонарні профілі температури та концентрації знаходяться шляхом вирішення наступних рівнянь

$$\frac{d^2 T_s}{dz^2} = 0, \quad n_b W_0 \frac{dT_s}{dz} - D_m \frac{dn_b}{dz} = 0, \quad (6.107)$$

$$T_s(z) = T_0 - \frac{\Delta T}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right), \quad n_b(z) = \frac{\langle n \rangle \text{Pe}}{e^{\text{Pe}} - 1} e^{z \text{Pe}},$$

де $\langle n \rangle = \int_0^1 n_b(z) dz$ – середня концентрація, $\text{Pe} = \frac{W_0 \Delta T}{D_m}$ – число Пекле біоконвекції. Розв'язок для коливної частини температури знаходиться з розв'язку рівняння теплового балансу і має такий вигляд:

$$T_1(z, t) = \text{Re} \left[[A(\lambda) e^{\frac{\lambda z}{h}} + A(-\lambda) e^{-\frac{\lambda z}{h}}] e^{-i\omega t} \right] = f_1(z, t),$$

$$A(\lambda) = \frac{\Delta T}{2} \frac{e^{-i\phi} - e^{-\lambda}}{e^\lambda - e^{-\lambda}}, \quad A(-\lambda) = \frac{\Delta T}{2} \frac{e^{-i\phi} - e^\lambda}{e^{-\lambda} - e^\lambda}, \quad \lambda = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega h^2}{2\alpha_m}}. \quad (6.108)$$

Вважаємо, що параметр Pe малий, а $n_b(z)$ можна апроксимувати як $\frac{dn_b(z)}{dz} \approx \langle n \rangle \text{Pe}$. Змінюючи масштаб часу, $\tau = \epsilon^2 t$, систему рівнянь (6.99)-(6.103) можна

виразити в матричній формі таким чином:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\nabla_{\perp}^4 & -\text{Ra} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\text{R}_b}{L_b} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\nabla_{\perp}^2 & 0 \\ -\langle n \rangle \text{Pe} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\text{Pe}}{L_b} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{L_b} \nabla_{\perp}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ T \\ n \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon^2}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial(\psi, \nabla_{\perp}^2 \psi)}{\partial(x, z)} \\ -\epsilon^2 \frac{\partial T}{\partial \tau} + \epsilon^2 \delta f_2(z, \tau) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, z)} \\ -\epsilon^2 \frac{\partial n}{\partial \tau} - \epsilon^2 \delta f_2(z, \tau) \frac{\text{Pe}}{L_b} \frac{\partial n}{\partial z} - \epsilon^2 \delta f_3(z, \tau) \frac{\text{Pe}}{L_b} n + \frac{\partial(\psi, n)}{\partial(x, z)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.109)$$

Розглянемо вільні від напруги та ізотермічні граничні умови:

$$\psi = \nabla_{\perp}^2 \psi = T = n = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad \text{and} \quad z = 1. \quad (6.110)$$

При вивченні конвективної нестійкості слабонелінійний аналіз використовується для опису поведінки нелінійної системи, схильної до малих збурень або відхилень від стану рівноваги. Основна мета цього аналізу – зрозуміти, як у системі розвиваються збурення кінцевої амплітуди. Нелінійне рівняння Гінзбурга–Ландау є математичною моделлю, що широко застосовується для опису поведінки системи поблизу критичної точки. У першому порядку асимптотичного розкладу за малим параметром відтворюється результат лінійної теорії:

$$\text{Ra}_c = \frac{a^6}{k_c^2} - \text{R}_B \text{Pe}, \quad \text{R}_B = \text{R}_b \langle n \rangle. \quad (6.111)$$

Якщо в рідині немає мікроорганізмів ($\text{R}_B = 0$) або число Пекле $\text{Pe} \rightarrow 0$ (для статичних мікроорганізмів), то з (6.111) випливає класичний результат Чандрасекара [40] для вільно-вільних границь. При нагріванні шару рідини зверху: $T_d^{(s)} < T_u^{(s)}$ число Релея набуває негативних значень. З (6.111) можна легко отримати вираз для біоконвективного числа Релея у вигляді:

$$\text{R}_B = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{(\pi^2 + k_c^2)^3}{k_c^2} - \text{Ra}_c \right). \quad (6.112)$$

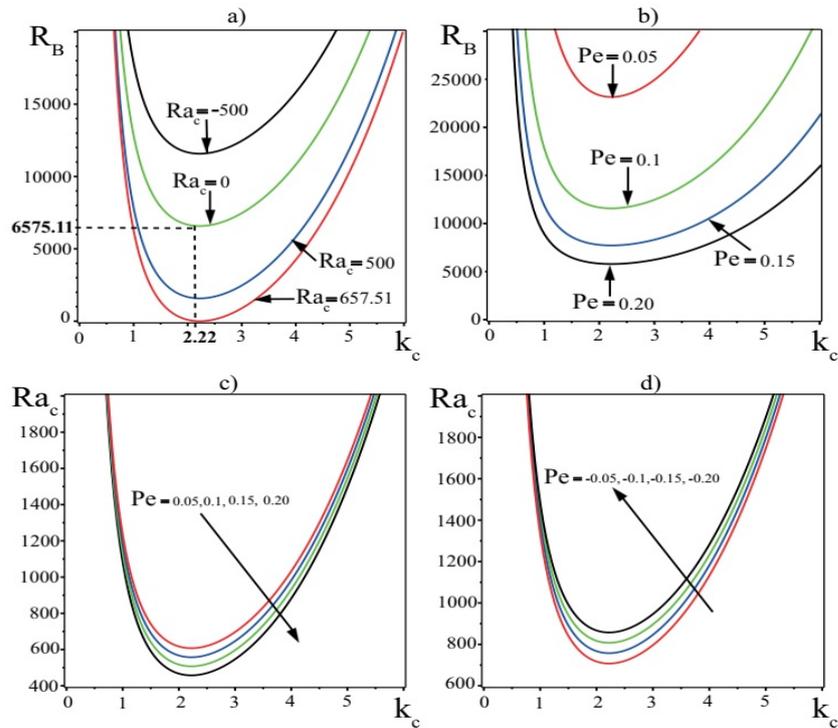


Рис. 6.24: Криві стійкості: а) $R_B(k_c)$ при різних Ra_c , $Pe = 0.1$; б) $R_B(k_c)$ при різних Pe , $R_B = 1000$; в) $Ra_c(k_c)$ при $Pe > 0$, $R_B = 1000$; г) $Ra_c(k_c)$ при $Pe < 0$, $R_B = 1000$.

На Рис. 6.24а показано набір кривих стійкості, отриманих шляхом варіювання R_B і k_c при збереженні $Pe = 0.1$ постійним. Графік ділить простір параметрів (R_B, k_c) на дві області: область вище кривої стійкості нестабільна, а область нижче – стабільна. Це дає уявлення про зв'язок між параметрами та стійкістю системи. Криві стійкості біоконвективного числа Релея R_B залежно від хвильових чисел k_c при різних значеннях Pe показано на Рис. 6.24б для відсутності ефекту подвійної дифузії $Ra_c = 0$. Цей графік показує, що підвищення рухливості мікроорганізмів може зменшити поріг біоконвективної нестійкості. Внаслідок розвитку біоконвективної нестійкості утворюються структури типу осередків Бенара. Розглянемо вплив швидкості термотаксису на біотермічну нестійкість, коли важливі ефекти подвійної дифузії. Знак перед другим членом (6.111) залежить від характеру термотаксису мікроорганізмів, тобто від знака числа Пекле. У разі збільшення позитивних значень числа Пекле $Pe > 0$ (позитивний термотаксис), як показано на Рис. 6.24с, поріг біотермічної нестійкості

зменшується. І, навпаки, при негативних значеннях числа Пекле $Pe < 0$, як на Рис. 6.24d (негативний термотаксис), поріг біотермічної нестійкості зростає.

В третьому порядку теорії збурень було отримано рівняння Гінзбурга-Ландау, що описує стаціонарний режим конвекції з періодичним за часом коефіцієнтом, у наступному вигляді:

$$A_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - A_2(\tau)A + A_3 A^3 = 0, \quad (6.113)$$

where the coefficients are defined by:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a^2}{Pr} + \frac{k_c^2}{a^4} Ra_c + \frac{k_c^2}{a^4} Pe R_b L_b \langle n \rangle, \quad A_2(\tau) = \frac{k_c^2}{a^2} Ra_2 + \frac{k_c^2}{a^2} Ra_c 2\delta I_1 - \\ &- \frac{k_c^2}{a^4} R_b Pe^2 \langle n \rangle \delta (2I_2 + \pi I_3), \quad A_3 = \frac{k_c^4}{8a^4} (Ra_c + R_b L_b^2 Pe \langle n \rangle), \quad I_1 = \int_0^1 f_2(z, \tau) \sin^2 \pi z dz, \\ I_2 &= \int_0^1 f_3(z, \tau) \sin^2 \pi z dz, \quad I_3 = \int_0^1 f_2(z, \tau) \sin 2\pi z dz. \end{aligned} \quad (6.114)$$

6.7.2 Обговорення чисельних результатів

Чисельний аналіз включає дослідження трьох типів різних теплових граничних умов, щоб зрозуміти вплив температурної модуляції на теплопередачу Nu і масоперенесення Sh . Перелічимо такі граничні умови: 1) синфазна модуляція [IPM] ($\varphi = 0$), 2) протифазна модуляція [OPM] ($\varphi = \pi$), 3) модуляція лише нижньої межі [LBMO] ($\varphi = -i\infty$). Задамо початкову амплітуду $A(0) = 0.3$, інші параметри варіюються у межах. Числа Нуссельта та Шервуда використовуються для вимірювання тепло- та масопереносу, як зазначено в наступних рівняннях:

$$Nu(\tau) = 1 + \frac{k_c^2}{4a^2} A^2(\tau), \quad Sh(\tau) = 1 + \frac{k_c^2 L_b^2}{4a^2} A^2(\tau). \quad (6.115)$$

На Рис. 6.25 представлені результати теплоперенесення для випадку синфазної модуляції. Збільшення числа Прандтля швидко підвищує теплопередачу, як показано на Рис. 6.25а, де число Нуссельта швидко зростає. Схожий ефект спостерігався у роботі Коппа та Яновського [279]. Вплив біоконвективного чи-

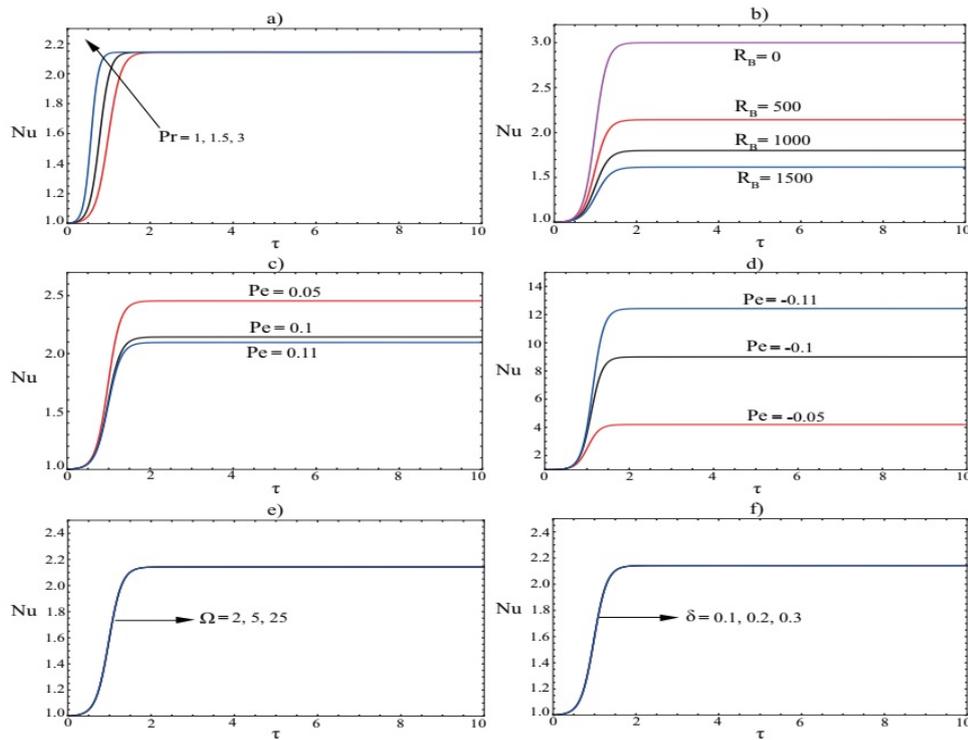


Рис. 6.25: Залежність числа Нуссельта Nu від часу τ для: а) Pr , б) R_b , с) $Pe > 0$, д) $Pe < 0$, е) Ω , ф) δ . Графіки побудовані для синфазної модуляції ($\varphi = 0$).

сла Релея на теплове число Нуссельта для синфазної модуляції показано на Рис. 6.25b. Верхня крива на Рис. 6.25b відповідає відсутності біоконвекції мікроорганізмів ($R_B = 0$), коли перенесення тепла в системі обумовлене лише градієнтом температури. Видно, що зі збільшенням біоконвективного числа Релея, викликаного зростанням концентрації термотактичних мікроорганізмів, інтенсивність конвективного потоку також збільшується. Цей сильніший потік призводить до більш ефективного перемішування та розсіювання тепла всередині рідини, зменшення температурних градієнтів і, як наслідок, зниження числа Нуссельта. Отже, підвищена активність термотактичних мікроорганізмів у системі сприяє зниженню числа Нуссельта, оскільки більше тепла рівномірно розподіляється по всій рідині. Цей результат узгоджується з висновками, отриманими Коппом та Яновським [279]. Коли мікроорганізми виявляють позитивний термотаксис $Pe > 0$, їхня швидкість руху спрямована до теплішої границі. Це спричиняє збільшення концентрації мікроорганізмів поблизу гарячої верх-

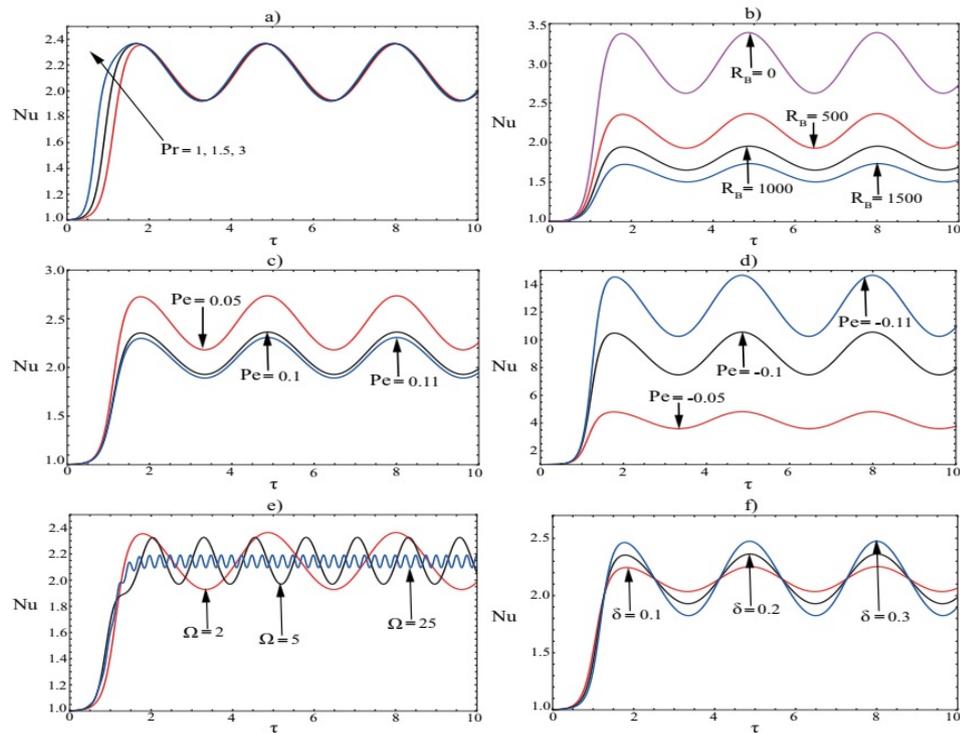


Рис. 6.26: Для протифазної модуляції ($\varphi = \pi$) побудований графік залежності числа Нуссельта Nu від часу τ для змін: а) Pr , б) R_b , в) $Pe > 0$, д) $Pe < 0$, е) Ω , ф) δ .

ньої границі, що згодом призводить до зменшення конвективного теплообміну. Це зменшення конвективного теплообміну призводить до зниження числа Нуссельта (Рис. 6.25с). І навпаки, коли мікроорганізми виявляють негативний термотаксис $Pe < 0$, конвективний теплообмін посилюється, що призводить до збільшення числа Нуссельта (див. Рис. 6.25d). При аналізі Рис. 6.25е-6.25f ми помітили, що зі збільшенням частоти модуляції Ω і амплітуди модуляції δ число Нуссельта Nu залишається відносно постійним. Отже, збільшення Ω і δ , мабуть, мінімально впливає на швидкість теплопередачі під час ІРМ. Результати цього випадку якісно збігаються з результатами, що спостерігаються за відсутності модуляції. На Рис. 6.26а-6.26f представлений графік числа Нуссельта (Nu) залежно від часу (τ) для випадку ОРМ. Спостереження із Рис. 6.26а-6.26d показують якісну схожість із результатами, отриманими на Рис. 6.26а-6.26d. На рис. 6.26е невелике збільшення частоти модуляції (Ω) показує мінімальний вплив на

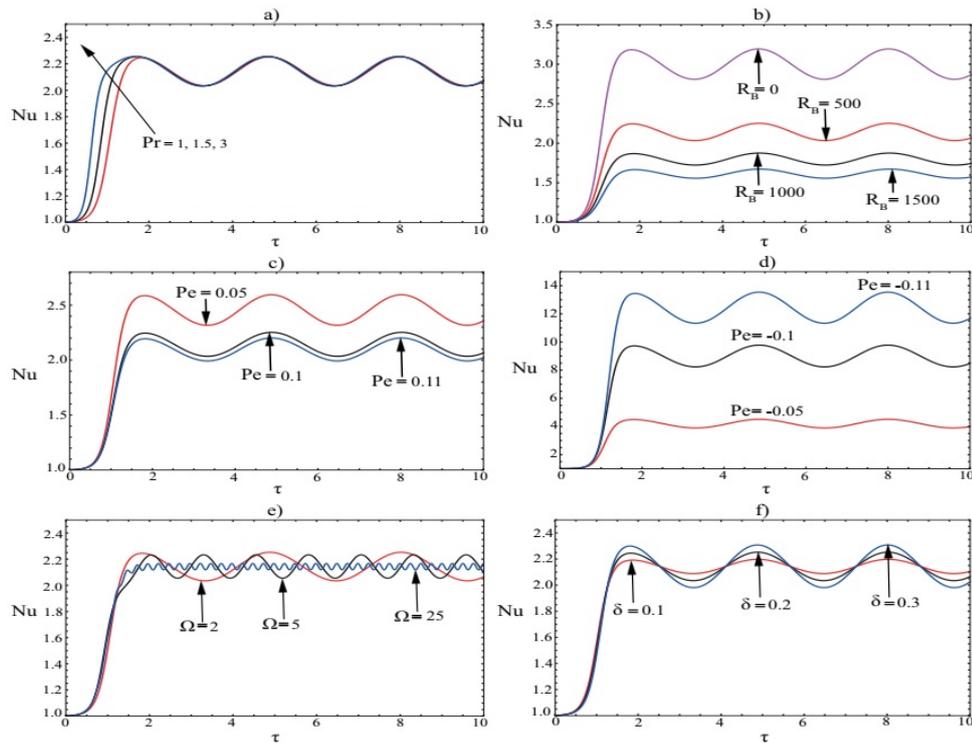


Рис. 6.27: Для модуляції ($\varphi = -i\infty$) побудований графік залежності числа Нуссельта Nu від часу τ для варіацій: а) Pr , б) R_b , в) $Pe > 0$, д) $Pe < 0$, е) Ω , ф) δ .

Nu в діапазоні низьких частот, зберігаючи його значення і трохи скорочуючи довжину хвилі коливань. Однак значне збільшення Ω призводить до зменшення Nu в діапазоні високих частот. З іншого боку, Рис. 6.26f демонструє, що збільшення амплітуди модуляції δ призводить до більш високого Nu , що означає збільшення швидкості теплопередачі.

Рисунки 6.27а-6.27f ілюструють число Нуссельта (Nu) залежно від часу (τ), зокрема, для модуляції температури нижньої межі. Порівняння трьох типів модуляції температури представлено на рисунках 6.28а та 6.28б:

$$Nu_{(IPM)} < Nu_{(LBMO)} < Nu_{(OPM)}, \quad Sh_{(IPM)} < Sh_{(LBMO)} < Sh_{(OPM)}.$$

Ці спостереження узгоджуються з висновками, отриманими Бхадаурією та ін. [180]- [182], Кіран та ін. [186] та Копп та ін. [193] у контексті звичайних (або чистих) рідин. Термотактичні мікроорганізми мають здатність покращувати

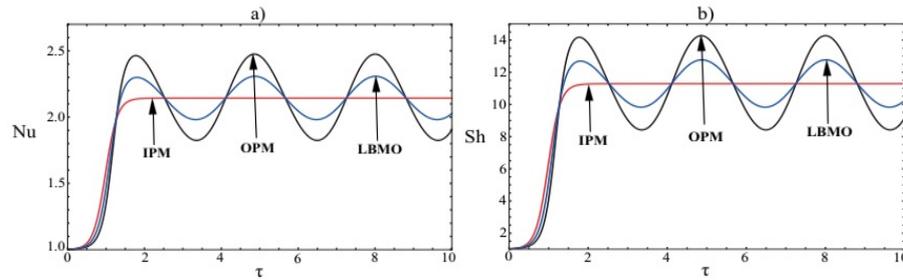


Рис. 6.28: Вплив трьох типів модуляції на а) теплопередачу Nu та б) масоперенесення Sh .

масоперенесення за допомогою створення локальних збурень рідини та сприяння конвективному перемішуванню. З рис. 6.28b можна помітити, що коли біоконвективні числа Льюїса $L_b > 1$ або D_m нижче порівняно з α_m , присутність та активність мікроорганізмів можуть значно покращити масоперенесення більше, ніж теплоперенесення.

6.8 Висновки до розділу 6

Наведемо основні результати цього розділу.

- 1) При дослідженні біо-термальній конвекції в шарі високопористого середовища, насиченого ньютонівською рідиною з гіротаксичними мікроорганізмами встановлено, що збільшення швидкості мікроорганізмів (числа Пекле), гіротаксису, різниці температур між шарами (числа Релея-Дарсі) знижує поріг біоконвективної нестійкості. Навпаки збільшення ефективної в'язкості (числа Дарсі), а також сферична форма мікроорганізмів затримують розвиток біоконвекції.
- 2) Виявлено, що збільшення частоти модуляції Ω призводить до зменшення тепловіддачі (зменшення варіацій чисел Нуссельта $Nu(\tau)$) у біо-термальній конвекції. Встановлено, що збільшення амплітуди модуляції δ посилює теплообмін, а сферична форма мікроорганізмів сприяє більш ефективному процесу теплопередачі.
- 3) Тепло- і масоперенос посилюються за наявності наскрізного потоку, що спрямований проти гравітації $Re_0 > 0$, і, навпаки, послаблюються при потоці, що

збігається з напрямком гравітації $Re_0 < 0$. Під час дослідження біо-термальної конвекції в горизонтальному шарі пористого середовища, насиченого нанорідиною та гіротактичними мікроорганізмами у зовнішньому магнітному полі, було встановлено, що

- а) вертикальне магнітне поле та число Дарсі підвищують стійкість системи;
- б) середня пористість, число Льюїса, модифікований коефіцієнт дифузії та концентраційне число Релея мають дестабілізуючий вплив на стаціонарну конвекцію;
- в) збільшення концентрації гіротактичних мікроорганізмів посилює виникнення магнітної конвекції;
- г) гіротактичні мікроорганізми сферичної форми ефективніше сприяють розвитку теплової нестійкості.

3) При дослідженні біо-термальної конвекції в шарі високопористого середовища, насиченого ньютонівською рідиною з гіротактичними мікроорганізмами встановлено, що збільшення числа Тейлора Ta чинить стабілізуючий вплив на систему, що затримує початок конвекції та зменшує теплопередачу. Збільшення внутрішнього параметра нагріву R_i призводить до дестабілізації системи. Сферична форма мікроорганізмів сприяє більш ефективному процесу теплопередачі.

4) У разі синфазної модуляції (IPM) вплив частоти та амплітуди виявився незначним для тепломасопереносу, тобто як і у немодульованому випадку. Число Нуссельта Nu (як і число Шервуда Sh) збільшується протягом короткого проміжку часу (τ), потім виходить на постійний рівень, коли τ стає великим. Зі зростанням числа Прандтля (Pr) спостерігається короткочасне зростання тепломасоперенесення у всіх трьох типах модуляції. Збільшення числа Ra_B призводить до зниження тепломасоперенесення для всіх типів модуляції. Збільшення позитивних значень чисел Пекле $Pe > 0$ призводить до зменшення тепломасопереносу, і навпаки, зі збільшенням абсолютних значень негативних чисел

Пекле $Pe < 0$ спостерігається збільшення тепло- масопереносу. Поведінка Nu і Sh у випадках протифазної (ОРМ) і модуляції на нижній границі (ЛВМО) має коливальний характер. Порівняння значень Nu і Sh для ОРМ дає більше значення, ніж для випадків ЛВМО та ІРМ відповідно.

Отримані в цьому розділі результати опубліковані у роботах [278–284].

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню як лінійних, так і нелінійних механізмів формування дисипативних структур у різних гідродинамічних середовищах - газах, рідинах і плазмі - під впливом зовнішніх полів. Особливу увагу приділено випадкам, коли середовище містить наночастинки або активну матерію у вигляді мікроорганізмів з різними типами таксису. Проаналізовано умови виникнення нелінійних когерентних структур і складних просторово-часових структур. Головні результати, що були отримані у дисертації, є наступними:

1. Побудовано теорію нелінійного вихрового динамо для однорідної в'язкої рідини, що обертається, під дією дрібномасштабної зовнішньої сили. Встановлено, що на лінійній стадії великомасштабні вихрові структури формуються внаслідок нестійкості типу α -ефекту, зумовленої поєднанням впливом сили Коріоліса та зовнішньої дрібномасштабної сили. У випадку неспіральної сили нестійкість виникає лише за умови відхилення осі обертання від вертикалі. Знайдено нові стаціонарні рішення у вигляді локалізованих вихрових структур: спіральних кінків, нелінійних хвиль Бельтрамі та кінків з перегином профілю швидкості.
2. Побудовано теорію нелінійного вихрового динамо для стратифікованої атмосфери та нанорідин. Показано, що врахування температурної стратифікації та джерела конденсаційного тепловиділення суттєво підсилює великомасштабні збурення. Розроблено теорію параметричної генерації вихрових структур у стратифікованій нанорідині з похилим обертанням та виявлено новий механізм їх формування без температурного градієнта, обумовлений зростанням концентрації наночастинок. Встановлено, що зі збільшенням частоти та хвильового числа параметричної дії ефективність генерації знижується. Отримано локалізовані рішення у вигляді нелінійних хвиль і кінків.
3. Побудовано самоузгоджену теорію магніто-вихрового динамо для електропровідного середовища, що обертається, з дрібномасштабною спіральною силою. Встановлено, що великомасштабні вихрові та магнітні структури на лі-

нійній стадії виникають незалежно через гідродинамічний і магнітогідродинамічний α -ефекти, зумовлені взаємодією сили Коріоліса та зовнішньої дрібно-масштабної сили. Отримано стаціонарні рішення у вигляді нелінійних хвиль, кінків і спіральних структур. Для випадку похилого обертання та неспіральної дрібномасштабної сили доведено, що нестійкість можлива лише за умови відхилення вектора обертання від вертикалі.

4. Розроблено самоузгоджену нелінійну теорію магніто-вихрового динамо у температурно-стратифікованому електропровідному середовищі з дрібномасштабними спіральностями. Проведено оцінки структур для сонячної плазми, які узгоджуються з експериментальними спостереженнями щодо масштабів і часових характеристик. Доведено можливість існування регулярних структур (нелінійні хвилі, кінки, солітони) та хаотичних стаціонарних структур. Отримано систему нелінійних рівнянь для великомасштабних полів у стратифікованому середовищі, що похило обертається, з урахуванням зовнішньої дрібномасштабної неспіральної сили та наявності зовнішнього магнітного поля. Показано, що без зовнішнього магнітного поля генерація великомасштабних полів (ВВС та ВМП) зумовлена нестійкостями типу α -ефектів (ГД та МГД). За наявності зовнішнього магнітного поля темпи зростання великомасштабних полів (ВВС та ВМП) збігаються, причому «слабке» зовнішнє поле не заважає генерації, а «сильне» – пригнічує її. Виявлено нову нестійкість α -типу в температурно-стратифікованій плазмі, що виникає під дією похилого магнітного поля та неспіральної дрібномасштабної сили. Встановлено дестабілізуючий вплив ефекту Нернста, який зі зростанням зменшує швидкість розвитку нестійкості.

5. Побудовано лінійну теорію конвективної нестійкості в тонкому шарі електропровідної рідини, що неоднорідно обертається у вертикальному магнітному полі. Встановлено, що неоднорідне обертання з негативними $Ro < 0$ знижує порогові стаціонарної та коливальної нестійкості. Отримано нелінійне рівняння типу Гінзбурга-Ландау, що описує еволюцію кінцевої амплітуди збурень, для слабо-

нелінійної конвективної нестійкості. Виявлено, що модуляція обертання є основним фактором підсилення теплоперенесення, а найменший внесок має модуляція температури. З'ясовано, що збільшення частоти модуляції Ω зменшує теплота масоперенесення незалежно від знаку Ro , тоді як зростання амплітуди модуляції δ його підсилює. Для магнітної конвекції в нанорідині з урахуванням ефекту струму Холла встановлено, що при малих значеннях параметра Холла ($M < 5$) спостерігається стабілізуючий вплив на виникнення конвекції, а при великих параметрах $M \geq 5$ — дестабілізуючий вплив.

6. Встановлено, що пороги стаціонарної та коливальної конвективної нестійкості в спіральному магнітному полі є нижчими порівняно з аксіальним магнітним полем незалежно від профілю обертання (значень Ro). Доведено, що присутність наночастинок знижує критичне число Релея для стаціонарної нестійкості Ra_{min} як у випадку аксіальної, так і спіральної магнітоконвекції з неоднорідним обертанням. Азимутальна складова спірального магнітного поля дестабілізує систему при позитивних значеннях магнітного числа Россбі $Rb > 0$.

7. Для опису слабонелінійної стадії магнітної конвекції в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається, отримані 6D і 8D рівнянь нелінійної динаміки, що демонструють хаотичну поведінку. За допомогою методу аналогового моделювання (інтегратори, помножувачі, суматори тощо) було розроблено електронні схеми для 6D та 8D рівнянь нелінійної динаміки. Продемонстровано, що розробка електронних схем нових генераторів хаосу, які описують реальні фізичні явища, дозволяє здійснювати фізичне моделювання рівнянь нелінійної динаміки як альтернативу чисельному моделюванню.

8. Отримано дисперсійне співвідношення для малих термомагнітних (ТМ) збурень в електропровідній рідині, що неоднорідно обертається у зовнішньому аксіальному магнітному полі $\mathbf{B}_0 \parallel OZ$. У разі відсутності зовнішнього магнітного поля $B_0 = 0$, з повільно змінними градієнтами температури ∇T_0 та коефіцієнта питомої термо е.р.с. $\nabla \alpha_0$, визначено інкременти зростання ТМ-нестійкості. Ви-

явлено, що в низькопровідних середовищах (магнітне число Прандтля $\widetilde{Pr} = \eta/\chi \gg 1$) генерація магнітного поля пригнічується внаслідок значних втрат, обумовлених теплопровідністю та в'язкістю. Натомість у високопровідних середовищах $\widetilde{Pr} = \eta/\chi \ll 1$) генерація магнітного поля стає ефективною за умови переважання ефекту Ледюка-Риги (замагнічування теплопровідності) над конвективним перенесенням тепла.

9. На основі методів слабонелінійного аналізу побудовано нелінійне рівняння типу Гінзбурга-Ландау, яке описує розвиток ТМ-нестійкості з урахуванням нелінійних ефектів і генерації магнітного поля. Точне аналітичне розв'язання цього рівняння демонструє насичення амплітуди генерованого тороїдального магнітного поля та досягнення стаціонарного режиму. Отримано нову 6D динамічну систему нелінійних рівнянь з урахуванням генерації збурень тороїдального магнітного поля ТМ-нестійкістю. Виявлено режими конвекції для кеплерівського ($Ro = -3/4$) профілю обертання, при яких виникають хаотичні зміни напрямку (інверсії) та амплітуди збурень генерованого магнітного поля.

10. Отримано новий тип термомагнітної (ТМ) нестійкості в стратифікованому за температурою тонкому шарі електронної рідини (плазмі), що знаходиться у постійному гравітаційному полі. Отримано точне аналітичне рішення рівняння типу Гінзбурга-Ландау, яке показало вихід на стаціонарний рівень амплітуди магнітного поля, що генерується. Отримані оцінки амплітуд таких збурень відповідають характерним значенням магнітних полів, спостережуваних у нейтронних зорях на ранніх стадіях еволюції.

11. Доведено, що в незамагніченій плазмі з колінеарними градієнтами густини та температури швидкість зростання ТМ-збурень перевищує аналогічну величину в замагніченій плазмі. Крім того, у сильно замагніченій неоднорідній плазмі магнітне поле може генеруватися навіть у випадку короткохвильових збурень.

12. Встановлено, що в біо-термальній конвекції в шарі високопористого сере-

довища, насиченого ньютонівською рідиною з гіротаксичними мікроорганізмами, збільшення швидкості руху мікроорганізмів (числа Пекле), параметра гіротаксису та температурного перепаду між межами шару (числа Релея-Дарсі) знижує критичний поріг виникнення біо-термальної конвективної нестійкості. Виявлено, що підвищення частоти модуляції Ω призводить до зменшення тепловіддачі, що проявляється у зниженні амплітуди варіацій числа Нуссельта Nu у часі. Водночас, збільшення амплітуди модуляції δ сприяє посиленню теплообміну. Сферична форма мікроорганізмів виявилася сприятливою для ефективної теплопередачі за умов модуляції гравітаційного поля.

13. Тепло- і масоперенос посилюється у присутності наскрізного потоку, що спрямований проти сили тяжіння $Pe_0 > 0$, і, навпаки, знижується при потоці, що збігається з напрямком гравітації $Pe_0 < 0$. Збільшення числа Тейлора Ta , що відповідає інтенсивності обертання, стабілізує систему, затримуючи початок конвекції й знижуючи теплопередачу. Натомість зростання внутрішнього параметра нагріву R_i чинить дестабілізуючий вплив на систему.

14. Встановлено, що термотактичні мікроорганізми активно реагують на періодичні коливання температури. У випадку синфазної модуляції (ІРМ) частота та амплітуда коливань практично не впливають на тепломасоперенос - поведінка системи подібна до немодульованого випадку. Для випадків протифазної модуляції (ОРМ) і модуляції температури на нижній межі (LBMO) характерна коливальна динаміка чисел Nu та Sh . Виявлено, що зі збільшенням додатного числа Пекле $Pe > 0$ мікроорганізми спрямовано рухаються вздовж температурного градієнта, що спричиняє їх локалізацію, пригнічує біо-термальну конвекцію й знижує інтенсивність тепло- та масопереносу. Натомість при збільшенні абсолютного значення від'ємного числа Пекле $Pe < 0$, коли мікроорганізми рухаються проти градієнта температури, середовище стає дестабілізованим, що веде до посилення біо-термальної конвекції та підвищення ефективності переносу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1987. - 551p.
- [2] M.J. Lighthill, On displacement thickness, Journal of Fluid Mechanics, 1958, V.4, P.383-392.
- [3] M.C. Cross and P.C. Hohenberg, Pattern formation outside of equilibrium, Reviews of Modern Physics, 1993, V.65, P.851-1112.
- [4] A.C. Newell and J.A. Whitehead, Finite bandwidth, finite amplitude convection, Journal of Fluid Mechanics, 1969, V.38, P.279-303.
- [5] P. Manneville, Dissipative Structures and Weak Turbulence. Boston: Academic Press, 1990. - 505p.
- [6] A.V. Getling, Rayleigh-Benard Convection: Structures and Dynamics. Singapore: World Scientific, 1998. - 245p.
- [7] F.H. Busse, Transition to turbulence in Rayleigh-Benard convection, Topics in Applied Physics, 1981, V.45, P.97-137.
- [8] M. Steenbeck, F. Krause, and K.-H. Rädler, Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung, Zeitschrift für Naturforschung, 1966, V.21a, P.369-376.
- [9] E.N. Parker, Hydromagnetic dynamo models, Astrophysical Journal, 1955, V.122, P.293-314.
- [10] G. Moffat, Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.- 354p.
- [11] F. Rincon, Dynamo theories, Journal of Plasma Physics, 2019, V.85, P.205850401.

- [12] S.M. Tobias, The turbulent dynamo, *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, V.912, P1-76.
- [13] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. - 296p.
- [14] A.S. Monin and A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics, Vol.2*. Cambridge: MIT Press, 1975. - 874p.
- [15] S.M. Tobias, F. Cattaneo, and N.H. Brummell, On the generation of organized magnetic fields, *Astrophysical Journal*, 2011, V.728, P.153-160.
- [16] A. Gailitis et al., Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment, *Physical Review Letters*, 2001, V.86, P.3024-3027.
- [17] R. Stieglitz and U. Müller, Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo, *Magnetohydrodynamics*, 2002, V.38, P.27-33.
- [18] Ya. Zeldovich, A. Ruzmaikin, and D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*. New York: Gordon and Breach, 1983.- 365p.
- [19] F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. Oxford: Pergamon Press, 1980.- 272p.
- [20] A. Brandenburg, Advances in mean-field dynamo theory and applications to astrophysical turbulence, *Journal of Plasma Physics*, 2018, V.84, P.735840404.
- [21] S. Childress and A.M. Soward, Convection-driven hydromagnetic dynamo, *Physical Review Letters*, 1972, V.29, P.837-839.
- [22] S. Choi, Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles, in *Development and Applications of Non-Newtonian Flows*, edited by D.A. Signier and H.P. Wang. New York: ASME, 1995, V.66, P.99-105.

- [23] J.A. Eastman et al., Anomalously increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles, *Applied Physics Letters*, 2001, V.78, P.718-720.
- [24] J. Buongiorno, Convective transport in nanofluids, *ASME Journal of Heat Transfer*, 2006, V.128, P.240-250.
- [25] D.Y. Tzou, Thermal instability of nanofluids in natural convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, V.55, P.2967-2979.
- [26] D.A. Nield and A.V. Kuznetsov, The onset of convection in a horizontal nanofluid layer of finite depth, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 2010, V.29, P.217-223.
- [27] D.A. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, 5th ed. New York: Springer, 2017. - 654p.
- [28] D.B. Ingham and I. Pop, *Transport Phenomena in Porous Media*. Oxford: Pergamon, 1998. - 446p.
- [29] W.J. Minkowycz, A. Haji-Sheikh, and K. Vafai, On departure from local thermal equilibrium in porous media due to a rapidly changing heat source: the Sparrow number, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1999, V.42, P.3373-3385.
- [30] J.R. Platt, Bioconvection patterns in cultures of free-swimming organisms, *Science*, 1961, V.133, P.1766-1767.
- [31] S. Childress, M. Levandowsky, and E.A. Spiegel, Pattern formation in a suspension of swimming microorganisms, *Journal of Fluid Mechanics*, 1975, V.69, P.591-613.

- [32] T.J. Pedley and J.O. Kessler, Hydrodynamic phenomena in suspensions of swimming microorganisms, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1992, V.24, P.313-358.
- [33] N.A. Hill and T.J. Pedley, *Bioconvection*, *Fluid Dynamics Research*, 2005, V.37, P.1.
- [34] J. Toner and Y. Tu, Long-Range Order in a Two-Dimensional Dynamical XY Model: How Birds Fly Together, *Physical Review Letters*, 1995, V.75, P.4326-4329.
- [35] V.A. Shaik, Z. Peng, J.F. Brady, and G.J. Elfring, Confined active matter in external fields, *Soft Matter*, 2023, V.19, P.1384-1392.
- [36] A. Martin-Gomez, D. Levis, A. Diaz-Guilera, and I. Pagonabarraga, Collective motion of active Brownian particles in complex environments, *Soft Matter*, 2018, V.14, P.2610-2618.
- [37] M.C. Marchetti et al., Hydrodynamics of soft active matter, *Reviews of Modern Physics*, 2013, V.85, P.1143-1189.
- [38] S. Ghorai and N.A. Hill, Development and stability of gyrotactic plumes in bioconvection, *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, V.400, P.1-31.
- [39] M.P. Brenner, D. Lohse, and T.F. Dupont, Bubble shape oscillations and the onset of sonoluminescence, *Physical Review Letters*, 1995, V.75, P.954-957.
- [40] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford: Clarendon Press, 1961. - 652p.
- [41] D.W. Hughes and M.R.E. Proctor, Magnetic fields in the solar convection zone: magnetoconvection and magnetic buoyancy, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1988, V.20, P.187-223.
- [42] J.R. Melcher, *Continuum Electromechanics*. Cambridge: MIT Press, 1981. - 650p.

- [43] R.J. Turnbull and J.R. Melcher, Electrohydrodynamic Rayleigh-Taylor bulk instability, *Physics of Fluids*, 1969, V.12, P.1160-1166.
- [44] S.H. Davis, The stability of time-periodic flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1976, V.8, P.57-74.
- [45] B.S. Bhadauria, Time-periodic heating of Rayleigh-Benard convection, *Physica Scripta*, 2006, V.73, P.296-301.
- [46] E.L. Koschmieder, *Benard Cells and Taylor Vortices*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. - 350p.
- [47] W. Eckhaus, *Studies in Non-Linear Stability Theory*. New York: Springer-Verlag, 1965.- 117p.
- [48] H.P. Greenspan, *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge: Cambridge University Press, 1968. - 327p.
- [49] V.I. Petviashvili, O.A. Pokhotelov, *Solitary Waves in Plasmas and in the Atmosphere*. Taylor & Francis, 1992. - 248p.
- [50] M.Ya. Marov, A.V. Kolesnichenko, *Turbulence and Self-Organization: Modeling Astrophysical Objects*. Springer New York, 2013. - 657p.
- [51] A.S. Monin, *Theoretical Geophysical Fluid Dynamics*. Springer Dordrecht, 1990. - 414p.
- [52] Anatoli Tur, and Vladimir Yanovsky, *Coherent Vortex Structures in Fluids and Plasmas*. Springer Cham, 2017. - 306p.
- [53] M.V. Nezlin, E.N. Snezhkin, *Rossby Vortices, Spiral Structures, Solitons*. Springer Berlin, Heidelberg, 1993. - 223p.
- [54] A.M. Fridman, A.V. Khoperskov, *Physics of Galactic Disks*. Cambridge International Science Publishing, 2013. - 754p.

- [55] A.S. Monin, *An Introduction to the Theory of Climate*. Springer Dordrecht, 1986. - 261p.
- [56] O. Onishchenko, V. Fedun, W. Horton et al., The stationary concentrated vortex model, *Climate*, 2021, V.9, P.39-52.
- [57] G. Khomenko, S. Moiseev, and A. Tur, The hydrodynamical alpha-effect in a compressible medium, *J. Fluid Mech.*, 1991, V.225, P.355-369.
- [58] F. Krause, and G. Rüdiger, On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence, *Astron. Nachr.*, 1974, V.295, P.93-99.
- [59] V.V. Gvaramadze, G.A. Khomenko, and A.V. Tur, Large-scale vortices in helical turbulence of incompressible fluid, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1989, V.46, P.53-69.
- [60] S.S. Moiseev, K.R. Oganyan, P.B. Rutkevich et al., An eddy dynamo and spiral turbulence, in: *Integrability and Kinetic Equations for Solitons*, edited by V.G. Bar'yachtar. Naukova Dumka, Kiev, 1990. P.280-332.
- [61] G.V. Levina, S.S. Moiseev, and P.B. Rutkevich, Hydrodynamic alpha-effect in a convective system, in: *Nonlinear Instability, Chaos and Turbulence*, *Adv. Fluid Mech. Series*, edited by L. Debnath, D.N. Riahi. WIT Press, 2000, V.2, P.111-161.
- [62] L.L. Kitchatinov, G. Rüdiger, and G. Khomenko, Large-scale vortices in rotating stratified disks, *Astron. Astrophys.*, 1994, V.287, P.320-324.
- [63] L.M. Smith, F. Waleffe, Generation of slow large scales in forced rotating stratified turbulence, *J. Fluid Mech.*, 2002, V.45(1), P.145-168.
- [64] N. Kleeorin, I. Rogachevskii, Generation of large-scale vorticity in rotating stratified turbulence with inhomogeneous helicity: mean-field theory, *J. Plasma Phys.* 2018, V.84, P.735840303.

- [65] U. Frisch, Z.S. She, and P.L. Sulem, Large scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect, *Physica D*, 1987, V.28, P.382-392.
- [66] P.L. Sulem, Z.S. She, H. Scholl, and U. Frisch, Generation of Large-Scale Structures in Three-Dimensional Flow Lacking Parity-Invariance, *J. Fluid Mech.*, 1989, V.205, P.341-358.
- [67] B. Dubrulle, U. Frisch, Eddy viscosity of parity-invariant flow, *Phys. Rev. A*, 1991, V.43, P.5355-5364.
- [68] A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Large-scale instability in hydrodynamics with stable temperature stratification driven by small-scale helical force, 2012. arXiv:1204.5024 [physics.flu-dyn].
- [69] A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Non-Linear Vortex Structure in Stratified Fluid Driven by Small-scale Helical Force, *Open J. Fluid Dyn.*, 2013, V.3, P.64-74.
- [70] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V. Yanovsky, The Large-scale instability in rotating fluid with small scale force, *Open J. Fluid Dyn.*, 2015, V.5, P.128-138.
- [71] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Vortex dynamo in rotating media, *East Eur. J. Phys.*, 2023, V.2, P.7-50.
- [72] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V. Yanovsky, Nonlinear Vortex Structures in Obliquely Rotating Fluid, *Open J. Fluid Dyn.*, 2015, V.5, P.311-321.
- [73] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V. Yanovsky, The large-scale instability and nonlinear vortex structures in obliquely rotating fluid with small scale non spiral force. XIII International Conference "PLASMA ELECTRONICS AND NEW METHODS OF ACCELERATION" August 24-28, 2015, Kharkiv, Ukraine, VANT, 2015, V.4, P.264-269.

- [74] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V. Yanovsky, Nonlinear vortex structures in obliquely rotating stratified fluids driven by small scale non helical forces, *Ukr. J. Phys.*, 2021, V.66, P.478-488.
- [75] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V. Yanovsky, Vortex Dynamo in a Rotating Stratified Moist Atmosphere driven by Small-scale Non-helical Forces, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2021, V.115, P.551-576.
- [76] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V. Yanovsky, Vortex Dynamo in an obliquely rotating stratified nanofluid by small-scale non-helical forces, *East Eur. J. Phys.*, 2021, V. 2, P.51-72.
- [77] G.V. Levina, On the Path from the Turbulent Vortex Dynamo Theory to Diagnosis of Tropical Cyclogenesis, *Open J. Fluid Dyn.*, 2018, V.8, P.86-114.
- [78] G. Rüdiger, On the α -Effect for Slow and Fast Rotation, *Astron. Nachr.*, 1978, V.299, P.217-222.
- [79] S.K. Das, S. U.S Choi, W.Yu, and T. Pradeep, *Nanofluids: science and technology*. Hoboken, New Jersey, Wiley-Interscience, 2008. - 397p.
- [80] M.A. Sheremet, Applications of Nanofluids, *Nanomaterials*, 2021, V.11, P.1716-1719.
- [81] M. I. Shliomis, B. L. Smorodin, Onset of convection in colloids stratified by gravity, *Phys. Rev. E*, 2005, V.71, P.036312.
- [82] B.L. Smorodin, I.N. Cherepanov, B.I. Myznikova, M.I Shliomis, Traveling-wave convection in colloids stratified by gravity, *Phys. Rev. E*, 2011, V.84, P.026305.
- [83] D. Yadav, G.S. Agrawal, and R. Bhargava, Thermal instability of rotating nanofluid layer, *Int. J. Eng. Sci.*, 2011, V.49, P.1171-1184.
- [84] S. Agarwal, and B.S. Bhadauria, Unsteady heat and mass transfer in a rotating nanofluid layer, *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2014, V.26, P.437-445.

- [85] J. Parker, *Conversations on Electric and Magnetic Fields in the Cosmos*, Princeton University Press: Princeton, 2007. - 200p.
- [86] A. Ruzmaikin, A. Shukurov, and D.Sokoloff, *Magnetic Fields of Galaxies*. Kluwer: Dordrecht, 1988. - 313p.
- [87] F.H. Busse, Generation of planetary by convection, *Phys. Earth. Planet. Inter.*, 1976, V.12, P.350-358.
- [88] K.K. Zang, F.H. Busse, Generation of magnetic fields by convection in rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number, *Phys. Earth. Planet. Inter.*, 1990, V.59, P.202-222.
- [89] C.A. Jones, Convection-driven geodynamo models, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 2006, V.358, P.873-897.
- [90] G.A. Glantzmaier, P.H. Roberts, Simulating the geodynamo, *Contemp. Phys.*, 1998, V.38, P.269-288.
- [91] G.Z. Gershuni and E.M. Zhukhovitskii, *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Keter, Jerusalem, 1976. - 338p.
- [92] S.A. Balbus, J.F. Hawley, A powerful local shear instability in weakly magnetized disk, *Astrophysical Journal*, 1991, V.376, P.214-222.
- [93] G. Montani, R. Benini, N. Carlevaro, A. Franco, Thermomagnetic instability of a rotating magnetized plasma disk, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2013, V.436, P.327-332.
- [94] J.M. Scalo, in *Protostars and Planets II*, ed. D. C. Black & M. S. Matthews. Tucson: Univ. Arizona Press, 1985, P.201-296.
- [95] J.M. Scalo, Theoretical Approaches to Interstellar Turbulence. In *Interstellar Processes*. Ed. D. J. Hollenbach & H. A. Thronson. Dordrecht: Reidel, 1986, P.349-392.

- [96] M.E. Katz and V.M. Yacobi, Large-Scale Structures in the Interstellar Medium, *The Astrophysical Journal*, 1997, V.483, P.274-281.
- [97] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V. Yanovsky, Nonlinear dynamo in a rotating electrically conductive fluid, *East Eur. J. Phys.*, 2017, V.4, P.4-27.
- [98] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Nonlinear dynamo in obliquely rotating electroconductive fluids, arXiv:1711.08623v.1[physics. plasma-ph](2017).
- [99] В.В. Яновський, А.В. Тур, М.Й. Копп. Квазідвовимірні великомасштабні вихрові та магнітні структури в магнітній гідродинаміці. Проблеми теоретичної фізики. Наукові праці. Випуск 4. Харків: ХНУ імені В.М. Каразіна, 2020, 412-506 с.
- [100] Yu. L. Bolotin, A. V. Tur, V. V. Yanovsky. *Chaos: Concepts, Control and Constructive Use. Series: Understanding Complex Systems*, Shpringer, 2016. - 281p.
- [101] T. Ohkawa, V.C. Chan, M.S. Chu, R.R. Daminquez, R.L. Miller. In Proc. 12th Int. Conference in Plasma Physics Control of Nuclear Fusion. Res. Nice, France. 1988. CN50/1-4.
- [102] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Nonlinear Dynamo, arXiv:1612.08860v1 [astro-ph. EP] (2016).
- [103] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Large-scale magnetic and vortex structures in a helical turbulent convection. Proceedings of the VII International Conference "Modern Problems of Physics". Dushanbe: publishing house «Donish», 2020, P.39-43.
- [104] Michael Kopp, Andrii Kopp. Modeling chaotic behavior of nonlinear dynamo equations using an artificial neural network. XXXIII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІ-

- КА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2025, 14-17 травня 2025 р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1382.
- [105] M.I. Kopp, A. V. Tur, K. N. Kulik, V. V. Yanovsky, Nonlinear dynamo in obliquely rotating stratified electroconductive fluid in an uniformly magnetic field, *East Eur. J. Phys.*, 2020, V.1, P.5-36.
- [106] D.A. Tidman and R.A. Shanny, Field-generating thermal instability in laser-heated plasmas, *Phys. Fluids*, 1974, V.17, P.1207-1210.
- [107] A. Fruchtman and H.R. Strauss, Thermomagnetic instability in a magnetized plasma, *Phys. Fluids B*, 1992, V.4, P.1397-1400.
- [108] R. Betti, O. Hurricane, Inertial-confinement fusion with lasers, *Nat. Phys.*, 2016, V.12, P.435-448.
- [109] M.C. Kelley, *The Earth's Ionosphere Plasma Physics and Electrodynamics*. School of Electrical Engineering, Cornell University, New York, 1989. - 487p.
- [110] C.E. Alissandrakis, Structure of the Solar Atmosphere: A Radio Perspective, *Front. Astron. Space Sci.*, 2020, V.7, P.574460.
- [111] S.I. Braginskii, Transport processes in plasma, in *Reviews of Plasma Physics*, V.1, edited by M. A. Leontovich. New York: Consultants Bureau, 1965, P.205-311.
- [112] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Generation of large-scale magnetic-vortex structures in stratified magnetized plasma by a small-scale force, *Phys. Plasmas*, 2024, V.31, P.082301.
- [113] G. Nicolis, I. Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*. Wiley, New York, 1977. - 491p.
- [114] I.A. Eltayeb, Hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer, *Proc. R. Soc. Lond.*, 1972, V.326A, P.229-254.

- [115] I.A. Eltayeb, Overstable hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer, *J. Fluid Mech.*, 1975, V.71, P.161-179.
- [116] R. Avila, A. Cabello, A Linear Stability Analysis of Thermal Convection in a Fluid Layer with Simultaneous Rotation and Magnetic Field Acting in Different Directions, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, Article ID 236901, P.1-15.
- [117] W.V.R. Malkus, G. Veronis, Finite Amplitude Cellular Convection, *J. Fluid Mech.*, 1958, V.4, P.225-260.
- [118] E. Knobloch and J. De Luca, Amplitude equations for travelling wave convection, *Nonlinearity*, 1990, V.3, P.975-980.
- [119] M. Revallo, D. Sevcovic, On the Ginzburg–Landau system of complex modulation equations for a rotating annulus with radial magnetic field, *Physica D*, 2002, V.161, P.116-128.
- [120] A. Benerji Babu, Ravi Ragoju, and S.G. Tagare, Nonlinear Magnetoconvection in a Sparsely Packed Porous Medium, *International Journal of Geophysics*, 2011, Article ID 207123, P.1-17.
- [121] S. Chandrasekhar, On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics, *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 1956, V.4, P.273-276.
- [122] C. Nipoti, L. Posti, Thermal stability of weakly magnetized rotating plasma, arXiv:1206.3890v2 [astro-ph.GA] (2012).
- [123] G. Rüdiger, R. Hollerbach, L.L. Kitchatinov, *Magnetic Processes in Astrophysics: Theory, Simulations, Experiment*. Wiley, 2013. - 356p.
- [124] A.M. Soward, Convection driven dynamos, *Phys. Earth Planet Int.*, 1979, V.20, P.134-151.

- [125] F.H. Busse, Generation of planetary magnetism by convection, *Phys. Earth Planet. Int.*, 1976, V.12, 350-358.
- [126] F. Busse, F. Finocchi, Convection in a rotating cylindrical annulus in the presence of a magnetic field, *Physics of The Earth and Planetary Interiors*, 1993, V.80, P.13-23.
- [127] E. Kurt, F.H. Busse, W. Pesch, Hydromagnetic convection in a rotating annulus with an azimuthal magnetic field, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 2004, V.18, P.251-263.
- [128] C.C. Finlay, Course 8 Waves in the presence of magnetic fields, rotation and convection, *Les Houches*, 2008, V.88, P.403-450.
- [129] B.S. Bhadauria, and S. Agarwal, Natural convection in a nanofluid saturated rotating porous layer: A nonlinear study, *Transp. Porous Media*, 2011, V.87, P.585-602.
- [130] G.C. Rana, and R. Chand, On the onset of thermal convection in a rotating nanofluid layer saturating a Darcy-Brinkman porous medium: a more realistic model, *J. Porous Media*, 2015, V.18, P.629-635.
- [131] U. Gupta, J. Ahuja, and R.K. Wanchoo, Magneto convection in a nanofluid layer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2013, V.64, P.1163-1171.
- [132] A. Sherman, Magnetohydrodynamic flows of non-equilibrium plasmas, *J. Fluid Mech.*, 1966, V.25, P.621-637.
- [133] A. S. Gupta, Hall effects on thermal instability, *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1967, V.12, P.665-677.
- [134] L. Palese and A. Georgescu, On instability of the magnetic Benard problem with Hall and ion-slip effects, *International Journal of Engineering Science*, 2004, V.42, P.1001-1012.

- [135] N. Rani and S. K. Tomar, Thermal convection problem of micropolar fluid subjected to hall current, *Applied Mathematical Modelling*, 2010, V.34, P.508-519.
- [136] D. Yadav and J. Lee, The onset of MHD nanofluid convection with Hall current effect, *Eur. Phys. J. Plus*, 2015, V.130, P.162-184.
- [137] J. Bishnoi, S. Kumar, R. Singh, Hall current effects on a magnetic nanofluid layer under temperature gradient, *SN Appl. Sci.*, 2021, V. 3, P.217.
- [138] D. Yadav, R.A. Mohamed, H. Cho, J. Lee, Effect of Hall current on the onset of MHD convection in a porous medium layer saturated by a nanofluid, *J. Appl. Fluid Mech.*, 2015, V.9, P.2379–2389.
- [139] P. Kumar, H. Mohan, Hall Current Effect on Thermosolutational Instability in a Viscoelastic Fluid through Porous Medium,” *Journal of Engineering Science and Technology*, 2012, V.7(2), P.219-231.
- [140] M. Singh and C. B. Mehta, Hall Effect on Benard Convection of Compressible Viscoelastic Fluid through Porous Medium, *Journal of Fluids*, 2013, Article ID 910531, 8 pages.
- [141] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Instabilities in the non-uniformly rotating medium with temperature stratification in the external uniform magnetic field, *East Eur. J. Phys.*, 2019, V.1, P.4-33.
- [142] O.N. Kirillov, F. Stefani, WKB thresholds of standard, helical, and azimuthal magnetorotational instability, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2012, V.8, P.233-234.
- [143] O.N. Kirillov, F. Stefani, Y. Fukumoto, Local instabilities in magnetized rotational flows: a short-wavelength approach, *J. Fluid Mech.*, 2014, V.760, P.591-633.

- [144] R. Narayan, E. Quataert, I.V. Igumenshchev, and M.A. Abramowicz, The magnetohydrodynamics of convection-dominated accretion flows, *Astrophys. J.*, 2002, V.577, P.295-301.
- [145] H. Ji, J. Goodman, and A. Kageyama, Magnetorotational instability in a rotating liquid metal annulus, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2001, V.325, P.L1-L5.
- [146] K. Noguchi, V.I. Pariev, S.A. Colgate, H.F. Beckley, and J. Nordhaus, Magnetorotational Instability in Liquid Metal Couette Flow, *Astrophys. J.*, 2002, V.575, P.1151-1162.
- [147] M. Gopal, *Control Systems: Principles and Design*. McGraw Hill, 2002. - 971p.
- [148] A.V. Getling, Convective mechanism for the formation of photospheric magnetic fields, *Astronomy Reports*, 2001, V.45, P.569-576.
- [149] A.V. Getling, The helicity of the velocity field for cellular convection in a rotating layer, *Astronomy Reports*, 2012, V.56, P.395-402.
- [150] A.V. Getling, Do Quasi-Regular Structures Really Exist in the Solar Photosphere? I. Observational Evidence, *Solar Physics*, 2006, V.239, P.93–111.
- [151] P. Goldreich, D. Lynden-Bell, II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1965, V.130, P.125-158.
- [152] E. Knobloch, K. Jullien, Saturation of the magnetorotational instability, *Physics of Fluids*, 2005, V.17, P.094106.
- [153] R. Haberman, *Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. 4th ed. Prentice Hall, 2004.- 545p.
- [154] P.G. Siddheshwar, C. Siddabasappa, Linear and Weakly Nonlinear Stability Analyses of Two-Dimensional, Steady Brinkman–Benard Convection Using Local Thermal Non-equilibrium Model, *Transp. Porous Med.*, 2017, V.120, P.605-631.

- [155] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Chaotic magnetoconvection in non-uniformly rotating electroconductive fluids XIV International Conference "PLASMA ELECTRONICS AND NEW ACCELERATION METHODS" August 27-31, 2018, Kharkiv, Ukraine. Problems of Atomic Science and Technology, 2018, №4 (116), p. 230-234. arXiv:1805.11894v1 [astro-ph.EP].
- [156] P. Vadasz and S. Olek, Transition and chaos for free convection in a rotating porous layer, Int. J. Heat Mass Transfer, 1999, V.41, P.1417-1435.
- [157] V.K. Gupta, B.S. Bhadauria, I. Hasim, J. Jawdat, A.K. Singh, Chaotic convection in a rotating fluid layer, Alexandria Engineering Journal, 2015, V.54, P.981-992.
- [158] V.K. Gupta, R. Prasad, and A.K.Singh, Effect of Magnetic Field on Chaos in couple stress liquid saturated in Porous Layer, International Journal of Energy and Technology, 2013, V.5, P.1-9.
- [159] V.K. Gupta and A.K. Singh, A Study of Chaos in an Anisotropic Porous Cavity, International Journal of Energy and Technology, 2013, V.5, P.1-12.
- [160] R. Prasad and A.K. Singh, Effect of perpendicular magnetic field on chaos in a cavity heated from below, International Journal of Applied Mathematics and Informatics, 2013, V.7, P.87-96.
- [161] R. Prasad and A.K. Singh, Effect of Perpendicular Magnetic Field on Chaos in a Rotating Cavity Heated from Side, Journal of Applied Fluid Mechanics, 2016, V.9, P.2887-2897.
- [162] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, Journal of atmospheric sciences, 1963, V.20(2), P.130-141.
- [163] Michael Kopp, Andrii Kopp, A New 6D Chaotic Generator: Computer Modelling and Circuit Design, International Journal of Engineering and Technology Innovation, 2022, V.12, P.288-307.

- [164] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them, *Meccanica*, 1980, V.15, P.9-30.
- [165] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, and J.A. Vastano, Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica D*, 1985, V.16, P.285-317.
- [166] M. Sandri, Numerical Calculation of Lyapunov Exponents, *Mathematica J.*, 1996, V.6, P.78-84.
- [167] Housam Binous, Nasri Zakia. An Improved Method for Lyapunov Exponents Computation. <https://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/7109/>
- [168] Michael Kopp, Inna Samuilik. A New 6D Two-wing Hyperchaotic System: Dynamical Analysis, Circuit Design, and Synchronization, *Chaos Theory and Applications*, 2024, V.6(4), P.273-283.
- [169] M.I. Kopp, I. Samuilik. Analysis of a new 6D hyperchaotic system. 83rd International Scientific Conference of the University of Latvia "Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations 29 January 2025, Riga, Latvia. Book of Abstracts, p. 4.
- [170] M. A. Bhat and Shikha, Complete synchronisation of non-identical fractional order hyperchaotic systems using active control, *International Journal of Automation and Control*, 2019, V.13, P.140-157.
- [171] M.I. Kopp, I.I Samuilik. Computer modeling and circuit implementation of a five-dimensional artificial neural network system. X International Scientific-Practical Conference Physical and Technological Problems of Transmission, Processing and Storage of Information in Infocommunication Systems, 15-17 May 2025, Chernivtsi, Ukraine. Book of Abstracts, p. 92-93.
- [172] G. Venezian, Effect of modulation on the onset of thermal convection, *J. Fluid Mech.*, 1969, V.35, P.243-254.

- [173] P. K. Bhatia and B. S. Bhadauria, Effect of Modulation on Thermal Convection Instability, *Z. Naturforsch.*, 2000, V.55a, P.957-966.
- [174] P. M. Gresho, R. Sani, The effects of gravity modulation on the stability of a heated fluid layer, *J. Fluid Mech.*, 1970, V.40, P.783-806.
- [175] J. K. Bhattacharjee, Rotating Rayleigh-Benard convection with modulation, *J. Phy. A: Math. Gen.*, 1989, V.22, P.L1135-L1189.
- [176] S. Aniss, M. Belhaq, and M. Souhar. Effects of a Magnetic Modulation on the Stability of a Magnetic Liquid Layer Heated From Above, *J. Heat Transfer*, 2001, V.123, P.428-433.
- [177] B.S. Bhadauria, P. Kiran, Effect of rotational speed modulation on heat transport in a fluid layer with temperature dependent viscosity and internal heat source, *Ain Shams Eng. J.*, 2015, V.5, P.1287-1297.
- [178] R. Ramya, E.J. Shelin , G. K.Sangeetha, A Non-Linear Stability Analysis of Rayleigh Benard Magnetoconvection of a Couple Stress Fluid in the Presence of Rotational Modulation, *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, 2018, V.54, P.477-484.
- [179] P. Kiran, Nonlinear thermal convection in a viscoelastic nanofluid saturated porous medium under gravity modulation, *Ain Shams Eng. J.*, 2016, V.7, P.639-651.
- [180] B.S. Bhadauria, P.G. Siddheshwar, J. Kumar, Om P. Suthar, Weakly nonlinear stability analysis of temperature/gravity modulated stationary Rayleigh Benard convection in a rotating porous medium, *Trans. Porous Med.*, 2012, V.73, P.633-647.
- [181] P.G. Siddheshwar, B.S. Bhadauria, M. Pankaj, A.K. Srivastava, Study of heat transport by stationary magneto-convection in a Newtonian liquid under

- temperature or gravity modulation using Ginzburg-Landau model, *Int. J. Non Linear Mech.*, 2012, V.47, P.418-425.
- [182] B.S. Bhadauria, P. Kiran, Heat transport in an anisotropic porous medium saturated with variable viscosity liquid under temperature modulation, *Transp. Porous Media*, 2013, V.100, P.279-295.
- [183] B.S. Bhadauria, P. Kiran, Weak nonlinear thermal instability under magnetic field modulation, *Phys. Scr.*, 2014, V.89, P.095209.
- [184] S. Aniss, M. Belhaq, M. Souhar, Effects of a magnetic modulation on the stability of a magnetic liquid layer heated from above, *ASME J. Heat Transfer.*, 2001, V.123, P.428-433.
- [185] P. Kiran, Y. Narasimhulu, Centrifugally driven convection in a nanofluid saturated rotating porous medium with modulation, *J. Nanofluids.*, 2017, V.6, P.513-523.
- [186] P. Kiran, Y. Narasimhulu, Internal heating and thermal modulation effects on chaotic convection in a porous medium, *J. Nanofluids*, V.7, P.544-555.
- [187] P. Kiran, B. S. Bhadauria, R. Roslan, The effect of throughflow on weakly nonlinear convection in a viscoelastic saturated porous medium, *J. Nanofluids*, 2020, V.9, P.36-46.
- [188] P. Kiran, Gravity modulation effect on weakly nonlinear thermal convection in a fluid layer bounded by rigid boundaries, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2023, V.24(3), P.867-881.
- [189] P. Kiran, Nonlinear throughflow and internal heating effects on vibrating porous medium, *Alex. Eng. J.*, 2016, V.55, P.757-767.
- [190] P. Kiran, Throughflow and gravity modulation effects on heat transport in a porous medium, *J. Appl. Fluid Mech.*, 2016, V.9, P.1105-1113.

- [191] P. Kiran, S. H. Manjula, and R. Roslan, Weak nonlinear analysis of nanofluid convection with g-jitter using the Ginzburg-Landau model, *Open Physics*, 2022, V.20, P.1283-1294.
- [192] S. H. Manjula, Palle Kiran, and S. N. Gaikwad, Study of Heat and Mass Transfer in a Rotating Nanofluid Layer Under Gravity Modulation, *J. Nanofluids*, 2023, V.12, P.842-852.
- [193] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Weakly nonlinear magnetic convection in a nonuniformly rotating electrically conductive medium under the action of modulation of external fields, *East Eur. J. Phys.*, 2020, V.2, P.5-37.
- [194] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Investigating the effect of gravity modulation on weakly nonlinear magnetoconvection in a nonuniformly rotating nanofluid layer, *East Eur. J. Phys.*, 2023, V.3, P.207-222.
- [195] N.L. Aleng, N. Bachok, N.M. Arifin. Flow and Heat Transfer of a Nanofluid over an Exponentially Shrinking Sheet, *Indian J. Sci. Technol.*, 2015, V.8, P.1-6.
- [196] A. Alam, D.N.K. Marwat, A. Ali. Flow of nano-fluid over a sheet of variable thickness with non-uniform stretching (shrinking) and porous velocities, *Adv. Mech. Eng.*, 2021, V.13, P.1-16.
- [197] B. S. Bhadauria, S. Agarwal. Natural convection in a nanofluid saturated rotating porous layer: a nonlinear study, *Transp. Porous Med.*, 2011, V.87, P.585-602.
- [198] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Influence of the Hall current on the convective and magnetorotational instability in a thin layer of an electrically conductive nanofluid, *Physics of Fluids*, 2022, V.34, P.064107.
- [199] D. Yadav, R. Bhargava, G. S. Agrawal, G. S. Hwang, J. Lee and M. C. Kim, Magneto-convection in a rotating layer of nanofluid, *Asia-Pac. J. Chem. Eng.*, 2014, V.9, P.663-677.

- [200] D. Yadav, R.A. Mohamed, H. Cho, J. Lee, Effect of Hall current on the onset of MHD convection in a porous medium layer saturated by a nanofluid, *J. Appl. Fluid Mech.*, 2015, V.9, P.2379-2389.
- [201] D.A. Nield, and A.V. Kuznetsov, Thermal instability in a porous medium layer saturated by a nanofluid, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2009, V.52, P.5796-5801.
- [202] R.J. Tayler, The Adiabatic Stability of Stars Containing Magnetic Fields I., *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 1973, V.161, P.365-380.
- [203] I.B. Bernstein, E.A. Frieman, M.D. Kruskal, and R.M. Kulsrud, An Energy Principle for Hydromagnetic Stability Problems, *Proc. R. Soc. A.*, 1958, V.244, P.17-40.
- [204] D.J. Acheson, On the Instability of Toroidal Magnetic Fields and Differential Rotations Stars, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 1978, V.289, P.459-500.
- [205] H.C. Spruit, Differential rotation and magnetic fields in stellar interiors, *Astron. Astrophys.*, 1999, V.349, P.189-202.
- [206] D. R. Sisan, N. Mujica, W. A. Tillotson, Y. Huang, W. Dorland, A. B. Hassam, T. M. Antonsen, and D. P. Lathrop, Experimental Observation and Characterization of the Magnetorotational Instability, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, V.93, P.114502.
- [207] Z. Wang, J. Si, and W. Liu, Equilibrium and magnetic properties of a rotating plasma annulus, *Phys. Plasmas.*, 2008, V.15, P.102109.
- [208] M. Seilmayer, F. Stefani, T. Gundrum, T. Weier, G. Gerbeth, M. Gellert, and G. Rüdiger, Experimental Evidence for a Transient Tayler Instability in a Cylindrical Liquid-Metal Column, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, V.108, P.244501.
- [209] F. Stefani, A. Gailitis, G. Gerbeth, A. Giesecke, Th. Gundrum, G. Rüdiger, M. Seilmayer, and T. Vogt, The DRESHDYN project: liquid metal experiments

- on dynamo action and magnetorotational instability, *Geophys. Astrophys Fluid Dyn.*, 2019, V. 113, P.51-70.
- [210] F. Stefani, G. Gerbeth, T. Gundrum, J. Szklarski, G. Rüdiger, and R. Hollerbach, Results of a modified PROMISE experiment, *Astron. Nachr.*, 2008, V. 329, P.652-658.
- [211] J. M. Zayan, A. K. Rasheed, A. John, S. Muniandy, L. B. Fen, and A. F. Ismail, Synthesis and Characterization of Novel Ternary Hybrid Nanoparticles as Thermal Additives in H₂O, 2021. 10.26434/chemrxiv.13710130.v1
- [212] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Magnetic convection in a nonuniformly rotating electrically conductive medium in an external spiral magnetic field, *Fluid Dynamics Research*, 2021, V.53, P.015509.
- [213] O.N. Kirillov, F. Stefani, WKB thresholds of standard, helical, and azimuthal magnetorotational instability, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2012, V.8, P.233-234.
- [214] O.N. Kirillov, F. Stefani, Y. Fukumoto, Local instabilities in magnetized rotational flows: a short-wavelength approach, *J. Fluid Mech.*, 2014, V.760, P.591-633.
- [215] M. Kopp, A. Kopp, A New 8D Lorenz-like Hyperchaotic System: Computer Modelling, Circuit Design and Arduino Uno Board Implementation, *Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering*, 2023, V.15, P.37-46.
- [216] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky. Magnetorotational and convective instabilities in a thin layer of electrically conductive nanofluid under an external helical magnetic field. arXiv:2509.04968v1 [physics.flu-dyn].
- [217] D. Yadav, R. Bhargava, G. S. Agrawal, Thermal instability in a nanofluid layer with a vertical magnetic field, *J. Eng. Math.*, 2013, V.80, P.147-164.

- [218] D. H. Michael, The stability of an incompressible electrically conducting fluid rotating about an axis when current flows parallel to the axis, *Mathematika*, 1954, V.1, P.45-50.
- [219] B. Eckhardt, D. Yao, Local stability analysis along Lagrangian paths, *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, V.5(11), P.2073-2088.
- [220] G. Rüdiger, M. Schultz, Tayler instability of toroidal magnetic fields in MHD Taylor-Couette flows, *Astron. Nachr.*, 2010, V.331, P.121-129.
- [221] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Thermal convection in a rotating porous medium layer saturated by a nanofluid under a helical magnetic field, *Journal of Applied Physics*, 2022, V.132, P.084302.
- [222] D. Yadav, R. Bhargava, and G. S. Agrawal, Boundary and internal heat source effects on the onset of Darcy-Brinkman convection in a porous layer saturated by nanofluid, *International Journal of Thermal Sciences*, 2012, V.60, P.244-254.
- [223] D.A. Nield, A. V. Kuznetsov, Thermal instability in a porous medium layer saturated by a nanofluid: A revised model, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2014, V.68, P.211-214.
- [224] Y. Yang, Z.G. Zhang, E.A. Grulke, W.B. Anderson, and G. Wu, Heat transfer properties of nanoparticle-in-fluid dispersions (nanofluids) in laminar flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2005, V.48, P.1107-1116.
- [225] J. Ahuja, and U. Gupta, Magneto convection of rotating nanofluids in porous medium: metals and semiconductors as nanoparticles, *Research Journal of Science and Technology*, 2017, V. 9, P.135-142.
- [226] J. Sharma, U. Gupta, and R.K. Wanchoo, Magneto Binary Nanofluid Convection in Porous Medium, *Int. J. Chem. Eng.*, 2016, V.2016, P.8.

- [227] W.M. Elsasser, On the Origin of the Earth's Magnetic Field, *Phys. Rev.*, 1939, V.55, P.489-498.
- [228] S.K. Runcorn, The Earth's core, *Trans. Am. geophys. union.*, 1954, V.35, P.49-78.
- [229] Christophe Goupil, *Continuum Theory and Modeling of Thermoelectric Elements*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2016. - 340p.
- [230] A.N. Dmitriev, Thermoelectric Currents of Earth's Core Generate the Earth's Magnetic Field, *Int. J. Geosci.*, 2017, V.8, P.1048-1071.
- [231] F.H. Hibberd, The origin of the Earth's magnetic field, *Proc. Roy. Soc. London A*, 1979, V.369, P.31-45.
- [232] M. Bologna, K. J. Chandia and B. Tellini, The role of thermal density currents in the generation of planetary magnetic fields, *Front. Astron. Space Sci.*, 2025, V.12, P.1462296.
- [233] A. Schlütter and L. Biermann, Über den Ursprung der Magnetfelder auf Sternen und im interstellaren Raum, *Z. Naturforsch. Teil A*, 1950, V.5, P.237-251.
- [234] G.R. Sarson. Dynamo, Braginsky. In: Gubbins, D., Herrero-Bervera, E. (eds) *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Springer, Dordrecht, 2007, pp.164-166.
- [235] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Thermomagnetic instabilities in a nonuniformly rotating electrically conductive fluid, *J. Phys. Stud.*, 2022, V.26, P.4401-4416.
- [236] V. Urpin, Thermal generation of the magnetic field in the surface layers of massive stars, *Mon. Not. R. Astron. Soc.: Lett.*, 2017, V.472, P.L5-L9.

- [237] E. Liverts, M. Mond, and V. Urpin, Thermomagnetic instability in hot discs, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2010, V.404, P.283-288.
- [238] Y.M. Shtemler, E. Liverts, and M. Mond, Thermomagnetic and magnetorotational instabilities of thin Keplerian discs in poloidal magnetic fields, *Astron. Nachr.*, 2012, V.333(3), P.266-273.
- [239] L.D. Landau, L.P. Pitaevskii, E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, 1984. - 474p.
- [240] V.N. Zharkov, *Internal Structure of the Earth and Planets*. New York: Gordon and Breach, 1983. - 416p.
- [241] B. Eckhardt, D. Yao, Local stability analysis along Lagrangian paths, *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, V.5, P.2073-2088.
- [242] V. E. Zinoviev, *Handbook of Thermophysical Properties of Metals at High Temperatures*. Nova Science Publishers, Inc., New York, 1996. - 581p.
- [243] M.I. Kopp, K.N. Kulik, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Generation of magnetic fields by thermomagnetic effects in a nonuniformly rotating layer of an electrically conductive fluid, *J. Phys. Stud.*, 2021, V.25, P.2401-2418.
- [244] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Chaotic Dynamics of Magnetic Fields Generated by Thermomagnetic Instability in a Nonuniformly Rotating Electrically Conductive Fluid, *J. Phys. Stud.*, 2023, V.27, 2403-2420.
- [245] T. Rikitake, Oscillations of a System of Disk Dynamos, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1958, V.54, P.89-105.
- [246] A.E. Cook, P.H. Roberts, The Rikitake two-disc dynamo system, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1970, V.68, P.547-569.
- [247] Michael Kopp, Andrii Kopp, Computer modeling and Arduino Uno implementation of a 6D hyperchaotic system with four quadratic nonlinearities

- ties. XXXII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2024, 22-25 травня 2024р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1216.
- [248] Michael Kopp, Andrii Kopp, Adaptive control and synchronization of a 6d hyperchaotic system with application to secure communication. XXXII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2024, 22-25 травня 2024р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1217.
- [249] M.C. Kelley, The Earth's Ionosphere Plasma Physics and Electrodynamics. School of Electrical Engineering, Cornell University, New York, 1989. - 580p.
- [250] C.E. Alissandrakis, Structure of the solar atmosphere: A radio perspective, *Front. Astron. Space Sci.*, 2020, V.7, P.574460.
- [251] C. Ekdahl, Nonparaxial propagation of an intense relativistic electron beam through dense media, *Phys. Rev. Accel. Beams*, 2025, V.28, P.044501.
- [252] J. Nycander, V.P. Pavlenko, and L. Stenflo, Magnetic vortices in nonuniform plasmas, *Phys. Fluids*, 1987, V.30, P.1367-1370.
- [253] M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky, Spontaneous generation of magnetic fields in thin layers of stratified plasma, *Phys. Plasmas*, 2022, V.29, P.042115.
- [254] J.A. Miralles, J.A. Pons, and V.A. Urpin, Hydromagnetic instabilities in proto-neutron stars, *Astrophys. J.*, 2002, V.574, P.356-363.
- [255] P. Haensel, A.Y. Potekhin, and D.G. Yakovlev, *Neutron Stars*. Springer, 2007. - 633p.

- [256] F. Wilczynski, D. W. Hughes, S. Van Loo, W. Arter, and F. Militello, Stability of scrape-off layer plasma: A modified Rayleigh-Benard problem, *Phys. Plasmas*, 2019, V.26, P.022510.
- [257] C. Kanchana, P.G. Siddheshwar, and Yi Zhao, A study of Rayleigh-Benard convection in hybrid nanoliquids with physically realistic boundaries, *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2019, V.228, P.2511-2530.
- [258] P.G. Siddheshwar, C. Kanchana, Effect of trigonometric sine, square and triangular wavetype time-periodic gravity-aligned oscillations on Rayleigh-Benard convection in Newtonian liquids and Newtonian nanoliquids, *Meccanica*, 2019, V.54, P.451-469.
- [259] H. Morita, S. Fujioka, Generation, measurement, and modeling of strong magnetic fields generated by laser-driven micro coils, *Rev. Mod. Plasma Phys.*, 2023, V.7, P.13.
- [260] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Features of generation of spontaneous magnetic fields in fully ionized plasma, *Problems of Atomic Science and Technology*, 2024, V.6(154), P.25-30.
- [261] T.J. Pedley, N.A. Hill, and J.O. Kessler, The growth of bioconvection patterns in a uniform suspension of gyrotactic microorganisms, *J. Fluid Mech.*, 1988, V.195, P.223-338.
- [262] N.A. Hill, T.J. Pedley, and J.O. Kessler, Growth of bioconvection patterns in a suspension of gyrotactic microorganisms in a layer of finite depth, *J. Fluid Mech.*, 1989, V.208, P.509-543.
- [263] T.J. Pedley, and J.O. Kessler, Hydrodynamic phenomena in suspensions of swimming microorganisms, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1992, V.24, P.313-358.
- [264] A.A. Avramenko, Model of Lorenz instability for bioconvection, *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, 2010, V.10, P.68-76.

- [265] A.V. Kuznetsov, The onset of nanofluid bioconvection in a suspension containing both nanoparticles and gyrotactic microorganisms, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 2010, V.37, P.1421-1425.
- [266] A.V. Kuznetsov, Non-oscillatory and oscillatory nanofluid bio-thermal convection in a horizontal layer of finite depth, *Eur. J. Mech. B. Fluids*, 2011, V.30, P.156-165.
- [267] S. Saini, and Y.D. Sharma, A Bio-Thermal Convection in WaterBased Nanofluid Containing Gyrotactic Microorganisms: Effect of Vertical Throughflow, *J. Appl. Fluid Mech.*, 2018, V.11, P.895-903.
- [268] A.V. Kuznetsov, and A.A. Avramenko, Stability Analysis of Bioconvection of Gyrotactic Motile Microorganisms in a Fluid Saturated Porous Medium, *Transp. Porous Media*, 2003, V.53, P.95-104.
- [269] D.A. Nield, A.V. Kuznetsov, and A.A. Avramenko, The onset of bioconvection in a horizontal porous-medium layer, *Transp. Porous Media*, 2004, V.54, P.335-344.
- [270] A.A. Avramenko, and A.V. Kuznetsov, The Onset of Convection in a Suspension of Gyrotactic Microorganisms in Superimposed Fluid and Porous Layers: Effect of Vertical Throughflow, *Transp. Porous Media*, 2006, V.65, P.159-176.
- [271] A.V. Kuznetsov, The onset of thermo-bioconvection in a shallow fluid saturated porous layer heated from below in a suspension of oxytactic microorganisms, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 2006, V.25, P.223-233.
- [272] M. Zhao, S. Wang, H. Wang, and U.S. Mahabaleshwar, Darcy-Brinkman bio-thermal convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in a porous medium, *Neural Comput. Appl*, 2019, V.31, P.1061-1067.
- [273] N.P. Dmitrenko, Main aspects of the process of bioconvection in nanofluids and porous media, *Industrial Heat Engineering*, 2017, V.39(5), P.19-25.

- [274] Y.D. Sharma, V. Kumar, The effect of high-frequency vertical vibration in a suspension of gyrotactic microorganisms, *Mech. Res. Commun.*, 2012, V.44, P.40-46.
- [275] A.K. Kushwaha, Y.D. Sharma, A. Sharma, Stability analysis of Vibrational System of Shallow Layers repleted with Random Swimming Gyrotactic Microorganisms, *Research Square*, (2022). <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1814108/v1>
- [276] Z. Alloui, T. Nguyen-Quang, Linear stability analysis for the thermotactic microorganisms in porous media, *Environmental Problems*, 2017, V.2, P.41-48.
- [277] A. Bisht, S. Maheshwari, Thermo-Bioconvection in Nanoliquid Suspension Saturated with Thermotactic Microorganisms, *Forces in Mechanics*, 2022, V.9, P.100128.
- [278] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Darcy-Brinkman bio-thermal convection in a porous rotating layer saturated by Newtonian fluid containing gyrotactic microorganisms, *Ukr. J. Phys.*, 2023, V.68, P.30-37.
- [279] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Effect of gravity modulation on weakly nonlinear bio-thermal convection in a porous medium layer, *Journal of Applied Physics*, 2023, V.134, P.104702.
- [280] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, The Effect of Throughflow and Gravitational Modulation on Weakly Nonlinear Bio-Thermal Convection in a Porous Medium Layer, *Ukrainian Journal of Physics*, 2024, V.69(2), P.82-95.
- [281] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, U.S. Mahabaleshwar, A Bio-Thermal Convection in a Porous Medium Saturated by Nanofluid Containing Gyrotactic Microorganisms Under an External Magnetic Field, *East Eur. J. Phys.*, 2022, V.4, P.23-47.

- [282] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Gravity modulation and its impact on weakly nonlinear bio-thermal convection in a porous layer under rotation: a Ginzburg-Landau model approach, *Journal of Porous Media*, 2024, V.27(9), P.1-17.
- [283] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Weakly Nonlinear Bio-Thermal Convection in a Porous Media Layer Under Rotation, Gravity Modulation, and Heat Source, *East European Journal of Physics*, 2024, V.1, P.175-191.
- [284] M.I. Kopp, V.V. Yanovsky, Thermal modulation effects on weakly nonlinear bio-thermal convection with thermotactic microorganisms in a liquid layer, *Journal of Physical Studies*, 2024, V.28(3), P.3401(14p).
- [285] H.C. Brinkman, A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, *Appl. Sci. Res. A*, 1947, V.1, P.27-34.
- [286] B.A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, London, 1972. - 434p.
- [287] D.A. Nield, and A.V. Kuznetsov, Thermal instability in a porous medium layer saturated by a nanofluid, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2009, V.52, P.5796-5801.
- [288] Y. Yang, Z.G. Zhang, E.A. Grulke, W.B. Anderson, and G. Wu, Heat transfer properties of nanoparticle-in-fluid dispersions (nanofluids) in laminar flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2005, V.48, P.1107-1116.
- [289] J.C. Umavathi, D. Yadav, and M.B. Mohite, Linear and nonlinear stability analyses of double-diffusive convection in a porous medium layer saturated in a Maxwell nanofluid with variable viscosity and conductivity, *Elixir Mech. Engg.*, 2015, V.79, P.30407-30426.
- [290] S. Agarwal, N. Sacheti, P. Chandran, B.S. Bhadauria, and A.K. Singh, Non-linear Convective Transport in a Binary Nanofluid Saturated Porous Layer, *Transp. Porous Med.*, 2012, V.93, P.29-49.

ДОДАТОК

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

1. **М.І. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. The Large scale instability in rotating fluid with small scale force, *Open Journal of Fluid Dynamics*, 2015, v.5, p. 128-138. arXiv:1504.06953v1 [physics.flu-dyn].
2. **М.І. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Nonlinear Vortex Structures in Obliquely Rotating Fluid, *Open Journal of Fluid Dynamics*, 2015, v.5, p.311-321.
3. В.В. Яновський, А.В. Тур, **М.Й. Копп**. Квазідвовимірні великомасштабні вихрові та магнітні структури в магнітній гідродинаміці. Проблеми теоретичної фізики. Наукові праці. Випуск 4. Харків: ХНУ імені В.М. Каразіна, 2020, 412-506 с.
4. **М.І. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Nonlinear Dynamo in a Rotating Electrically Conducting Fluid, *East European Journal of Physics*, 2017, v.4(1), p. 4-27. (SJR кuartиль Q4).
5. **М.І. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Instabilities in the non-uniformly rotating medium with temperature stratification in the external uniform magnetic field, 2019, *East European Journal of Physics*, v.1, p. 4-33. (SJR кuartиль Q4).
6. **М.І. Корп**, A.V. Tur, K.N. Kulik, V.V. Yanovsky. Nonlinear dynamo in obliquely rotating stratified electroconductive fluid in a uniform magnetic field, *East European Journal of Physics*, 2020, v.1, p. 5-36. arXiv:1807.01986v1 [physics.flu-dyn]. (SJR кuartиль Q4).
7. **М.І. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Weakly nonlinear magnetic convection in a nonuniformly rotating electrically conductive medium under the action of modulation of external fields, *East European Journal of Physics*, 2020, v.2, p. 5-37. arXiv:1911.05368v1 [physics.plasm-ph]. (SJR кuartиль Q4).
8. **М.І. Корп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Magnetic convection in a nonuniformly rotating electrically conductive medium in an external spiral magnetic field, *Fluid*

Dynamics Research, 2021, v. 53, 015509. arXiv:1905.05472v1 [physics.plasm-ph]. (SJR квартиль Q2).

9. **М.І. Копп**, К.Н. Kulik, А.В. Tur, V.V. Yanovsky. Generation of magnetic fields by thermomagnetic effects in a nonuniformly rotating layer of an electrically conductive fluid, Journal of Physical Studies, 2021, v. 25, No. 2, 2401. arXiv:2104.11068v1 [physics.flu-dyn]. (SJR квартиль Q4).

10. **М.І. Копп**, А.В. Tur, V.V. Yanovsky. Nonlinear Vortex Structures Driven by Small-Scale Nonhelical Forces in Obliquely Rotating Stratified Fluids, Ukrainian Journal of Physics, 2021, v. 66, No. 6, p. 478-488. arXiv:1706.00223 [physics.flu-dyn]. (SJR квартиль Q3).

11. **М.І. Копп**, А.В. Tur, V.V. Yanovsky. Hydrodynamic α -effect in a rotating stratified moist atmosphere driven by small-scale nonhelical force, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 2021, v. 115, No. 5-6, p. 551-576. (SJR квартиль Q2).

12. **М.І. Копп**, А.В. Tur, V.V. Yanovsky. Vortex Dynamo in an Obliquely Rotating Stratified Nanofluid by Small-Scale Non-Helical Forces, East European Journal of Physics, 2021, v.2, p.51-72. (SJR квартиль Q4).

13. **М.І. Копп**, А.В. Tur, V.V. Yanovsky. Spontaneous generation of magnetic fields in thin layers of stratified plasma, Physics of Plasmas, 2022, v. 29, 042115. (SJR квартиль Q1).

14. **Michael Kopp**, Andrii Kopp. A New 6D Chaotic Generator: Computer Modelling and Circuit Design, International Journal of Engineering and Technology Innovation, 2022, v. 12, no. 4, p. 288-307. (SJR квартиль Q3).

15. **М.І. Копп**, V.V. Yanovsky. Influence of the Hall current on the convective and magnetorotational instability in a thin layer of an electrically conductive nanofluid, Physics of Fluids, 2022, v. 34, 064107. (SJR квартиль Q1).

16. **М.І. Копп**, V.V. Yanovsky. Thermal convection in a rotating porous medium layer saturated by a nanofluid under a helical magnetic field, Journal of Applied

Physics, 2022, v. 132, 084302. (SJR квартиль Q2).

17. **М.И. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Thermomagnetic instabilities in a nonuniformly rotating electrically conductive fluid, Journal of Physical Studies, 2022, v. 26, No. 4, 4401. (SJR квартиль Q4).

18. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky, U. S. Mahabaleshwar. A Bio-Thermal Convection in a Porous Medium Saturated by Nanofluid Containing Gyrotactic Microorganisms Under an External Magnetic Field, East European Journal of Physics, 2022, v.4, p.23-47. (SJR квартиль Q4).

19. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Darcy-Brinkman bio-thermal convection in a porous rotating layer saturated by Newtonian fluid containing gyrotactic microorganisms, Ukrainian Journal of Physics, 2023, v. 68, No. 1, p. 30-37. (SJR квартиль Q3).

20. **М.И. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Chaotic Dynamics of Magnetic Fields Generated by Thermomagnetic Instability in a Nonuniformly Rotating Electrically Conductive Fluid, Journal of Physical Studies, 2023, v. 27, No. 2, 2403. (SJR квартиль Q3).

21. **М. Копп**, A. Копп. A New 8D Lorenz-like Hyperchaotic System: Computer Modelling, Circuit Design and Arduino Uno Board Implementation, Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering, 2023, v. 15, No. 2, p. 37-46.

22. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Vortex dynamo in rotating media, East European Journal of Physics, 2023, v.2, p. 7-50. (SJR квартиль Q4).

23. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Investigating the effect of gravity modulation on weakly nonlinear magnetoconvection in a nonuniformly rotating nanofluid layer, East European Journal of Physics, 2023, v.3, p. 207-222. (SJR квартиль Q4).

24. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Effect of gravity modulation on weakly nonlinear bio-thermal convection in a porous medium layer. Journal of Applied Physics, 2023, v. 134, 104702. (SJR квартиль Q2).

25. **М.И. Копп**, V.V. Yanovsky. Gravity modulation and its impact on weakly nonli-

near bio-thermal convection in a porous layer under rotation: a Ginzburg-Landau model approach, *Journal of Porous Media*, v. 27(9), 2024, p. 1-17. (SJR квартиль Q3).

26. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky. Weakly Nonlinear Bio-Thermal Convection in a Porous Media Layer Under Rotation, Gravity Modulation, and Heat Source, *East European Journal of Physics*, 2024, v. 1, p. 175-191. (SJR квартиль Q3).

27. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky. The Effect of Throughflow and Gravitational Modulation on Weakly Nonlinear Bio-Thermal Convection in a Porous Medium Layer, *Ukrainian Journal of Physics*, 2024, v. 69(2), p. 82-95. (SJR квартиль Q4).

28. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky. Thermal modulation effects on weakly nonlinear bio-thermal convection with thermotactic microorganisms in a liquid layer, *Journal of Physical Studies*, 2024, v. 28(3), 3401. (SJR квартиль Q4).

29. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky. Generation of large-scale magnetic-vortex structures in stratified magnetized plasma by a small-scale force, *Physics of Plasmas*, 2024, v. 31, 082301. (SJR квартиль Q2).

30. **M.I. Kopp**, V.V. Yanovsky. Features of generation of spontaneous magnetic fields in fully ionized plasma, *Problems of Atomic Science and Technology*, 2024, №6(154), p. 25-30. (SJR квартиль Q3).

31. **Michael Kopp**, Inna Samuilik. A New 6D Two-wing Hyperchaotic System: Dynamical Analysis, Circuit Design, and Synchronization, *Chaos Theory and Applications*, 2024, v. 6(4), p. 273-283. (SJR квартиль Q1).

32. **M.I. Kopp**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. The large scale instability and nonlinear vortex structures in obliquely rotating fluid with small scale non spiral force. XIII International Conference "PLASMA ELECTRONICS AND NEW METHODS OF ACCELERATION" August 24-28, 2015, Kharkiv, Ukraine. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2015, №4(98), p. 264-269. (SJR квартиль Q3).

33. **M.I. Kopp**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Chaotic magnetoconvection in non-uniformly rotating electroconductive fluids XIV International Conference "PLASMA

ELECTRONICS AND NEW ACCELERATION METHODS" August 27-31, 2018, Kharkiv, Ukraine. Problems of Atomic Science and Technology, 2018, №4 (116), p. 230-234. arXiv:1805.11894v1 [astro-ph.EP]. (SJR квартиль Q3).

34. **М.І. Копп**, A.V. Tur, V.V. Yanovsky. Large-scale magnetic and vortex structures in a helical turbulent convection. Proceedings of the VII International Conference "Modern Problems of Physics". Dushanbe: publishing house «Donish», 2020, p. 39-43.

35. **Michael Kopp**, Andrii Kopp. Computer modeling and Arduino Uno implementation of a 6D hyperchaotic system with four quadratic nonlinearities. XXXII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2024, 22-25 травня 2024р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1216.

36. **Michael Kopp**, Andrii Kopp. Adaptive control and synchronization of a 6D hyperchaotic system with application to secure communication. XXXII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2024, 22-25 травня 2024р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1217.

37. **М.І. Копп**, I. Samuilik. Analysis of a new 6D hyperchaotic system. 83rd International Scientific Conference of the University of Latvia "Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations 29 January 2025, Riga, Latvia. Book of Abstracts, p. 4.

38. **Michael Kopp**, Andrii Kopp. Modeling chaotic behavior of nonlinear dynamo equations using an artificial neural network. XXXIII Міжнародна науково-практична конференція ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НАУКА, ТЕХНІКА, ТЕХНОЛОГІЯ, ОСВІТА, ЗДОРОВ'Я. MicroCAD-2025, 14-17 травня 2025 р., Kharkiv, Ukraine. Book of Abstracts, p. 1382.

39. **М.І. Копп**, I.I Samuilik. Computer modeling and circuit implementation of a fivedimensional artificial neural network system. X International Scientific-Practical

Conference Physical and Technological Problems of Transmission, Processing and Storage of Information in Infocommunication Systems, 15-17 May 2025, Chernivtsi, Ukraine. Book of Abstracts, p. 92-93.