НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР
ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Уваров Дмитро Вячеславович

УДК 539.12:530.12

Суперсиметричні моделі спінових частинок і струн у викривлених та твісторних просторах

01.04.02 – теоретична фізика

104 – фізика та астрономія

Реферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2024

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті теоретичної фізики імені О.І. Ахієзера ННЦ «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Желтухін Олександр Олександрович,
Інститут теоретичної фізики імені О.І. Ахієзера ННЦ «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України, провідний науковий співробітник відділу статистичної фізики і квантової теорії поля.

Опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Вільчинський Станіслав Йосипович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, завідувач кафедри квантової теорії поля і космомікрофізики;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Іоргов Микола Зіновійович,
Інститут теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова НАН України, завідувач лабораторії теорії інтеґровних систем;

доктор фізико-математичних наук, професор
Скалозуб Володимир Васильович,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара МОН України, завідувач кафедри теоретичної фізики.

Захист відбудеться 7 жовтня 2024 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.845.02 Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України за адресою: 61108 м. Харків, вул. Академічна, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України за адресою: 61108 м. Харків, вул. Академічна, 1, та на офіційному сайті ННЦ ХФТІ.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради,
кандидат фізико-математичних наук А.І. Кірдін

Загальна характеристика роботи

Обґрунтування вибору теми дослідження. Останнім часом у фізиці високих енергій та астрофізиці було здобуто низку експериментальних результатів, які мають фундаментальне значення для розуміння будови Всесвіту та взаємодій матерії. До них відносяться відкриття мікрохвильового космічного фону, бозона Хіггса, доведення існування чорних дір та гравітаційних хвиль. Це загострило проблему побудови теорії квантової гравітації, яка на сучасному етапі розвитку ґрунтується на теорії суперструн. У просторах анти-де Сіттера активно досліджується побудова квантової теорії гравітації на основі гіпотези AdS/CFT відповідності як конформно-інваріантної теорії типу Янга-Міллса або Черна-Саймонса на їх межі. Дана гіпотеза та її узагальнення вказують можливий шлях до об'єднання Загальної теорії відносності та Стандартної моделі, у якій ферміонні поля відіграють фундаментальну роль.

Серйозною перешкодою на цьому шляху є проблема пояснення природи темної матерії. Найбільш розроблені сценарії її опису виходять із того, що вона складається з ферміонів таких як нейтрино, нейтраліно або більш складних ферміонних компонентів супермультиплетів теорії суперструн або супергравітації.

У цьому зв'язку особливу увагу привертають теоретико-польові підходи, які дають можливість спільного опису бозонів та ферміонів у викривлених просторах. На додаток до теорії струн та супергравітації таким підходом є твісторна програма Р. Пенроуза, яка пропонує єдину математичну основу для опису польових теорій у пласких і викривлених просторах та сумісна з теорією гравітації Ейнштейна.

Тому застосування теорії твісторів у теоріях суперструн та супергравітації є важливим напрямом, який на основі об'єднання математичних та теорфізичних принципів може привести до прогресу у розв'язанні проблеми побудови квантової теорії гравітації з включенням темної матерії.

Зв'язок роботи з науковими програмами і темами. Результати, представлені в дисертації, були здобуті під час виконання наступних тем базового фінансування відділу статистичної фізики та квантової теорії поля Інституту теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера ННЦ ХФТІ НАН України:

- «Теоретичні дослідження зі статистичної фізики конденсованих середовищ зі спонтанно порушеною симетрією та газоподібних систем і теоретико-групових методів у теорії поля», 2006-2010 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 080906UP0010;

- «Розвиток методів статистичної фізики та квантової теорії поля для дослідження проблем конденсованих і газоподібних середовищ та динаміки полів і суперсиметричних подовжених об'єктів», 2011-2015 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0111U009549;

- «Дослідження класичних і квантових симетрій у теоретико-польових та струнних моделях та проблем статистичної механіки конденсованих середовищ», 2016-2020 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0116U007065;

- «Розвиток методів статистичної фізики та квантової теорії поля для дослідження проблем фізики квантових систем багатьох частинок та індукованої гравітації й калібрувальних полів у теорії (супер)струн і бран», 2021-2025 рр., номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0121U108722.

Мета та завдання дослідження. Метою дисертації є розвиток суперсиметричної теорії релятивістських спінових частинок та струн у викривлених та твісторних просторах, вивчення їх класичних і квантових симетрій на основі теоретико-групових і геометричних підходів квантової теорії поля. Задачі дослідження полягали у вивченні структури цих симетрій та її залежності від геометрії простору, спінових ступенів свободи, характеру взаємодії із зовнішніми полями. Для розв'язання поставлених задач були побудовані нові моделі частинок і струн в узагальнених просторах, а також розширено відомі моделі на випадок викривлених та твісторних суперпросторів у різних динамічних режимах. У цих моделях були досліджені умови класичної інтеґровності здобутих нелінійних рівнянь та можливості їх зведення до лінійних рівнянь. Розглядалась також задача квантування побудованих моделей.

Розгорнутий перелік завдань, які розв'язуються у дисертаційній роботі, наведено нижче.

1. Вивчити нелінійну реалізацію групи симетрії двовимірної $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі у конформній параметризації, яка відповідає генераторам $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри. Дослідити глобальну суперконформну симетрію σ-моделі.

2. Для даної σ-моделі довести лінійну залежність рівнянь для ферміонних полів, сформульованих з використанням форм Картана, та здобути густини відповідних ньотерових струмів як в термінах цих форм, так і параметрів суперконформної алгебри.

3. Здобути лагранжіан та гамільтоніан суперструни в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді у калібруванні світлового конуса для локальних симетрій дії, який утворено нуль-геодезичними на конформній межі чотиривимірного простору анти-де Сіттера AdS_4 в координатах Пуанкаре.

4. Для суперструни у $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ супербекграунді розглянути можливість часткового закріплення калібрування κ-симетрії, в якому залишаються дві з восьми координат у секторі суперсиметрій, порушених даним бекграундом. Представити рівняння суперструни у цьому калібруванні у вигляді умови нульової кривизни для листкової 1-форми. Проаналізувати умову Калуци-Клейна.

5. Довести класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі. Встановити співвідношення між компонентами пари Лакса суперчастинки та зв'язністю Лакса відповідної двовимірної σ-моделі. Довести інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки та $D0$-брани в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі.

6. Здобути супертвісторні формулювання моделей струн інваріантних відносно просторово-часової суперсиметрії у розмірностях $D=4,6,10$. Здобути в'язі

на компоненти $OSp(8^*|2)$ та $OSp(32|1)$ супертвісторів, які забезпечують їх відповідність координатам $\mathcal{N} = 1$ суперпросторів Мінковського у розмірностях $D = 6$ та $D = 10$. Здобути редуковані супертвісторні моделі та проаналізувати модель, яка відповідає $D = 4$ $\mathcal{N} = 2$ суперструні, як гамільтонову систему з в'язями.

7. Провести аналіз моделі $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у здобутому супертвісторному формулюванні як гамільтонової системи з в'язями.

8. Вивчити реалізації нескінченновимірних класичних суперконформних симетрій у моделі твісторної струни Берковіца та її узагальненні для вільних $SL(4|4,\mathbb{R})$ супертвісторів. Дослідити відповідні квантові симетрії.

9. Розробити лоренц-гармонічне інтеґральне представлення для вільних безмасових симетричних спінорних полів у просторі Мінковського розмірності $D = 5$.

10. Розробити опис в амбітвісторному просторі безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ з додатною енергією. Встановити співвідношення між амбітвісторним та відомим осциляторним описами цих представлень.

11. Здобути 4-твісторне формулювання моделі масивної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера, встановити його зв'язок з раніше відомим 2-твісторним формулюванням та провести її квантування в термінах амбітвісторів.

12. Встановити зв'язок між змінними, які входять до суперпросторового та супертвісторних формулювань моделі безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді, а також між цими формулюваннями. Провести квантування за Діраком даної моделі у 4-супертвісторному формулюванні.

13. Здобути формулювання моделі безмасової спінової частинки у D-вимірному просторі анти-де Сіттера, реалізованому як дійсний проєктивний багатовид. Узагальнити модель на випадок взаємодії з фоновими електромагнітним та абелевими антисиметричними калібрувальними полями і провести її квантування за Діраком.

14. Побудувати модель замкненої безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера у зазначеній реалізації. Побудувати БРСТ генератор струни та дослідити його квантові аномалії.

Об'єкт досліджень. Класичний і квантовий опис взаємодіючих бозонів і ферміонів як релятивістських точкових та протяжних об'єктів у суперсиметричних польових та струнних теоріях.

Предмет досліджень. Суперсиметричні моделі релятивістських частинок і струн у викривлених і твісторних просторах, їх лагранжеві та гамільтонові формулювання і симетрії.

Методи досліджень. Для дослідження суперсиметричних моделей релятивістських частинок і струн використовуються лагранжів та гамільтонів формалізми. Оскільки досліджувані моделі є динамічними системами з в'язями, для їх гамільтонового опису і квантування застосовуються метод Дірака та метод БРСТ квантування. Для опису їх класичної динаміки та квантових станів також використовуються відомі геометричні та теоретико-групові методи, такі як метод ортонормованого репера Е. Картана, метод осциляторної реалізації унітарних незвідних представлень некомпактних алгебр та методи теорії твісторів Р. Пенроуза.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації запропоновані та досліджені нові суперсиметричні моделі релятивістських об'єктів та нові формулювання відомих моделей точкових частинок, безнатягових струн і струн з ненульовим натягом як у просторі-часі, так і у твісторних просторах. Також у дисертації здобуто нові результати при дослідженні відомих формулювань суперсиметричних моделей частинок і струн. Більш детально новизну результатів, представлених у дисертаційній роботі, розкривають наведені нижче твердження.

1. Виведено нове формулювання $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі в термінах 1-форм Картана, асоційованих з генераторами $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри. Здобуто явний вираз для лагранжіана σ-моделі в термінах координат, які відповідають генераторам цієї супералгебри. Доведено, що ферміонні рівняння σ-моделі є лінійно залежними, що передбачає інваріантність її дії відносно калібрувальної κ-симетрії.

2. Здобуто вирази для густин ньотерових струмів, пов'язаних з інваріантністю дії $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі відносно глобальної $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії.

3. Для локальних симетрій дії суперструни в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі запропоновані нові калібрувальні умови світлового конуса, який утворено нуль-геодезичними на конформній межі чотиривимірного простору анти-де Сіттера AdS_4 у конформно-пласкій параметризації. Здобуті лагранжіан та гамільтоніан суперструни у цьому калібруванні в термінах суперпросторових координат.

4. В моделі $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни введено нову калібрувальну умову для κ-симетрії, яка виключає 6 з восьми координат для суперсиметрій, порушених даним супербекграундом. Рівняння суперструни в даному частковому калібруванні представлено у вигляді умови нульової кривизни для листкової 1-форми, яка розширює зв'язність Лакса $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі внесками координат для порушених суперсиметрій.

5. Доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки та $D0$-брани в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі. Встановлено відповідність між інтеґровними структурами безмасової суперчастинки та σ-моделі в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ симетричному суперпросторі.

6. Запропоновані нові супертвісторні формулювання суперструн у розмірностях $D=4,6,10$. Введені редуковані супертвісторні моделі, які відповідають $\mathcal{N}=1,2$ суперструнам у цих розмірностях та узагальнюють (супер)твісторні формулювання безмасових (супер)частинок та нуль-(супер)струн.

7. $D=10$ $\mathcal{N}=1$ суперструну у запропонованому супертвісторному формулюванні проаналізовано як гамільтонову систему з в'язями. Здобуто набори в'язей першого роду і другого роду, для яких побудовані дужки Дірака. Дослі-

джено алгебру в'язей першого роду на дужках Дірака.

8. Виявлені класичні нескінченновимірні глобальні симетрії лагранжіанів ліво- і право-біжних полів вільних $PSL(4|4,\mathbb{R})$ супертвісторів у моделі твісторної струни Берковіца та її розширенні, в якому відсутня $GL(1,\mathbb{R})$ калібрувальна симетрія. Доведено, що ці симетрії порушуються у квантовій теорії.

9. Запропоновано лоренц-гармонічне інтеґральне представлення для симетричних спінорних полів у п'ятивимірному просторі Мінковського, які задовольняють рівняння типу Дірака для вільних безмасових полів.

10. Знайдено реалізацію в амбітвісторному просторі безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ з додатною енергією. Встановлено відповідність між відомою осциляторною та амбітвісторною реалізаціями цих представлень.

11. Запропоновано 4-твісторне формулювання моделі масивної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера та встановлено його зв'язок з відомим 2-твісторним формулюванням. Здобуто нове амбітвісторне представлення хвильової функції частинки.

12. Встановлено зв'язок між компонентами $psu(2,2|4)$ супертвісторів та елементами суперматриці, параметризованої координатами $AdS_5 \times S^5$ суперпростору, й між суперпросторовим і супертвісторними формулюваннями моделі безмасової суперчастинки у цьому суперпросторі. Проведено її квантування за Діраком у 4-супертвісторному формулюванні. Розроблено амбітвісторний опис супермультиплета $D=5$ $\mathcal{N}=8$ каліброваної супергравітації.

13. Запропоновано нове формулювання моделі вільної безмасової спінової частинки у D-вимірному просторі анти-де Сіттера, реалізованому як проєктивний багатовид. Побудовані взаємодії спінової частинки з фоновими електромагнітним та абелевими антисиметричними калібрувальними полями, які узагальнюють на випадок простору анти-де Сіттера відповідні взаємодії спінової частинки у просторі Мінковського. Проведено квантування моделі за Діраком та здобуто рівняння для хвильової функції частинки.

14. Запропоновано модель замкненої безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера у даній реалізації. Побудовано її квантовий БРСТ генератор, який є вільним від аномалій для довільної розмірності D подібно до квантових нуль-(супер)струн і нуль-(супер-)p-бран у (супер)просторі Мінковського.

Практичне значення одержаних результатів. Здобуті у дисертації результати знаходяться на стику теорій суперструн, калібрувальних полів та супергравітації. Тому вони мають практичне значення для розробки єдиного теорфізичного і математичного підходу до опису бозонних і ферміонних полів у пласких та викривлених просторах. Розробка такого підходу необхідна для об'єднання принципів релятивістської квантової механіки та загальної теорії відносності.

Побудовані у дисертації нові суперсиметричні моделі спінових частинок і струн у викривлених та твісторних просторах можуть представляти інтерес для реалізації даного підходу за зазначеними нижче напрямами.

Запропоновані супертвісторні формулювання суперструн цікаво використати для їх квантування у супертвісторному просторі. Як відомо, окрім координат суперпростору супертвістори включають додаткові комутуючі спінорні координати. Врахування їх внеску у скорочення квантових аномалій може привести до зниження критичної розмірності D=10 у теорії суперструн та побудови моделей квантової теорії гравітації у розширеному супертвісторному просторі. Такий підхід може прояснити механізм утворення просторово-часової структури у ранньому Всесвіті.

Проведене у дисертації квантування моделі безмасової суперчастинки у супертвісторному формулюванні дає представлення її хвильової функції у супертвісторному просторі. Було показано, що ця хвильова функція описує поля мультиплета супергравітації, які відповідають безмасовим збудженням суперструн. У цьому зв'язку цікаво дослідити можливості розширення запропонованого опису включенням масивних бозонних і ферміонних полів з вищими спінами зі спектра збуджень суперструн. Ці поля можуть розглядатись в якості кандидатів на роль складових темної матерії поряд з іншими сценаріями, які активно досліджуються у теперішній час.

Запропоновані суперсиметричні моделі частинки зі спіном 1/2 містять нову інформацію про властивості та можливі взаємодії ферміонних та бозонних полів. Видається важливим узагальнити ці моделі на випадок масивних частинок у просторі де Ситтера та дослідити розширені суперсиметрії на його геодезичних лініях.

Результати досліджень $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі та суперструни у $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді використовуються при вивченні квантової теорії гравітації у даному бекграунді в рамках AdS_4/CFT_3 відповідності.

Особистий внесок здобувача. Усі роботи, результати яких увійшли до дисертації, виконані здобувачем особисто без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Результати, представлені в дисертації, доповідались на численних наукових заходах в Україні та за кордоном:

• IV Summer School in Modern Mathematical Physics, Institute of Physics, Belgrade, Serbia, 3-14 September 2006;

• Bogolyubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 15-18 September 2009;

• II-nd Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 22-24 December 2010;

• III-rd International Conference "Quantum Electrodynamics and Statistical Physics", NSC KIPT, Kharkiv, Ukraine, 29 August - 2 September 2011;

• III-rd Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 21-23 December 2011;

• International Conference "Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena", Gallipoli, Italy, 22-29 June 2013;

• International Seminar "Quantum Field Theory and Supersymmetry" dedicated to the 90-th birhtday anniversary of Academician D.V. Volkov, NSC KIPT, Kharkiv, Ukraine, 3 July 2015;

• International Conference "Problems of Theoretical Physics" dedicated to the 50-th anniversary of Bogolyubov ITP foundation, Bogolyubov ITP, Kyiv, Ukraine, 24-26 May 2016;

• V International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to V.A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the NAS of Ukraine, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv, Ukraine, 19-24 June 2017;

• VI International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to the centennial anniversary of the NAS of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv, Ukraine, 18-22 June 2018;

• XXVIth International Colloquium on Integrable Systems, Czech Technical University, Prague, Czech Republic, 8-12 July 2019.

Автор також доповідав матеріали дисертації на семінарах в Інституті теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера ННЦ ХФТІ НАН України.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 20 статтях, які проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus та Web of Science. Додатково 9 робіт засвідчують апробацію матеріалів дисертації та опубліковані у працях наукових конференцій, нарад, школи та колоквіуму. 13 робіт опубліковані у наукових журналах, які за класифікацією SCImago Journal and Country Rank входять до першого квартиля (Q1). 6 робіт опубліковані у наукових виданнях, віднесених до другого квартиля (Q2).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку. У ньому наведено список публікацій за темою дисертації та дані щодо апробації її результатів. Загальний обсяг дисертації 378 сторінок, в тому числі 13 таблиць. Список використаних джерел включає 371 посилання та займає 45 сторінок.

Основний зміст роботи

Вступний розділ включає огляд літератури та обґрунтування вибору теми досліджень. Далі наведені дані про зв'язок роботи з науковими програмами і темами, сформульовано мету та завдання дослідження, означено його об'єкт та предмет, перелічені використані методи досліджень, охарактеризовано наукову новизну отриманих результатів та їх практичне значення. На завершення першого розділу наведено список основних публікацій, які розкривають зміст дисертації, та особистий внесок здобувача, апробацію результатів дисертації, її структуру та обсяг.

У першому розділі «Суперструна у $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі та $\mathcal{N} = 6$ суперконформна симетрія у (1+2) розмірностях» вивчається модель суперструни в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі [1*]. Він має структуру добутку чотиривимірного простору анти-де Сіттера AdS_4 та тривимірного комплексного проєктивного простору $\mathbb{CP}^3$ і включає 32 антикомутуючі грассманові координати. Ортосимплектична $osp(4|6)$ супералгебра глобальної симетрії $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору складається з 10 генераторів $sp(4)=so(2,3)$ алгебри симетрії простору анти-де Сіттера $AdS_4=SO(2,3)/SO(1,3)$, 15 генераторів $su(4)$ алгебри симетрії $\mathbb{CP}^3=SU(4)/U(3)$ простору і $4\times6=24$ генераторів суперсиметрій. 24 з 32 грассманових координат є параметрами при цих генераторах, а решта 8 грассманових координат відповідають порушеним суперсиметріям $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору.

Наявність сектора порушених суперсиметрій істотно ускладнює структуру лагранжіана суперструни у даному суперпросторі, виведення і аналіз її динамічних рівнянь та перевірку гіпотези AdS_4/CFT_3 відповідності [2*]. Тому було запропоновано [3*], [4*] розглядати умову обернення на нуль листкових полів координат для порушених суперсиметрій $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору як часткове калібрування κ-симетрії – локальної симетрії дії суперструни з антикомутуючими параметрами [5*], [6*]. Така інтерпретація цієї умови справедлива, зокрема, коли суперструна рухається одночасно у AdS_4 та $\mathbb{CP}^3$ просторах. Накладення даної умови обмежує рух суперструни (10|24)-вимірним підсуперпростором $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору. Цей підсуперпростір має структуру суперсиметричного фактор-простору $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$, а динаміка суперструни у ньому описується відомою двовимірною σ-моделлю [3*], [4*].

Після вступного підрозділу 1.1 у підрозділі 1.2 розглядається запропоноване у нашій роботі [1] формулювання $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі в термінах диференційних форм Картана у конформному базисі. Можливість такого формулювання ґрунтується на ізоморфізмі $osp(4|6)$ супералгебри та $sconf(3|6)$ супералгебри $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії, який лежить в основі AdS_4/CFT_3 відповідності. $OSp(4|6)$ є супергрупою глобальної симетрії $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору, а $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформна симетрія є глобальною симетрією теорії Черна-Саймонса з полями матерії у суперпросторі Мінковського на межі суперпростору анти-де Сіттера AdS_4.

Форми Картана у конформному базисі означаються таким співвідношенням

$$\begin{aligned}\mathscr{G}^{-1}d\mathscr{G}=\mathfrak{c}(d)\mathfrak{g}_{sconf(3|6)}&=G^{mn}(d)M_{mn}+\omega^m(d)P_m+c^m(d)K_m+\Delta(d)D\\&+\Omega_a{}^b(d)V_b{}^a+\Omega_a{}^4(d)V_4{}^a+\Omega_4{}^a(d)V_a{}^4+\Omega_4{}^4(d)V_4{}^4\\&+\omega^\mu_a(d)Q^a_\mu+\bar\omega^{\mu a}(d)\bar Q_{\mu a}+\chi_{\mu a}(d)S^{\mu a}+\bar\chi^a_\mu(d)\bar S^\mu_a\in sconf(3|6).\end{aligned}\tag{1}$$

$\mathscr{G}$ набуває значення в $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі і залежить від його координат $\mathfrak{Z}$, а $\mathfrak{c}(d)=\{G^{mn}(d),\omega^m(d),c^m(d),\Delta(d),$ $\Omega_a{}^b(d),\Omega_a{}^4(d),\Omega_4{}^a(d),\Omega_4{}^4(d);\omega^\mu_a(d),\bar\omega^{\mu a}(d),\chi_{\mu a}(d),\ \bar\chi^a_\mu(d)\}$ $(m,n=0,1,2;a,b=1,2,3;\mu=1,2)$ є диференційними формами Картана. Ці 1-форми є коефіцієнтами при генераторах $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри $\mathfrak{g}_{sconf(3|6)}$. Вона включає генератори $\{M_{mn},P_m,K_m,D\}$ конформної алгебри $conf(1,2)$ тривимірного простору Мінковського, генератори $\{V_a{}^b,V_4{}^a,V_a{}^4,V_4{}^4=-V_a{}^a\}$ алгебри $su(4)$, представлені у вигляді суми генераторів $u(3)$ алгебри $V_a{}^b$ та генераторів $su(4)/u(3)$ фактор-алгебри $\{V_4{}^a, V_a{}^4\}$, а також генератори суперсиметрій Пуанкаре $\{Q^a_\mu, \bar{Q}_{\mu a}\}$ та генератори спеціальних конформних суперсиметрій $\{S^{\mu a}, \bar{S}^\mu_a\}$, які несуть спінорне представлення $sl(2,\mathbb{R})$ алгебри та (анти)фундаментальне представлення $su(3)$ алгебри. У σ-моделі координати $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору розглядаються як поля $\mathfrak{Z}(\xi)$, які задають відображення світового листка Σ з координатами $\xi^i = (\tau,\sigma)$ у цей фактор-простір, а їх диференціали означаються як $d\mathfrak{Z} = d\xi^i \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \xi^i} = d\tau \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \tau} + d\sigma \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \sigma}$. Аналогічно виражаються через диференціали координат світового листка форми Картана $\mathfrak{c}(d) = d\xi^i \mathfrak{c}_i$. Коефіцієнтні функції $\mathfrak{c}_i(\mathfrak{Z}, \partial\mathfrak{Z}/\partial\xi^j)$, які відповідають генераторам фактор-алгебри $osp(4|6)/(so(1,3)\times u(3))$, визначають лагранжіан σ-моделі. У запропонованому формулюванні її дія

$$S_{\sigma-\mathrm{model}} = \int_\Sigma d^2\xi \mathscr{L}_{\sigma-\mathrm{model}} \tag{2}$$

дається інтеґралом за світовим листком від лагранжіана

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\sigma-\mathrm{model}} = -\frac{T}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Bigg(\frac{1}{4}(\omega^m_i + c^m_i)(\omega_{jm} + c_{jm}) + \Delta_i\Delta_j \\ +\frac{1}{2}(\Omega_{ia}{}^4\Omega_{j4}{}^a + \Omega_{ja}{}^4\Omega_{i4}{}^a)\Bigg) - \frac{T}{2}\left(\omega^\mu_a(d)\wedge\varepsilon_{\mu\nu}\bar{\omega}^{\nu a}(d) + \chi_{\mu a}(d)\wedge\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\chi}^a_\nu(d)\right),\end{aligned} \tag{3}$$

в якому T – натяг суперструни, γ_{ij} є допоміжною листковою метрикою з детермінантом γ та оберненою метрикою γ^{ij}, $\wedge$ позначає зовнішній добуток диференційних форм, а $\varepsilon_{\mu\nu}$ і $\varepsilon^{\mu\nu}$ ($\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$) є одиничними антисиметричними спінорами у просторі двокомпонентних $sl(2,\mathbb{R})$ спінорів. У цьому ж підрозділі варіюванням дії σ-моделі (2) здобуто рівняння для ферміонних полів. Ці рівняння представлено у вигляді аналогічному тому, який мають ферміонні рівняння суперструн Гріна-Шварца у пласких суперпросторах [7*], та доведено, що з 24 рівнянь 16 є незалежними. Згідно з другою теоремою Ньотер це свідчить про інваріантність дії σ-моделі відносно 8-параметричних перетворень κ-симетрії.

Також розглянуто конкретний приклад параметризації представника $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ фактор-простору координатами, які є параметрами при генераторах $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри

$$\mathscr{G} = \exp\left(x^m P_m + \theta^\mu_a Q^a_\mu + \bar{\theta}^{\mu a}\bar{Q}_{\mu a}\right)\exp\left(\eta_{\mu a}S^{\mu a} + \bar{\eta}^a_\mu \bar{S}^\mu_a\right)\exp\left(z^a V_a{}^4 + \bar{z}_a V_4{}^a\right)\exp\left(\varphi D\right).$$

(x^m,φ) є координатами Пуанкаре простору анти-де Сіттера AdS_4, $(z^a,\bar{z}_a)$ – комплексні координати $\mathbb{CP}^3$ простору, а $(x^m, \theta^\mu_a, \bar{\theta}^{\mu a})$ параметризують $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперпростір Мінковського на межі $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперпростору. Здобуто явні вирази для форм Картана, які відповідають даному представнику, як функцій цих координат та їх диференціалів. За такої параметризації лагранжіан σ-моделі включає члени до восьмого порядку за грассмановими координатами $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперпростору.

У підрозділі 1.3 вивчено інваріантність дії σ-моделі відносно глобальної $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії [2]. Здобуто явні вирази для варіацій форм Картана у конформному базисі, параметрів інфінітезимальних перетворень із групи стабільності $SO(1,3)\times U(3)$ як функцій параметрів $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформних перетворень та координат $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперпростору, а також варіації цих координат. У цьому ж підрозділі локалізацією перетворень $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії здобуто густини ньютерових струмів. Також здобуто явні вирази для густин ньютерових струмів через координати $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору та їх листкові похідні.

У підрозділі 1.4 запропоновано нові калібрувальні умови для κ-симетрії в моделі $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперструни [3]

$$\theta^2_A=\bar\theta^{2A}=\eta_{1A}=\bar\eta^A_1=0.$$

Грассманові координати $\theta^2_A=\theta^+_A$, $\bar\theta^{2A}=\bar\theta^{+A}$, $\eta_{1A}=\eta^+_A$ і $\bar\eta^A_1=\bar\eta^{+A}$ несуть (анти)фундаментальне представлення $su(4)$ алгебри і мають додатну вагу відносно $SO(1,1)\subset SO(1,2)=SL(2,\mathbb{R})$ симетрії з генератором $M^{+-}=-2M_{02}$. Серед них 12 координат θ^+_a, $\bar\theta^{+a}$, η^+_a і $\bar\eta^{+a}$ відносяться до $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричного фактор-простору й відповідають непорушеним суперсиметріям, а інші 4 координати θ^+_4, $\bar\theta^{+4}$, η^+_4 і $\bar\eta^{+4}$ належать до сектора порушених суперсиметрій. Решта 16 грассманових координат $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору $\theta^1_A=\theta^-_A\equiv\theta_A=(\theta_a,\theta_4)$, $\bar\theta^{1A}=\bar\theta^{-A}\equiv\bar\theta^A=(\bar\theta^a,\bar\theta^4)$, $\eta_{2A}=\eta^-_A\equiv\eta_A=(\eta_a,\eta_4)$ і $\bar\eta^A_2=\bar\eta^{-A}\equiv\bar\eta^A=(\bar\eta^a,\bar\eta^4)$ є динамічними змінними суперструни у даному калібруванні. Оскільки серед них є 4 координати сектора порушених суперсиметрій $(\theta_4,\bar\theta^4,\eta_4,\bar\eta^4)$, ці калібрувальні умови не можуть бути накладені в рамках σ-моделі. Однак їх можна застосувати у тих динамічни секторах, які не можуть бути описані за допомогою σ-моделі, наприклад, коли суперструна рухається лише у просторі анти-де Сіттера [3*], [1*].

Здобуто вираз для лагранжіана суперструни у запропонованому калібруванні [3]

$$\mathscr{L}^{AdS_4\times CP^3}_{\text{sstring, l.c.}}=-\frac{T}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}g_{\text{l.c.}ij}+T\varepsilon^{ij}B_{(2)\text{l.c.}ij}. \tag{4}$$

Він включає індуковану метрику світового листка $g_{\text{l.c.}\,ij}=g^{AdS_4}_{\text{l.c.}\,ij}+g^{CP^3}_{\text{l.c.}\,ij}$, яку представлено як суму двох доданків. Вигляд першого із них визначається конформно-пласкою метрикою Пуанкаре простору анти-де Сіттера AdS_4

$$\begin{gathered}
g^{AdS_4}_{\text{l.c.}\,ij}=\frac{1}{8}e^{-4\varphi}(\partial_ix^+\partial_jx^-+\partial_jx^+\partial_ix^-)+\frac{1}{4}e^{-4\varphi}\partial_ix^1\partial_jx^1+\partial_i\varphi\partial_j\varphi\\
+\frac{1}{4}e^{-2\varphi}[\partial_ix^+(\varpi_j+4\Theta\,\Omega_{\text{bos}\,j\,a}{}^a)+\partial_jx^+(\varpi_i+4\Theta\,\Omega_{\text{bos}\,ia}{}^a)]-4e^{-4\varphi}\theta_4\bar\theta^4\eta_4\bar\eta^4\partial_ix^+\partial_jx^+,\\
\varpi(d)=ie^{-2\varphi}(d\theta_a\bar\theta^a-\theta_ad\bar\theta^a)+i(d\theta_4\bar\theta^4-\theta_4d\bar\theta^4)\\
+ie^{2\varphi}(d\eta_a\bar\eta^a-\eta_ad\bar\eta^a)+i(d\eta_4\bar\eta^4-\eta_4d\bar\eta^4),
\end{gathered}$$

де $x^{\pm} = x^2 \pm x^0$, x^1 є координатами межового простору Мінковського у базисі світлового конуса, φ параметризує ортогональний до межі вимір простору AdS_4, а $\Theta = \theta_4\bar\theta^4 + \eta_4\bar\eta^4$. Другий доданок

$$g^{CP^3}_{\mathrm{l.c.}\,ij} = \frac{1}{2}(\Omega_{\mathrm{bos}\,i\,a}{}^4\Omega_{\mathrm{bos}\,j\,4}{}^a + \Omega_{\mathrm{bos}\,j\,a}{}^4\Omega_{\mathrm{bos}\,i\,4}{}^a)$$
$$+e^{-\varphi}[\partial_i x^+(\Omega_{\mathrm{bos}\,j\,a}{}^4\hat{\bar\eta}^a\bar\eta^4 - \Omega_{\mathrm{bos}\,j\,4}{}^a\hat\eta_a\eta_4) + \partial_j x^+(\Omega_{\mathrm{bos}\,i\,a}{}^4\hat{\bar\eta}^a\bar\eta^4 - \Omega_{\mathrm{bos}\,i\,4}{}^a\hat\eta_a\eta_4)]$$
$$+\frac{1}{2}[\partial_i x^+(\varepsilon_{abc}\Omega_{\mathrm{bos}\,j\,4}{}^a\hat{\bar\eta}^b\hat{\bar\eta}^c - \varepsilon^{abc}\Omega_{\mathrm{bos}\,j\,a}{}^4\hat\eta_b\hat\eta_c) + \partial_j x^+(\varepsilon_{abc}\Omega_{\mathrm{bos}\,i\,4}{}^a\hat{\bar\eta}^b\hat{\bar\eta}^c - \varepsilon^{abc}\Omega_{\mathrm{bos}\,i\,a}{}^4\hat\eta_b\hat\eta_c)]$$
$$+2[(\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a)^2 + e^{-\varphi}(\varepsilon_{abc}\hat{\bar\eta}^a\hat{\bar\eta}^b\hat{\bar\eta}^c\bar\eta^4 + \varepsilon^{abc}\hat\eta_a\hat\eta_b\hat\eta_c\eta_4) + 2e^{-2\varphi}\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a\eta_4\bar\eta^4]\partial_i x^+\partial_j x^+$$

є сумою відображення на світовий листок інфінітезимального елемента довжини $\mathbb{CP}^3$ простору, вираженого через відображення його комплексного фільбайна $\Omega_{\mathrm{bos}\,i4}{}^a(z,\bar z) = \partial_i z^b\Omega_{b|}{}^a(z,\bar z) + \partial_i\bar z_b\Omega^{b|a}(z,\bar z)$, $\Omega_{\mathrm{bos}\,ia}{}^4(z,\bar z) = \partial_i z^b\Omega_{b|a}(z,\bar z) + \partial_i\bar z_b\Omega^{b|}{}_a(z,\bar z)$, та членів другого і четвертого порядків за грассмановими координатами. Другий член у лагранжіані (4) є листковим відображенням калібрувальної 2-форми Нев'є-Шварца, взаємодія струни з якою узагальнює мінімальну взаємодію точкової зарядженої частинки з електромагнітним полем. У запропонованому калібруванні ця 2-форма дорівнює

$$B_{(2)\mathrm{l.c.}}(d) = \frac{1}{2}e^{-4\varphi}(\theta_4\bar\theta^4 + \eta_4\bar\eta^4)dx^1\wedge dx^+ + e^{-2\varphi}\hat\eta_a\hat{\bar\eta}^a dx^1\wedge dx^+$$
$$+\frac{1}{2}e^{-2\varphi}(\hat\eta_a\hat d\bar\theta^a + \hat d\theta_a\hat{\bar\eta}^a)\wedge dx^+ + \frac{1}{4}e^{-2\varphi}(d\theta_4\bar\eta^4 - d\eta_4\bar\theta^4 + \eta_4 d\bar\theta^4 - \theta_4 d\bar\eta^4)\wedge dx^+$$
$$+ie^{-\varphi}\hat\eta_a\theta_4 dx^+\wedge\Omega_{\mathrm{bos}\,4}{}^a(d) + ie^{-\varphi}\hat{\bar\eta}^a\bar\theta^4 dx^+\wedge\Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^4(d)$$
$$+ie^{-2\varphi}(\theta_4\bar\eta^4 - \eta_4\bar\theta^4)dx^+\wedge\Omega_{\mathrm{bos}\,a}{}^a(d).$$

У підрозділі 1.5 здобутий лагранжіан суперструни представлено у змінних фазового простору $(x^{\pm}, p_{\pm})$, (x^1, p_1), (φ, p_φ), (z^M, p_N) та закріплено калібрування світлового конуса для репараметризаційної симетрії світового листка

$$x^+(\tau,\sigma) = \tau, \quad p_-(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\tilde P_- = \mathrm{const}.$$

В результаті розв'язання в'язей на компоненти імпульсу знайдено вираз для густини гамільтоніана суперструни через калібрувально-інваріантні фізичні змінні [4]

$$\mathscr{H}^{AdS_4\times CP^3}_{\mathrm{sstring,\,l.c.}}(\tau,\sigma) = \frac{\tilde T}{2}\exp\left(-\frac{4\varphi}{\sqrt{\tilde P_-}}\right)[\hat\eta_a\hat\partial_\sigma\bar\theta^a + \hat\partial_\sigma\theta_a\hat{\bar\eta}^a + \frac{1}{2}(\partial_\sigma\theta_4\bar\eta^4 - \theta_4\partial_\sigma\bar\eta^4 - \partial_\sigma\eta_4\bar\theta^4$$
$$+\eta_4\partial_\sigma\bar\theta^4)] + \frac{\tilde T}{4}\exp\left(-\frac{4\varphi}{\sqrt{\tilde P_-}}\right)\left[\frac{2}{\tilde T}\exp\left(\frac{4\varphi}{\sqrt{\tilde P_-}}\right)p_1^2 + \frac{\tilde T}{8}\exp\left(-\frac{4\varphi}{\sqrt{\tilde P_-}}\right)\partial_\sigma x^1\partial_\sigma x^1\right.$$
$$+\frac{1}{2\tilde T}p_\varphi^2 + \frac{\tilde T}{2}\partial_\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi + \frac{1}{2\tilde T}(p\cdot p) + \frac{\tilde T}{2}\partial_\sigma z^M g_{MN}\partial_\sigma z^N + \frac{8\tilde P_-}{\tilde T}\exp\left(\frac{8\varphi}{\sqrt{\tilde P_-}}\right)((q\cdot q) - B)$$
$$\left.+4\sqrt{\tilde P_-}\exp\left(\frac{4\varphi}{\sqrt{\tilde P_-}}\right)\left(C\partial_\sigma x^1 - \tilde q_M\partial_\sigma z^M - \frac{1}{\tilde T}(p\cdot q)\right)\right], \quad \tilde T = \frac{T}{\tilde P_-},$$

де

$$B = 2[(\hat{\eta}_a \hat{\bar{\eta}}^a)^2 + e^{-\varphi}(\varepsilon_{abc}\hat{\bar{\eta}}^a\hat{\bar{\eta}}^b\hat{\bar{\eta}}^c\bar{\eta}^4 + \varepsilon^{abc}\hat{\eta}_a\hat{\eta}_b\hat{\eta}_c\eta_4) + 2e^{-2\varphi}\eta_4\bar{\eta}^4(\hat{\eta}_a\hat{\bar{\eta}}^a - e^{-2\varphi}\theta_4\bar{\theta}^4)],$$

$$C = e^{-2\varphi}\left(\hat{\eta}_a\hat{\bar{\eta}}^a + \frac{1}{2}e^{-2\varphi}\Theta\right), \quad \Theta = \theta_4\bar{\theta}^4 + \eta_4\bar{\eta}^4,$$

$$q_M = \tfrac{1}{2}(\Omega_{\mathrm{bos}\,M4}{}^a\varepsilon_{abc}\hat{\bar{\eta}}^b\hat{\bar{\eta}}^c - \Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^4\varepsilon^{abc}\hat{\eta}_b\hat{\eta}_c)$$
$$+e^{-\varphi}(\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^4\hat{\bar{\eta}}^a\bar{\eta}^4 - \Omega_{\mathrm{bos}\,M4}{}^a\hat{\eta}_a\eta_4) + e^{-2\varphi}\Theta\,\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^a,$$

$$\tilde{q}_M = ie^{-\varphi}\left[\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^4\hat{\bar{\eta}}^a\bar{\theta}^4 + \Omega_{\mathrm{bos}\,M4}{}^a\hat{\eta}_a\theta_4 + e^{-\varphi}(\theta_4\bar{\eta}^4 - \eta_4\bar{\theta}^4)\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^a\right].$$

У цих виразах передбачається, що 6 дійсних координат z^M параметризують $\mathbb{CP}^3$ простір з метрикою $g_{MN}(z) = \frac{1}{2}(\Omega_{\mathrm{bos}\,Ma}{}^4\Omega_{\mathrm{bos}\,N4}{}^a + \Omega_{\mathrm{bos}\,Na}{}^4\Omega_{\mathrm{bos}\,M4}{}^a)$. Також введено скорочене позначення скалярного добутку $D = 6$ векторів з оберненою метрикою $g^{MN}(z)$: $q_M g^{MN} q_N = (q \cdot q)$ і т.д. Густина гамільтоніана включає члени другого та четвертого порядків за грассмановими координатами суперпростору. Було показано, що його квадратична частина співпадає з гамільтоніаном суперструни типу IIA у пласкому суперпросторі у калібруванні світлового конуса. Здобутий вираз для гамільтоніана може використовуватись для перевірки гіпотези AdS_4/CFT_3 відповідності. Передбачається, що його власні значення визначають спектр енергій квантованої суперструни, який співпадає зі спектром аномальних розмірностей калібрувально-інваріантних операторів у $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ суперконформній теорії Черна-Саймонса з полями матерії.

У другому розділі основної частини, який має назву «Класична інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки і $D0$-брани у $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі. Мінімальне розширення інтеґровної $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі» вивчається інтеґровна структура моделі $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни в різних секторах та динамічних режимах. У підрозділі 2.1 коротко окреслено коло завдань, які будуть розв'язані у даному розділі.

Для дослідження можливої інтеґровності рівнянь суперструни у $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі у підрозділі 2.2 запропоновано параметризувати його сектор порушених суперсиметрій чотирма $SL(2,\mathbb{R})$ спінорними координатами з дійсними компонентними, які є дійсною та уявною частинами двокомпонентних спінорів $\theta_4^\mu = (\theta_4^+, \theta_4^-) \equiv \theta^\mu$ і $\eta_4^\mu = (\eta_4^+, \eta_4^-) \equiv \eta^\mu$. Кожен з них можна розглядати як мінімальний $SL(2,\mathbb{R})$-коваріантний об'єкт у секторі порушених суперсиметрій. Запропоновані умови, які частково закріплюють калібрування κ-симетрії дії суперструни. У кожному з таких калібрувань відмінним від нуля залишається лише один зі спінорів, тобто у секторі порушених суперсиметрій залишаються $8 - 6 = 2$ координати. Це приводить до мінімальних розширень інтеґровної $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі. У підрозділі 2.2 детально розглянуто часткове калібрування, в якому не обертається на нуль лише дійсна частина θ^μ, тобто $\bar{\theta}^\mu = \theta^\mu$ та $\eta^\mu = 0$ [5]. Здобуто вираз для дії суперструни

$$S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\mathrm{sstring,\,min}} = \int\limits_\Sigma d^2\xi \mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\mathrm{sstring,\,min}}: \qquad (5)$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sstring, min}} = -\frac{T}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\left(E_i^m E_{jm} + E_i^3 E_j^3 - \mathsf{E}_{i\,a}\mathsf{E}_j{}^a\right)\\
-\frac{T}{2}\left[(\omega_a^\mu(d) + 2i\Omega_a{}^4(d)\theta^\mu)\wedge(\bar\omega_\mu^a(d) - 2i\Omega_4{}^a(d)\theta_\mu)\right.\\
\left. + \chi_{\mu\,a}(d)\wedge\bar\chi^{\mu\,a}(d)\right] + T(\Omega_a{}^4(d)\wedge\Omega_4{}^a(d) + 2i\Omega_a{}^a(d)\wedge\Delta(d))(\theta\theta),
\end{aligned}
$$

де

$$
\begin{gathered}
E^m(d) = \frac{1}{2}(\omega^m(d) + c^m(d)) - \frac{i}{2}\varepsilon^{mk\,l}G_{k\,l}(d)(\theta\theta) - id\theta\sigma^m\theta, \quad E^3(d) = -\Delta(d),\\
\mathsf{E}_a(d) = i(\Omega_a{}^4(d) + 2\chi_{\mu a}(d)\theta^\mu), \quad \mathsf{E}^a(d) = i(\Omega_4{}^a(d) - 2\bar\chi_\mu^a(d)\theta^\mu)
\end{gathered}
$$

є бозонними компонентами суперфільбайна $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору у запропонованому калібруванні. При $\theta^\mu = 0$ цей лагранжіан переходить у лагранжіан σ-моделі у конформному базисі (3).

Варіюванням дії (5) за координатами $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперпростору здобуто рівняння суперструни у цьому калібруванні [5]. Ці рівняння представлено у вигляді степеневих розкладів за θ^μ та $d\theta^\mu$, але через складну структуру нижче наведені лише їх перші члени

$$
\begin{gathered}
\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_j{}^{0'm}) + 2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(G_i{}^{mn}G_j{}^{0'}{}_n + G_i{}^{3m}\Delta_j)\\
+2i\left(\omega_{(1)}{}_a^\mu(d)\wedge\sigma^m_{\mu\nu}\bar\omega_{(1)}{}^{\nu a}(d) - \omega_{(3)}{}_a^\mu(d)\wedge\sigma^m_{\mu\nu}\bar\omega_{(3)}{}^{\nu a}(d)\right) + \ldots = 0,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Delta_j) - 2\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_i{}^{3m}G_j{}^{0'}{}_m\\
+2\left(\omega_{(1)}{}_a^\mu(d)\wedge\bar\omega_{(1)}{}_\mu^a(d) + \omega_{(3)}{}_a^\mu(d)\wedge\bar\omega_{(3)}{}_\mu^a(d)\right) + \ldots = 0,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
\partial_i(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_{j4}{}^a) + i\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\Omega_{i4}{}^b(\Omega_{jb}{}^a + \delta_b^a\Omega_{jc}{}^c)\\
-2i\varepsilon^{abc}\left(\omega_{(1)}{}_b^\mu(d)\wedge\omega_{(1)\mu c}(d) + \omega_{(3)}{}_b^\mu(d)\wedge\omega_{(3)\mu c}(d)\right) + \ldots = 0 \text{ та к.с.},
\end{gathered}
\tag{8}
$$

$$
V_+^{ij}G_i{}^{0'm}\tilde\sigma_m^{\mu\nu}\omega_{(1)j\,\nu a} - iV_+^{ij}\Delta_i\omega_{(1)j}{}^\mu{}_a - V_+^{ij}\varepsilon_{abc}\Omega_{i4}{}^b\bar\omega_{(1)j}{}^{\mu c} + \ldots = 0 \text{ та к.с.}, \tag{9}
$$

$$
V_-^{ij}G_i{}^{0'm}\tilde\sigma_m^{\mu\nu}\omega_{(3)j\,\nu a} + iV_-^{ij}\Delta_i\omega_{(3)j}{}^\mu{}_a + V_-^{ij}\varepsilon_{abc}\Omega_{i4}{}^b\bar\omega_{(3)j}{}^{\mu c} + \ldots = 0 \text{ та к.с.}, \tag{10}
$$

де $V_\pm^{ij} = \frac{1}{2}(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\pm\varepsilon^{ij})$ є листковими проєкторами, які також входять до ферміонних рівнянь суперструн у пласких суперпросторах. При $\theta^\mu = 0$ ці рівняння переходять у рівняння $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-моделі. Запис рівнянь (6)-(10) в термінах форм Картана для генераторів з чотирьох власних підпросторів $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму $osp(4|6)$ супералгебри зумовлений тим, що вони входять до виразу для зв'язності Лакса. Кривизна цієї зв'язності Лакса обертається на нуль на рівняннях σ-моделі, що доводить їх класичну інтеґровність. Відзначимо, що $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ σ-модель належить до сімейства класично інтеґровних двовимірних моделей у суперсиметричних фактор-просторах [8*]. Ці фактор-простори відзначаються тим, що (анти)комутаційні співвідношення їх супералгебр симетрії інваріантні відносно $\mathbb{Z}_4$ автоморфізму, а генератори алгебри стабільності належать до його інваріантного підпростору, тобто підпростору, який відповідає власному значенню $+1$. У конформному базисі (1) вирази для форм Картана, які відповідають генераторам $so(1,3) \oplus u(3)$ алгебри стабільності, є такими $\{G^{mn}(d), G^{3m}(d) = \frac{1}{2}(c^m(d) - \omega^m(d)), \Omega_a{}^b(d)\}$. $\{G^{0'm}(d) = \frac{1}{2}(c^m(d) + \omega^m(d)), G^{0'3}(d) = -\Delta(d), \Omega_4{}^a(d), \Omega_a{}^4(d)\}$ є формами Картана для генераторів з власним значенням -1, які належать до фактор-алгебр $so(2,3)/so(1,3)$ і $su(4)/u(3)$. Разом 10 форм Картана $\{G^{0'3}(d), G^{0'm}(d), G^{3m}(d), G^{mn}(d)\}$ відповідають генераторам $M_{\underline{mn}}$ ($\underline{m}, \underline{n} = 0', 0, 1, 2, 3$) $so(2,3) = sp(4)$ підалгебри $osp(4|6)$ супералгебри. Генератори суперсиметрій $Q_{(1,3)}{}_\mu^a = Q_\mu^a \pm iS_\mu^a$ та $\bar{Q}_{(1,3)\,\mu a} = \bar{Q}_{\mu a} \mp i\bar{S}_{\mu a}$ належать до підпросторів з власними значеннями $\pm i$. Асоційовані з ними форми Картана означаються як $\omega_{(1,3)}{}_a^\mu(d) = \frac{1}{2}(\omega_a^\mu(d) \pm i\chi_a^\mu(d))$ та $\bar{\omega}^{\mu a}_{(1,3)}(d) = \frac{1}{2}(\bar{\omega}^{\mu a}(d) \mp i\bar{\chi}^{\mu a}(d))$. Варіюванням дії (5) за координатами сектора порушених суперсиметрій здобуто 8 інших ферміонних рівнянь

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{i\,a}{}^4\bar{\chi}_j{}^{\mu a} - \Omega_{i\,4}{}^a\chi_{j\,a}{}^\mu) + i(\Omega_4{}^a(d) \wedge \omega_a^\mu(d) + \Omega_a{}^4(d) \wedge \bar{\omega}^{\mu a}(d)) + \ldots = 0, \quad (11)$$

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{i\,a}{}^4\bar{\chi}_j{}^{\mu a} + \Omega_{i\,4}{}^a\chi_{j\,a}{}^\mu) - i(\Omega_4{}^a(d) \wedge \omega_a^\mu(d) - \Omega_a{}^4(d) \wedge \bar{\omega}^{\mu a}(d)) + \ldots = 0, \quad (12)$$

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{i\,4}{}^a\omega_{j\,a}{}^\mu - \Omega_{i\,a}{}^4\bar{\omega}_j{}^{\mu a}) + i(\Omega_4{}^a(d) \wedge \chi_a^\mu(d) + \Omega_a{}^4(d) \wedge \bar{\chi}^{\mu a}(d)) + \ldots = 0, \quad (13)$$

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}(\Omega_{i\,4}{}^a\omega_{j\,a}{}^\mu + \Omega_{i\,a}{}^4\bar{\omega}_j{}^{\mu a}) + i(\Omega_4{}^a(d) \wedge \chi_a^\mu(d) - \Omega_a{}^4(d) \wedge \bar{\chi}^{\mu a}(d)) + \ldots = 0. \quad (14)$$

Основним результатом підрозділу 2.2 є представлення рівнянь суперструни у запропонованому частковому калібруванні κ-симетрії (6)-(14) у вигляді умови нульової кривизни

$$d\mathcal{L}(d) - \mathcal{L}(d) \wedge \mathcal{L}(d) = 0$$

для листкової 1-форми $\mathcal{L}(d)$, яка набуває значення в $osp(4|6)$ супералгебрі ізометрії $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпростору [5]. Цей результат вказує на можливість розширення інтеґровної структури $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ σ-моделі на нелінійні рівняння, які випливають із повної дії $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструни та враховують внески координат сектора порушених суперсиметрій [9*], [10*].

У підрозділі 2.3 розглянуто модель безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперпросторі [4*]

$$S_{\text{sparticle}}^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))} = \int_L \frac{d\tau}{e}\Big(G_\tau^{0'm'}G^{0'}_{\tau m'} + \Omega_{\tau a}{}^4\Omega_{\tau 4}{}^a\Big)\,, \quad (15)$$

де $G_\tau^{0'm'}$ ($m' = 0,1,2,3$) та $\Omega_{\tau a}{}^4$, $\Omega_{\tau 4}{}^a$ є відображеннями форм Картана для генераторів фактор-алгебр $so(2,3)/so(1,3)$ і $su(4)/u(3)$ на світову лінію L, а множник Лагранжа $e(\tau)$ є одновимірним аналогом метрики на світовому листку струни. Варіювання дії (15) за цим множником Лагранжа приводить до умови, яка виражає світлоподібність імпульсу частинки у лагранжівому формулюванні. У гамільтоновому формулюванні ця умова є в'яззю першого роду і генератором репараметризаційної симетрії дії. Оскільки вона не є динамічним рівнянням, для спрощення вигляду динамічних рівнянь, які випливають із варіації дії (15) за координатами $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперпростору, було закріплено калібрування репараметризаційної симетрії умовою $e(\tau)=1$. Виведено бозонні

$$\frac{dG_\tau{}^{0'm}}{d\tau}+2G_\tau{}^{mn}G_\tau{}^{0'}{}_n+2G_\tau{}^{3m}\Delta_\tau=0,$$
$$\frac{d\Delta_\tau}{d\tau}-2G_\tau{}^{3m}G_\tau{}^{0'}{}_m=0,$$
$$\frac{d\Omega_{\tau 4}{}^a}{d\tau}+i\Omega_{\tau 4}{}^b(\Omega_{\tau b}{}^a+\delta_b^a\Omega_{\tau c}{}^c)=0 \text{ та к.с.}$$

і ферміонні рівняння суперчастинки

$$G_\tau{}^{0'm}\tilde{\sigma}_m^{\mu\nu}\omega_{(1)\tau\nu a}-i\Delta_\tau\omega_{(1)\tau}{}^\mu_a-\varepsilon_{abc}\Omega_{\tau 4}{}^b\bar{\omega}_{(1)\tau}{}^{\mu c}=0 \text{ та к.с.},$$
$$G_\tau{}^{0'm}\tilde{\sigma}_m^{\mu\nu}\omega_{(3)\tau\nu a}+i\Delta_\tau\omega_{(3)\tau}{}^\mu_a+\varepsilon_{abc}\Omega_{\tau 4}{}^b\bar{\omega}_{(3)\tau}{}^{\mu c}=0 \text{ та к.с.}$$

Для здобутих рівнянь знайдено представлення у формі рівняння Лакса

$$\frac{d\mathfrak{L}^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}}{d\tau}+\left[\mathfrak{M},\mathfrak{L}^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}\right]=0,$$

де

$$\mathfrak{L}^{OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))}_{\text{sparticle}}=2G_\tau{}^{0'm}M_{0'm}+\Delta_\tau D+\Omega_{\tau a}{}^4V_4{}^a+\Omega_{\tau 4}{}^aV_a{}^4$$

та

$$\mathfrak{M}=\mathscr{G}^{-1}\frac{d}{d\tau}\mathscr{G}=\sum_{\mathfrak{j}\in 0,1,2,3}\mathfrak{c}^{\mathfrak{j}}_\tau\mathfrak{g}_{\mathfrak{j}}\in osp(4|6)$$

є компонентами пари Лакса, й відтак доведено їх класичну інтеґровність [6].

Доведення класичної інтеґровності рівнянь безмасової $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперчастинки у підрозділі 2.3 узагальнено на випадок рівнянь безмасової суперчастинки в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі [7]. Дія $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперчастинки має такий вигляд

$$S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}=\int\limits_L\frac{d\tau}{e}\left(\mathcal{E}_{\tau m'}\mathcal{E}^{m'}_\tau-\mathsf{E}_{\tau a}\mathsf{E}_\tau{}^a\right),$$

де $\mathcal{E}^{m'}_\tau$ і $\mathsf{E}_{\tau a}$, $\mathsf{E}_\tau{}^a$ представляють відображення на світову лінію бозонних компонентів 1-форми суперфільбайна $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпростору. Вони мають вигляд степеневих розкладів за координатами сектора порушених суперсиметрій $(\theta^\mu,\bar{\theta}^\mu,\eta_\mu,\bar{\eta}_\mu)$, коефіцієнтами яких є форми Картана для генераторів $osp(4|6)$ супералгебри та диференціали цих координат. Здобуто динамічні рівняння суперчастинки та представлено їх у формі рівняння Лакса

$$\frac{d\mathfrak{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}}{d\tau}+\left[\mathfrak{M},\mathfrak{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}\right]=0,$$

де компонента пари Лакса $\mathfrak{M}$ є такою ж як і у випадку $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперчастинки, а компонента $\mathfrak{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{\text{sparticle}}$ враховує залежність від координат сектора порушених суперсиметрій.

Доведення класичної інтеґровності рівнянь безмасової суперчастинки в $AdS_4\times\mathbb{CP}^3$ суперпросторі узагальнено на випадок $D0$-брани у даному суперпросторі [11*]. Дію $D0$-брани – точкового непертурбативного об'єкта в теорії суперструн типу IIA – представлено у вигляді

$$S^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}=\int\limits_L d\tau\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e\Phi_L^2}\left(\mathcal{E}_{\tau m'}\mathcal{E}_\tau^{m'}-\mathsf{E}_{\tau a}\mathsf{E}_\tau{}^a\right)-em^2\right]+mA_{L\tau}\right\},$$

де m – її маса. Останній член у дії описує взаємодію $D0$-брани з калібрувальною 1-формою Рамона-Рамона $A_L(d)$, яка присутня у спектрі станів замкненої суперструни типу IIA. Заряд $D0$-брани по відношенню до цього калібрувального поля дорівнює її масі m. Рівняння $D0$-брани представлено у формі рівняння Лакса

$$\frac{d\mathfrak{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}}{d\tau}+\left[\mathfrak{M},\mathfrak{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}\right]=0,$$

де компонента пари Лакса $\mathfrak{L}^{AdS_4\times\mathbb{CP}^3}_{D0-\text{brane}}$ враховує внесок поля Рамона-Рамона та ненульову масу m. Це доводить їх класичну інтеґровність [8].

У розділі 3 під назвою «Класичні та квантові симетрії (супер)твісторних формулювань моделей релятивістських струн у (супер)просторах Мінковського» досліджується поєднання теорій суперструн та твісторів. З цією метою твістороподібне формулювання [12*], [13*], [14*] (супер)струн у (супер)просторах Мінковського, яке використовує спінорні компоненти діади Ньюмена-Пенроуза для $D=4$ та її розширення на довільні вищі розмірності, включаючи $D=6,10$, узагальнено до супертвісторного формулювання.

Після вступного підрозділу 3.1 у підрозділі 3.2 здобуті твісторні формулювання моделей бозонної струни та суперструн у $D=4$ (супер)просторі Мінковського у лагранжівому та гамільтоновому підходах [9], [10]. У пункті 3.2.1 здобуто твісторне формулювання бозонної струни [9]

$$\begin{gathered}S^{D=4}_{\text{string, tw}}=\int\limits_\Sigma L^{D=4}_{\text{string, tw}}(\xi):\\ L^{D=4}_{\text{string, tw}}(\xi)=\frac{-i}{4(\alpha')^{1/2}}\left[e^{[+2]}\wedge\omega_Z^{[-2]}(d)-e^{[-2]}\wedge\omega_W^{[+2]}(d)\right]+\frac{c}{2}\,e^{[-2]}\wedge e^{[+2]},\\ -\bar u^-_{\dot\alpha}d\tilde x^{\dot\alpha\alpha}u^-_\alpha=\frac{i}{2}\,\omega_Z^{[-2]}(d)=\frac{i}{2}(\bar Z^-_{\boldsymbol\alpha}dZ^{\boldsymbol\alpha-}-d\bar Z^-_{\boldsymbol\alpha}Z^{\boldsymbol\alpha-}),\\ -\bar v^+_{\dot\alpha}d\tilde x^{\dot\alpha\alpha}v^+_\alpha=\frac{i}{2}\,\omega_W^{[+2]}(d)=\frac{i}{2}(\bar W^+_{\boldsymbol\alpha}dW^{\boldsymbol\alpha+}-d\bar W^+_{\boldsymbol\alpha}W^{\boldsymbol\alpha+}).\end{gathered}\tag{16}$$

Дію струни (16) представлено у вигляді інтеґрала від лагранжівої 2-форми, яка містить компоненти діади Ньюмена-Пенроуза $v^{\alpha}_{(\alpha)}=(u^{\alpha-},v^{\alpha+})\in SL(2,\mathbb{C})$,

$\bar{v}^{\dot{\alpha}}_{(\dot{\alpha})} = (\bar{u}^{\dot{\alpha}-}, \bar{v}^{\dot{\alpha}+}) \in \overline{SL(2,\mathbb{C})}$ та 1-форми цвайбайна $e^{[\pm 2]} = d\xi^{\mu} e^{[\pm 2]}_{\mu}$ з детермінантом $e = \frac{1}{2} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]}$. Ваги компонентів діади та цвайбайна відносно $SO(1,1)$ групи локальної симетрії, яка діє у дотичному просторі до світового листка, наведено у вигляді їх верхніх індексів. α' є параметром нахилу траєкторій Редже, а c – числовий коефіцієнт, тому натяг струни дорівнює $T = \frac{1}{2c\alpha'}$.

У запропонованому формулюванні динамічними змінними є цвайбайн та пара твісторів Пенроуза $Z^{\boldsymbol{\alpha}-} = (\mu^{\alpha-}, \bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}})$, $W^{\boldsymbol{\alpha}+} = (\nu^{\alpha+}, \bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}})$ і дуальних твісторів $\bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\alpha}} = (u^{-}_{\alpha}, \bar{\mu}^{\dot{\alpha}-})$, $\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}} = (v^{+}_{\alpha},\ \bar{\nu}^{\dot{\alpha}+})$ ($\boldsymbol{\alpha} = 1, ..., 4$; $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$), які реалізують (анти)фундаментальне представлення групи $SU(2,2)$ чотирикратної накривної конформної групи чотиривимірного простору Мінковського. Твістори задовольняють умови нульової норми та ортогональності

$$\bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}-} = u^{-}_{\alpha} \mu^{\alpha-} + \bar{\mu}^{\dot{\alpha}-} \bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}} = 0, \quad \bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}} W^{\boldsymbol{\alpha}+} = v^{+}_{\alpha} \nu^{\alpha+} + \bar{\nu}^{\dot{\alpha}+} \bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}} = 0, \tag{17}$$

$$\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}-} = v^{+}_{\alpha} \mu^{\alpha-} + \bar{\nu}^{\dot{\alpha}+} \bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}} = 0, \quad (\bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}-})^{\dagger} = \bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\alpha}} W^{\boldsymbol{\alpha}+} = 0, \tag{18}$$

а їх проєкційні частини складають нормовану діаду Ньюмена-Пенроуза

$$u^{\alpha-} v^{+}_{\alpha} = 1, \quad \bar{u}^{\dot{\alpha}-} \bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}} = 1 \ \Leftrightarrow\ W^{\boldsymbol{\alpha}+} I_{\boldsymbol{\alpha\beta}} Z^{\boldsymbol{\beta}-} = 1, \quad \bar{W}^{+}_{\boldsymbol{\alpha}} I^{\boldsymbol{\alpha\beta}} \bar{Z}^{-}_{\boldsymbol{\beta}} = 1. \tag{19}$$

Із умов (19) випливає, що компоненти діади утворюють нормований базис у просторі двокомпонентних $SL(2,\mathbb{C})$ спінорів. Ці умови порушують $SU(2,2)$ симетрію твісторного простору до симетрії Пуанкаре $ISO(1,3)$, яка є глобальною симетрією дії струни завдяки присутності у ній розмірного параметра натягу $[T] = [L^{-2}]$. Загалом 6 умов зводять число незалежних компонентів твісторів до десяти. Стільки ж компонент разом мають просторово-часові координати $x^{\dot{\alpha}\alpha} = x^{m} \tilde{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}_{m}$, де $\tilde{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}_{m}$ – релятивістські матриці Паулі, та нормована діада. Розв'язками цих умов є вирази для головних спінорних частин твісторів через проєкції просторово-часових координат на компоненти діади

$$\mu^{\alpha-} = i\bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha}, \quad \nu^{\alpha+} = i\bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha}; \quad \bar{\mu}^{\dot{\alpha}-} = -i x^{\dot{\alpha}\alpha} u^{-}_{\alpha}, \quad \bar{\nu}^{\dot{\alpha}+} = -i x^{\dot{\alpha}\alpha} v^{+}_{\alpha},$$

які є прикладами співвідношень інцидентності в теорії твісторів. Варіюванням дії (16) з урахуванням умов (17)-(19) виведені рівняння струни у твісторному формулюванні та показана їх еквівалентність рівнянням мінімального вкладення світового листка у методі ортонормованого репера Е. Картана [15*], [16*].

Твісторне формулювання бозонної струни узагальнено у пункті 3.2.2 до супертвісторного формулювання $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни в термінах двох $SU(2,2|1)$ супертвісторів $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} = (\mu^{\alpha-}, \bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}}, \bar{\eta}^{-})$, $\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} = (\nu^{\alpha+}, \bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}}, \bar{\zeta}^{+})$ та дуальних супертвісторів $\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}} = (u^{-}_{\alpha}, \bar{\mu}^{\dot{\alpha}-}, \eta^{-})$, $\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} = (v^{+}_{\alpha}, \bar{\nu}^{\dot{\alpha}+}, \zeta^{+})$, кожен з яких включає чотири бозонні компоненти та одну комплексну грассманову компоненту. Супертвістори задовольняють $SU(2,2|1)$-інваріантні умови нульової норми та ортогональності

$$\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} = u^{-}_{\alpha} \mu^{\alpha-} + \bar{\mu}^{\dot{\alpha}-} \bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}} + \eta^{-} \bar{\eta}^{-} = 0,\ \bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} \mathcal{W}^{\mathcal{A}+} = v^{+}_{\alpha} \nu^{\alpha+} + \bar{\nu}^{\dot{\alpha}+} \bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}} + \zeta^{+} \bar{\zeta}^{+} = 0,$$
$$\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} = v^{+}_{\alpha} \mu^{\alpha-} + \bar{\nu}^{\dot{\alpha}+} \bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}} + \zeta^{+} \bar{\eta}^{-} = 0,\ \bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}} \mathcal{W}^{\mathcal{A}+} = u^{-}_{\alpha} \nu^{\alpha+} + \bar{\mu}^{\dot{\alpha}-} \bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}} + \eta^{-} \bar{\zeta}^{+} = 0.$$

Ці умови забезпечують рівність числа незалежних компонентів двох супертвісторів сумі числа координат $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперпростору Мінковського ($x_{\alpha\dot{\alpha}}$, θ^{α}, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$) та числа компонентів нормованої діади Ньюмена-Пенроуза. Розв'язок цих умов відносно головних спінорних частин супертвісторів

$$\mu^{\alpha-} = i\bar{u}^{-}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha} + \theta^{\alpha}\bar{\eta}^{-},\ \bar{\eta}^{-} = 2\bar{u}^{\dot{\alpha}-}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},\ \nu^{\alpha+} = i\bar{v}^{+}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha} + \theta^{\alpha}\bar{\zeta}^{+},\ \bar{\zeta}^{+} = 2\bar{v}^{\dot{\alpha}+}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}};$$
$$\bar{\mu}^{\dot{\alpha}-} = -ix^{\dot{\alpha}\alpha}u^{-}_{\alpha} + \eta^{-}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}},\ \eta^{-} = 2u^{\alpha-}\theta_{\alpha}; \bar{\nu}^{\dot{\alpha}+} = -ix^{\dot{\alpha}\alpha}v^{+}_{\alpha} + \zeta^{+}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}},\ \zeta^{+} = 2v^{\alpha+}\theta_{\alpha}$$

представляє суперсиметричне узагальнення співвідношень інцидентності для твісторів Пенроуза.

Дія $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у запропонованому супертвісторному формулюванні має вигляд [9]

$$S^{D=4,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring, stw}} = \int\limits_{\Sigma}\Bigg(\frac{-i}{4(\alpha')^{1/2}} \left[e^{[+2]} \wedge \omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d) - e^{[-2]} \wedge \omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(d) \right] + \frac{c}{2} e^{[-2]} \wedge e^{[+2]}$$
$$- \frac{s}{8c\alpha'} \left[\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d) \wedge \omega^{[+2]}_{\zeta}(d) + \omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(d) \wedge \omega^{[-2]}_{\eta}(d) - \omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}(d) \wedge \omega_{\zeta\bar{\eta}}(d) - \omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}(d) \wedge \omega_{\eta\bar{\zeta}}(d) \right] \Bigg).$$

Вона включає побудовані із супертвісторів та їх диференціалів $SU(2,2|1)$-інваріантні 1-форми

$$\omega^{[-2]}_{\mathcal{Z}}(d) = \bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}} d\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} - d\bar{\mathcal{Z}}^{-}_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}, \quad \omega^{[+2]}_{\mathcal{W}}(d) = \bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} d\mathcal{W}^{\mathcal{A}+} - d\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} \mathcal{W}^{\mathcal{A}+},$$
$$\omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}}(d) = \bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} d\mathcal{Z}^{\mathcal{A}-} - d\bar{\mathcal{W}}^{+}_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}^{\mathcal{A}-}, \quad \omega_{\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}(d) = -(\omega_{\bar{\mathcal{W}}\mathcal{Z}})^{\dagger}$$

й 1-форми, побудовані з грассманових компонентів супертвісторів

$$\omega^{[-2]}_{\eta}(d) = \eta^{-}\mathcal{D}\bar{\eta}^{-} - \mathcal{D}\eta^{-}\bar{\eta}^{-}, \quad \omega^{[+2]}_{\zeta}(d) = \zeta^{+}\mathcal{D}\bar{\zeta}^{+} - \mathcal{D}\zeta^{+}\bar{\zeta}^{+},$$
$$\omega_{\zeta\bar{\eta}}(d) = \zeta^{+}\mathcal{D}\bar{\eta}^{-} - \mathcal{D}\zeta^{+}\bar{\eta}^{-}, \quad \omega_{\eta\bar{\zeta}}(d) = -(\omega_{\zeta\bar{\eta}})^{\dagger}$$

інваріантні лише відносно $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ супергрупи Пуанкаре, яка є підгрупою $SU(2,2|1)$ супергрупи. Здобуто рівняння суперструни у супертвісторному формулюванні та закони перетворення κ-симетрії.

Також у цьому пункті введені редуковані супертвісторні моделі з квадратичними лагранжіанами [9], які узагальнюють на випадок струн з ненульовим натягом твісторні формулювання моделей безмасової суперчастинки [17*] та безнатягової суперструни [18*]. Дія бозонної струни у твісторному формулюванні є їх окремим випадком, який відповідає оберненню на нуль грассманових компонентів супертвісторів.

У пункті 3.2.3 проведено аналіз редукованої моделі, яка відповідає $\mathcal{N} = 2$ суперструні, як гамільтонової системи з в'язями. Здобуто вирази для лоренц-коваріантних та незвідних наборів в'язей першого та другого роду [10].

У підрозділі 3.3 запропоновані формулювання суперструн у суперпросторах Мінковського розмірностей $D = 6$ та $D = 10$ в термінах супертвісторів, які реалізують фундаментальні представлення відповідних суперконформних груп [11].

Супертвістори у розмірності $D=6$ означені як такі, що реалізують фундаментальне представлення суперконформної групи $D=6$ $\mathcal{N}=1$ суперпростору Мінковського [11]. Її супералгебра ізоморфна ортосимплектичній $osp(8^*|2)$ супералгебрі, до складу якої входять $so(8^*)=so(2,6)=conf(1,5)$ та $su(2)=so(3)$ підалгебри. Лагранжіан $D=6$ $\mathcal{N}=1$ суперструни у супертвісторному формулюванні включає два дублети $OSp(8^*|2)$ супертвісторів

$$\mathcal{Z}^{\Lambda+a}=(\mu^{\underline{\alpha}+a},v^{+a}_{\underline{\alpha}},\eta^{i+a}),\quad \mathcal{Z}^{\Lambda-\dot a}=(\mu^{\underline{\alpha}-\dot a},v^{-\dot a}_{\underline{\alpha}},\eta^{i-\dot a}),\quad \underline{\alpha}=1,\dots,4;\ i,a,\dot a=1,2.$$

Їх бозонні компоненти $\mu^{\underline{\alpha}+a}$, $\mu^{\underline{\alpha}-\dot a}$, $v^{+a}_{\underline{\alpha}}$ і $v^{-\dot a}_{\underline{\alpha}}$ є $SU(2)$-симплектичними майорана-вейлівськими $Spin(1,5)$ спінорами різних кіральностей, при чому $(\mu^{\underline{\alpha}+a},v^{+a}_{\underline{\alpha}})$ та $(\mu^{\underline{\alpha}-\dot a},v^{-\dot a}_{\underline{\alpha}})$ перетворюються як восьмикомпонентні $SU(2)$-симплектичні майорана-вейлівські $Spin(2,6)$ спінори. Грассманові компоненти супертвісторів η^{i+a} і $\eta^{i-\dot a}$ за індексом i перетворюються як $SU(2)$ спінори. Проєкційні частини супертвісторів утворюють 4×4 матрицю спінорних лоренцевих гармонік $(v^{+a}_{\underline{\alpha}},v^{-\dot a}_{\underline{\alpha}})$, яка узагальнює нормовану діаду Ньюмена-Пенроуза на розмірність $D=6$ [19*], [20*]. При описі динаміки (супер)струни у методі рухомого репера спінорні лоренцеві гармоніки та побудований із них векторний репер набувають значення у фактор-групі $SO(1,D-1)/(SO(1,1)\times SO(D-2))$, що відповідає орієнтації двох його компонентів у дотичному просторі до світового листка, а решти – у ортогональному доповненні даного простору [21*], [12*]. У розмірності $D=6$ з урахуванням групових ізоморфізмів спінорні лоренцеві гармоніки набувають значення у $Spin(1,5)/(SO(1,1)\times SU(2)\times \widetilde{SU(2)})$ фактор-групі. У роботі [11] здобуто умови на супертвістори, накладення яких забезпечує інцидентність їх компонентів координатам $D=6$ $\mathcal{N}=1$ суперпростору Мінковського. Дія $D=6$ $\mathcal{N}=1$ суперструни у запропонованому супертвісторному формулюванні має вигляд [11]

$$S^{D=6,\mathcal{N}=1}_{\text{string, stw}}=\int\limits_{\Sigma}\Bigg(\frac{1}{2(\alpha')^{1/2}}\big[e^{[+2]}\wedge\omega^{[-2]}(d)-e^{[-2]}\wedge\omega^{[+2]}(d)\big]+\frac{c}{2}\,e^{[-2]}\wedge e^{[+2]}$$
$$+\frac{is}{c\alpha'}\Big[\frac{1}{2}\,\omega^{[-2]}(d)\wedge\varphi^{[+2]}(d)+\frac{1}{2}\,\omega^{[+2]}(d)\wedge\varphi^{[-2]}(d)-\omega^{(\mathbf{i})}(d)\wedge\varphi^{(\mathbf{i})}(d)\Big]\Bigg),$$

де

$$\omega^{[+2]}(d)=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ab}(d\mu^{\underline{\alpha}+a}v^{+b}_{\underline{\alpha}}+dv^{+a}_{\underline{\alpha}}\mu^{\underline{\alpha}+b}-i\varepsilon_{ij}\,d\eta^{i+a}\eta^{j+b}),$$
$$\omega^{[-2]}(d)=-\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\dot a\dot b}(d\mu^{\underline{\alpha}-\dot a}v^{-\dot b}_{\underline{\alpha}}+dv^{-\dot a}_{\underline{\alpha}}\mu^{\underline{\alpha}-\dot b}-i\varepsilon_{ij}\,d\eta^{i-\dot a}\eta^{j-\dot b}),$$
$$\omega^{(\mathbf{i})}(d)=\frac{1}{4}(d\mu^{\underline{\alpha}+a}v^{-\dot a}_{\underline{\alpha}}+dv^{+a}_{\underline{\alpha}}\mu^{\underline{\alpha}-\dot a}-i\varepsilon_{ij}\,d\eta^{i+a}\eta^{j-\dot a}$$
$$-d\mu^{\underline{\alpha}+a}v^{-\dot a}_{\underline{\alpha}}-dv^{+a}_{\underline{\alpha}}\mu^{\underline{\alpha}-\dot a}+i\varepsilon_{ij}\,d\eta^{i+a}\eta^{j-\dot a})\,\sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot a},$$

$$\varphi^{[+2]}(d) = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ab}\mathcal{D}\eta_i^{+a}\eta^{i+b}, \quad \varphi^{[-2]}(d) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\mathcal{D}\eta_i^{-\dot{a}}\eta^{i-\dot{b}},$$
$$\varphi^{(\mathbf{i})}(d) = \frac{1}{4}(\mathcal{D}\eta_i^{+a}\eta^{i-\dot{a}} - \mathcal{D}\eta_i^{-\dot{a}}\eta^{i+a})\,\sigma^{(\mathbf{i})}_{a\dot{a}}.$$

Виведені рівняння суперструни у супертвісторному формулюванні та закони перетворення κ-симетрії. Також введені редуковані супертвісторні моделі, лагранжіани яких квадратичні за компонентами супертвісторів.

Супертвістори, які відповідають $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперпростору Мінковського, реалізують фундаментальне представлення $OSp(32|1)$ супергрупи. Її супералгебра $osp(32|1)$ включає конформну алгебру 10-вимірного простору Мінковського $conf(1,9) \subset sp(32)$. Виведено дію $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперструни у супертвісторному формулюванні [11]

$$\begin{aligned} S^{D=10,\mathcal{N}=1}_{\text{sstring, stw}} =& \int\limits_{\Sigma}\Bigg(\frac{1}{2(\alpha')^{1/2}}\left[e^{[+2]}\wedge\omega^{[-2]}(d) - e^{[-2]}\wedge\omega^{[+2]}(d)\right] + \frac{c}{2}\,e^{[-2]}\wedge e^{[+2]} \\ &+ \frac{is}{c\alpha'}\left[\frac{1}{2}\,\omega^{[-2]}(d)\wedge\varphi^{[+2]}(d) + \frac{1}{2}\,\omega^{[+2]}(d)\wedge\varphi^{[-2]}(d) - \omega^{(\mathbf{I})}(d)\wedge\varphi^{(\mathbf{I})}(d)\right]\Bigg), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\omega^{[+2]}(d) = \frac{1}{8}\left(d\mu^{\hat{\alpha}+}_{A}v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A} - dv^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}\mu^{\hat{\alpha}+}_{A} - id\eta^{+}_{A}\eta^{+}_{A}\right),$$
$$\omega^{[-2]}(d) = \frac{1}{8}\left(d\mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} - dv^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}d\mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}} - id\eta^{-}_{\dot{A}}\eta^{-}_{\dot{A}}\right),$$
$$\omega^{(\mathbf{I})}(d) = \frac{1}{16}\left(d\mu^{\hat{\alpha}+}_{A}v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}} - dv^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}\mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}} - id\eta^{+}_{A}\eta^{-}_{\dot{A}} + d\mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A} - dv^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}\mu^{\hat{\alpha}+}_{A} - id\eta^{-}_{\dot{A}}\eta^{+}_{A}\right)\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}},$$
$$\varphi^{[+2]}(d) = \frac{1}{8}\mathcal{D}\eta^{+}_{A}\eta^{+}_{A},\ \varphi^{[-2]}(d) = \frac{1}{8}\mathcal{D}\eta^{-}_{\dot{A}}\eta^{-}_{\dot{A}},\ \varphi^{(\mathbf{I})}(d) = \frac{1}{16}\gamma^{(\mathbf{I})}_{A\dot{A}}(\mathcal{D}\eta^{+}_{A}\eta^{-}_{\dot{A}} + \mathcal{D}\eta^{-}_{\dot{A}}\eta^{+}_{A}).$$

Динамічними змінними у запропонованому формулюванні є два октети ортосимплектичних $OSp(32|1)$ супертвісторів

$$Z^{\mathbf{\Lambda}+}_{A} = \left(\mu^{\hat{\alpha}+}_{A}, v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}, \eta^{+}_{A}\right), \quad Z^{\mathbf{\Lambda}-}_{\dot{A}} = \left(\mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}, v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}, \eta^{-}_{\dot{A}}\right), \quad \underline{\hat{\alpha}} = 1,\ldots,16, \quad A, \dot{A} = 1,\ldots,8.$$

Їх бозонні компоненти $\mu^{\hat{\alpha}+}_{A}$, $v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}$ і $\mu^{\hat{\alpha}-}_{\dot{A}}$, $v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}$ є майорана-вейлівськими $Spin(1,9)$ та $Spin(8)$ спінорами різних кіральностей, а ферміонні компоненти η^{+}_{A} і $\eta^{-}_{\dot{A}}$ є майорана-вейлівськими $Spin(8)$ спінорами різних кіральностей. Проєкційні частини супертвісторів утворюють 16×16 матрицю спінорних лоренцевих гармонік $\left(v^{+}_{\underline{\hat{\alpha}}A}, v^{-}_{\underline{\hat{\alpha}}\dot{A}}\right)$ у розмірності $D = 10$ [19*], [20*]. З урахуванням $SO(1,1)\times SO(8)$ калібрувальної симетрії дії суперструни у супертвісторному (20) та лоренц-гармонічному [12*] формулюваннях спінорні лоренцеві гармоніки набувають значення у фактор-групі $Spin(1,9)/(SO(1,1)\times Spin(8))$. Здобуті умови, які забезпечують інцидентність компонентів $OSp(32|1)$ супертвісторів координатам $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ суперпростору Мінковського [11]. Виведені рівняння $D = 10$

$\mathcal{N}=1$ суперструни у супертвісторному формулюванні та варіації супертвісторів при перетвореннях κ-симетрії. Введені редуковані супертвісторні моделі з квадратичними за компонентами супертвісторів лагранжіанами.

У підрозділі 3.4 проаналізовано модель $D=10$ $\mathcal{N}=1$ суперструни у запропонованому супертвісторному формулюванні як гамільтонову систему з в'язями [12]. Здобуто вирази через компоненти супертвісторів для коваріантних та незвідних наборів в'язей першого і другого роду та досліджено алгебру в'язей першого роду на дужках Дірака.

З метою порівняння структури симетрій супертвісторних формулювань суперструн, запропонованих у наших роботах [9], [10], [11], та відомої моделі твісторної струни Берковіца [22*] у підрозділі 3.5 досліджені класичні глобальні симетрії цієї моделі та її розширення, в якому на супертвістори не накладено додаткових в'язей. Показано, що глобальні симетрії цих моделей є нескінченновимірними узагальненнями $D=4$ $\mathcal{N}=4$ суперконформної симетрії [13].

Динамічними змінними у моделі Берковіца є ліво- та право-біжні поля $PSL(4|4)$ супертвісторів $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}(\tau,\sigma)$, $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}(\tau,\sigma)$ і $\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}(\tau,\sigma)$, $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}(\tau,\sigma)$ разом з іншими листковими полями. Для полів супертвісторів дія визначається сумою

$$S_{\mathrm{L-tw}}=\int\limits_{\Sigma} d\tau d\sigma \mathscr{L}_{\mathrm{L-tw}}: \quad \mathscr{L}_{\mathrm{L-tw}}=-2\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\partial_{-}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}+\zeta\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$$

та

$$S_{\mathrm{R-tw}}=\int\limits_{\Sigma} d\tau d\sigma \mathscr{L}_{\mathrm{R-tw}}: \quad \mathscr{L}_{\mathrm{R-tw}}=-2\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}\partial_{+}\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}+\bar{\zeta}\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'},$$

де $\sigma^{\pm}=\tau\pm\sigma$ та $\partial_{\pm}=\frac{1}{2}(\partial_{\tau}\pm\partial_{\sigma})$ є листковими координатами та похідними у базисі світлового конуса. За допомогою множників Лагранжа $\zeta(\tau,\sigma)$ та $\bar{\zeta}(\tau,\sigma)$ вводяться в'язі $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}=0$ і $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}=0$, які є генераторами $GL(1,\mathbb{R})_L$ та $GL(1,\mathbb{R})_R$ локальних симетрій. Також у підрозділі 3.5 розглянуто модель з дією для полів супертвісторів

$$S'=S'_{\mathrm{L-}tw}+S'_{\mathrm{R-tw}},$$

де

$$S'_{\mathrm{L-tw}}=\int\limits_{\Sigma} d\tau d\sigma \mathscr{L}'_{\mathrm{L-tw}}: \quad \mathscr{L}'_{\mathrm{L-tw}}=-2\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}\partial_{-}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}},$$
$$S'_{\mathrm{R-tw}}=\int\limits_{\Sigma} d\tau d\sigma \mathscr{L}'_{\mathrm{R-tw}}: \quad \mathscr{L}'_{\mathrm{R-tw}}=-2\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}\partial_{+}\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}$$

і додаткові в'язі відсутні.

Показано, що для довільного $L\geq 0$ дія $S'_{\mathrm{L-}tw}$ інваріантна відносно перетворень

$$\delta_{\Lambda_L}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}=\Lambda^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}(L)}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}(L)}, \quad \delta_{\Lambda_L}\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}=-L\,\mathcal{Y}_{\mathcal{C}}\Lambda^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{A}\mathcal{B}(L-1)}\mathcal{Z}^{\mathcal{B}(L-1)},$$

де параметри $\Lambda^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}_L\ldots\mathcal{B}_1} \equiv \Lambda^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}(L)}$ є градуйовано-симетричними за нижніми індексами та $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}(L)} \equiv \mathcal{Z}^{\mathcal{A}_1} \cdots \mathcal{Z}^{\mathcal{A}_L}$. Встановлено, що відповідні густини ньотерових струмів з точністю до числового фактора даються мономами

$$T^{(L)}{}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{A}(L)}(\sigma) = \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} \mathcal{Z}^{\mathcal{A}(L)}, \quad L \geq 0$$

та утворюють нескінченновимірну суперaлгебру на дужках Дірака, яку було названо суперaлгеброю твісторної струни. Її скінченновимірна підалгебра складається із густини струму $\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}(\sigma)$, який на дужках Дірака генерує зсуви компонентів супертвістора $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}(\sigma)$ на сталі, та генераторів $gl(4|4,\mathbb{R})$ суперaлгебри $T_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \mathcal{Y}_{\mathcal{A}} \mathcal{Z}^{\mathcal{B}}$. Дія для право-біжних полів супертвісторів $S'_{\mathrm{R}-tw}$ інваріантна відносно аналогічних симетрій, під дією яких перетворюються $\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}'}$ та $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{A}'}$. Доведено, що на квантовому рівні дана глобальна нескінченновимірна симетрія порушується до $SL(4|4,\mathbb{R}) \subset GL(4|4,\mathbb{R})$ симетрії, а у моделі Берковіца відповідною симетрією є $PSL(4|4,\mathbb{R}) \subset SL(4|4,\mathbb{R})$ симетрія [13].

У четвертому розділі «Класичні та квантові симетрії просторово-часових і твісторних формулювань моделей релятивістських частинок та струн у (супер)просторах анти-де Сіттера» досліджуються суперсиметричні моделі безмасових частинок і струн з нульовим натягом у (супер)просторах анти-де Сіттера, в яких лінійно реалізовано їх глобальні симетрії. Після вступного підрозділу 4.1 у підрозділах 4.2 та 4.3 здобуті необхідні попередні результати для дослідження цих моделей.

У підрозділі 4.2 розглянуто спінорне представлення для тензорів напруженостей, динамічних рівнянь та тотожностей Б'янкі полів Янга-Міллса, Раріти-Швінгера та гравітаційного у п'ятивимірному просторі. Показано [14], що їх динаміка у границі вільних полів у просторі Мінковського описується симетричними спінорними полями рангу $2s$ ($s = 1, 3/2, 2$), які задовольняють безмасові рівняння типу Дірака та Клейна-Гордона

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\boldsymbol{\lambda}} W_{\boldsymbol{\lambda\beta}(2s-1)}(x) = 0, \quad \Box W_{\boldsymbol{\alpha}(2s)}(x) = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda} = 1, \ldots, 4. \tag{21}$$

Тут і нижче числа у круглих дужках після індексів позначають їх групи, які складаються з відповідної кількості симетризованих індексів.

Запропоновано [14] представлення для вільних безмасових симетричних спінорних полів у просторі Мінковського з координатами $x^{m'}$ ($m' = 0, 1, \ldots, 4$) у вигляді інтеґрала від однорідних функцій спінорних лоренц-гармонічних змінних $v_{\boldsymbol{\alpha}}^{+\mathrm{i}}$ за тривимірною сферою S^3, реалізованою як $SO(1,4)/(SO(1,1) \times ISO(3))$ фактор-багатовид,

$$W_{\boldsymbol{\alpha}(2s)}(x^{m'}) = \int_{S^3} \Omega^{[+6]} v_{\boldsymbol{\alpha}_1}^{+\mathrm{i}_1} \cdots v_{\boldsymbol{\alpha}_{2s}}^{+\mathrm{i}_{2s}} \phi_{\mathrm{i}(2s)}^{[-6-2s]}(x^{[+2]}, v^{+}),$$

де $x^{[+2]} = -\frac{1}{2} x^{m'} v^{\mathrm{T}\pm\mathrm{i}}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}\pm}{}_{\mathrm{i}}$, а $\gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}}$ є 4×4 γ-матрицями у розмірності $D = 1 + 4$. У запропонованому представленні рівняння типу Дірака та Клейна-Гордона (21) задовольняються за побудовою. Це представлення узагальнює на випадок п'ятивимірного простору відомі контурні інтеґрали Пенроуза для вільних безмасових симетричних спінорних полів у чотиривимірному просторі.

У підрозділі 4.3 побудовано реалізацію в амбітвісторному просторі безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ алгебри з додатною енергією [15]. В її основі лежить відомий осциляторний опис цих представлень [23*], [24*], а також співвідношення між бозонними $su(2)$ осциляторами і компонентами твісторів Пенроуза [25*], [26*]. Здобута реалізація використовується у підрозділі 4.4 для опису фізичних станів у супертвісторному формулюванні моделі безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі.

У пункті 4.4.1 запропоновано нове твісторне формулювання моделі масивної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера [16]

$$S^{AdS_5}_{\text{particle, 4-tw}} = \int\limits_L d\tau \left[\frac{i}{2} \left(\bar{Z}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\alpha}} \dot{Z}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} - \dot{\bar{Z}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} \right) \gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}} + \Lambda^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}} \left(\bar{Z}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} - \frac{\mathrm{m}}{2} \delta^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\nu}} \right) \right].$$

Воно включає 4×4 матрицю твісторів $Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}}$, в'язі на компоненти якої $\bar{Z}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\alpha}} Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} - \frac{\mathrm{m}}{2} \delta^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\nu}} = 0$ вводяться за допомогою матриці множників Лагранжа $\Lambda^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}}(\tau)$. Здобуто розв'язок цих в'язей у вигляді співвідношень інцидентності

$$Z^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} = G^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\nu}}, \quad \bar{Z}^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\alpha}} = v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\beta}} G^{-1\boldsymbol{\beta}}{}_{\boldsymbol{\alpha}},$$

де 4×4 матриця $G^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} \in SU(2,2)/Spin(1,4)$ залежить від координат простору анти-де Сіттера, а $v^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\mu}}$ є матрицею спінорних лоренцевих гармонік у розмірності $D = 1 + 4$, які утворюють базис у просторі $Spin(1,4)$ спінорів. Проведено квантування моделі за Діраком та здобуто нове представлення для хвильової функції частинки в амбітвісторному просторі.

У пункті 4.4.2 розглядається модель безмасової суперчастинки в $AdS_5 \times S^5$ суперпросторі

$$S^{AdS_5 \times S^5}_{\text{sparticle}} = \int\limits_L d\tau \left[p_{m'} E^{m'}_\tau + p_{I'} E^{I'}_\tau - \frac{g}{2} (p_{m'} p^{m'} + p_{I'} p_{I'}) \right],$$

де $E^{m'}_\tau$ та $E^{I'}_\tau$ – відображення на її світову лінію бозонних компонентів $AdS_5 \times S^5$ суперфільбайна у дотичних просторах до AdS_5 і S^5. Запропоновані представлення [16] для компонентів $D = 10$ імпульсу суперчастинки $p_{m'}$ і $p_{I'}$ через $Spin(1,4)$ та $Spin(5)$ спінорні змінні $v^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\nu}}$ і ℓ^B_N

$$p_{m'} = -\frac{1}{2} v^{\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\nu}} \gamma^{(0)\boldsymbol{\nu}}{}_{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{1}{2} (v^k_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}}_k - v^{\dot{k}}_{\boldsymbol{\alpha}} \gamma_{m'}{}^{\boldsymbol{\alpha}}{}_{\boldsymbol{\beta}} v^{\boldsymbol{\beta}}_{\dot{k}}),$$
$$p_{I'} = \frac{1}{2} \ell^{\mathrm{T}L}_{A} \gamma_{I'}{}^A{}_B \ell^B_N \gamma^{(5)N}{}_L = -\frac{1}{2} (\ell^q_A \gamma_{I'}{}^A{}_B \ell^B_q + \ell^{\dot{q}}_A \gamma_{I'}{}^A{}_B \ell^B_{\dot{q}}).$$

Запропоновані співвідношення [16]

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} = G^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} \mathrm{V}^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{N}} = \left(-\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_k \ \mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{k}} \ \Psi^{\mathcal{A}}_p \ \Psi^{\mathcal{A}\dot{p}} \right),$$

$$\mathrm{V}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} v_{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{\alpha}} & 0 \\ 0 & \ell_N^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_k^{\boldsymbol{\alpha}} & v^{\boldsymbol{\alpha}\dot{k}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_p^A & \ell^{A\dot{p}} \end{pmatrix},$$

які зв'язують 8×8 суперматрицю $PSU(2,2|4)$ супертвісторів $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{N}}$ з 8×8 суперматрицею $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}$, яка залежить від координат $AdS_5\times S^5$ суперпростору та визначає його суперфільбайн і зв'язність, та $Spin(1,4)$ і $Spin(5)$ спінорними змінними. З використанням цих співвідношень встановлено зв'язок [16] між суперпросторовим формулюванням [27*] та 8-супертвісторним формулюванням з лагранжіаном [28*]

$$\mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{\mathrm{sparticle,\,8-stw}} = \mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{\mathrm{sparticle,\,8-stw,\,kin}} + \mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{\mathrm{sparticle,\,8-stw,\,constr}},$$

в якому кінетичний член для супертвісторів має вигляд

$$\mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{\mathrm{sparticle,\,8-stw,\,kin}} = \frac{i}{2}(\bar{\mathcal{Z}}^k_{\mathcal{A}}\dot{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}}_k - \dot{\bar{\mathcal{Z}}}{}^k_{\mathcal{A}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_k) + \frac{i}{2}(\bar{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}\dot{k}}\dot{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}\dot{k}} - \dot{\bar{\mathcal{Z}}}_{\mathcal{A}\dot{k}}\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\dot{k}})$$
$$+\frac{i}{2}(\bar{\Psi}^q_{\mathcal{A}}\dot{\Psi}^{\mathcal{A}}_q - \dot{\bar{\Psi}}{}^q_{\mathcal{A}}\Psi^{\mathcal{A}}_q) - \frac{i}{2}(\bar{\Psi}_{\mathcal{A}\dot{q}}\dot{\Psi}^{\mathcal{A}\dot{q}} - \dot{\bar{\Psi}}_{\mathcal{A}\dot{q}}\Psi^{\mathcal{A}\dot{q}}),$$

а $\mathscr{L}^{AdS_5\times S^5}_{\mathrm{sparticle,\,8-stw,\,constr}}$ є лінійною комбінацією з множниками Лагранжа в'язей на компоненти супертвісторів. Після розв'язання частини в'язей на спінорні змінні 8-супертвісторне формулювання зведено [16] до простішого 4-супертвісторного формулювання [29*] та вперше проведено квантування за Діраком моделі суперчастинки [17]. Показано, що її фізичні стани співпадають з набором представлень $psu(2,2|4)$ супералгебри, які описують збудження полів IIB супергравітації над $AdS_5\times S^5$ супербекграундом [23*], [30*]. Також розроблено опис супермультиплета $D=5$ $\mathcal{N}=8$ каліброваної супергравітації, який описує безмасові збудження, в амбітвісторному просторі [18].

У пункті 4.5.1 запропоноване нове формулювання [19] моделі безмасової спінової частинки у D-вимірному просторі анти-де Сіттера AdS_D, реалізованому як дійсний проєктивний багатовид параметризований однорідними координатами $x^{\underline{m}}$, які означені з точністю до множення на відмінне від нуля дійсне число: $x^{\underline{m}}\sim\lambda\, x^{\underline{m}}$, $\underline{m}=0',0,\dots,D-1$, $\lambda\in\mathbb{R}/\{0\}$. Інваріантні відносно таких дилатацій координати $y^{\underline{m}}=\frac{1}{|x|}x^{\underline{m}}$, $|x|^2\equiv-(x\cdot x)$, задовольняють умову $y^2\equiv(y\cdot y)=-1$, яка визначає вкладення простору анти-де Сіттера одиничного радіуса як гіперболоїда у $(D+1)$-вимірний пласкийпростір з двома часовими розмірностями. У цьому просторі лінійно діє $SO(2,D-1)$ група ізометрії простору анти-де Сіттера. Можливі розв'язки $y^{\underline{m}}(z^{m'})$ умови $y^2(z)=-1$ визначають параметризацію простору анти-де Сіттера внутрішніми координатами $z^{m'}$ $(m'=0,\dots,D-1)$.

Інваріантна відносно мінімальної локальної суперсиметрії світової лінії модель вільної безмасової спінової частинки описує на класичному рівні суперсиметричну релятивістську механіку квантової частинки зі спіном $1/2$ у просторі анти-де Сіттера [31*]. Запропоновано нове формулювання її дії у змінних фазового простору

$$S_{\text{spinparticle}}^{AdS_D} = \int\limits_L d\tau \left((p \cdot \dot{x}) + \frac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \frac{\tilde{e}}{2} T + i\chi \Phi + a\mathfrak{D} \right), \tag{22}$$

яке включає з множниками Лагранжа $\tilde{e}(\tau)$, $a(\tau)$ і $\chi(\tau)$ гамільтонові в'язі першого роду

$$T = |x|^2 p^2 + 2i(\xi \cdot x)(\xi \cdot p) \approx 0, \quad \Phi = |x|(\xi \cdot p) \approx 0, \quad \mathfrak{D} = (x \cdot p) \approx 0 \tag{23}$$

де $(\xi \cdot x)$, $(\xi \cdot p)$ і $(x \cdot p)$ позначають скалярний добуток $SO(2, D-1)$ векторів. Ці в'язі є генераторами репараметризацій та локальної суперсиметрії світової лінії, а також локальних дилатацій просторових координат відповідно. Відмінною рисою запропонованого формулювання є лінійна реалізація $SO(2, D-1)$ групи ізометрії простору анти-де Сіттера. Варіювання дії (22) за вектором імпульсу частинки $p_{\underline{m}}$ приводить до рівняння

$$\tilde{e} p^{\underline{m}} = \frac{1}{|x|^2}(\dot{x}^{\underline{m}} + a x^{\underline{m}}) - \frac{i\tilde{e}}{|x|^2}(\xi \cdot x)\xi^{\underline{m}} + \frac{i\chi}{|x|}\xi^{\underline{m}}.$$

Це рівняння дозволяє виразити імпульс частинки через її координати $x^{\underline{m}}(\tau)$ і швидкості $\dot{x}^{\underline{m}}(\tau)$, а також вектор $\xi^{\underline{m}}(\tau)$ з грассмановими компонентами, який описує спінові ступені свободи на класичному рівні. Його підстановка до (22) дає лагранжіан частинки у конфігураційному просторі

$$\mathscr{L}_{\text{spinparticle, conf}}^{AdS_D} = \frac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x} + ax)^2 + \frac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \frac{i}{|x|^2}(\xi \cdot x)(\xi \cdot \dot{x}) + \frac{i\chi}{\tilde{e}|x|}\xi \cdot (\dot{x} + ax). \tag{24}$$

У даному формулюванні розкривається роль множника Лагранжа $a(\tau)$ як одновимірного калібрувального поля для локальних дилатацій просторових координат. Виключенням $a(\tau)$ за допомогою підстановки розв'язку рівняння для нього, здобуто інше представлення лагранжіана спінової частинки

$$\mathscr{L}_{\text{spinparticle}}^{RP^D} = \frac{1}{2\tilde{e}|x|^2}(\dot{x}\theta\dot{x}) + \frac{i}{2}(\xi \cdot \dot{\xi}) - \frac{i}{|x|^2}(\xi \cdot x)(\xi \cdot \dot{x}) + \frac{i\chi}{\tilde{e}|x|}(\xi\theta\dot{x}), \tag{25}$$

яке відповідає реалізації AdS_D простору як дійсного проєктивного багатовиду RP^D, параметризованого однорідними координатами. Матриця $\theta^{\underline{mn}} = \eta^{\underline{mn}} + \frac{1}{|x|^2}x^{\underline{m}}x^{\underline{n}}$ відіграє роль його виродженого метричного тензора.

Проведено квантування моделі за Діраком з використанням відомої реалізації операторів спінових змінних $\{\xi^{\underline{m}}, \xi^{\underline{n}}\} = \eta^{\underline{mn}} \Rightarrow \xi^{\underline{m}} = 2^{-1/2}\gamma^{\underline{m}}$ $\gamma-$матрицями у розмірності $D+1$. Здобуто рівняння Дірака та Клейна-Гордона для спінорної хвильової функції частинки у конфігураційному просторі $\Psi(x)$

$$\mathscr{D}_x \Psi(x) = \big(|x|(\gamma \cdot \partial) + \tfrac{D}{2|x|}(\gamma \cdot x)\big)\Psi(x) = 0,$$
$$\mathscr{D}_x^2 \Psi(x) = \big(|x|\partial_{\underline{m}}(|x|\partial^{\underline{m}}) - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot \partial) + \tfrac{D^2}{4}\big)\Psi(x) = 0.$$

Вона має степінь однорідності нуль за однорідними координатами $x^{\underline{m}}$. Ці рівняння також виражено через неодорідні та внутрішні координати простору анти-де Сіттера.

У підпункті 4.5.1.3 запропоноване формулювання вільної спінової частинки у просторі анти-де Сіттера розширено на випадок її взаємодії з фоновим електромагнітним полем [20]. У даному підході компоненти потенціалу електромагнітного поля $A_{\underline{m}}(x)$ є однорідними функціями координат $(x \cdot \partial)A_{\underline{m}}(x) = -1$ та задовольняють умову поперечності $(x \cdot A(x)) = 0$. З урахуванням цих умов поперечний тензор напруженості дорівнює $F_{\underline{mn}}(x) = \partial_{\underline{m}} A_{\underline{n}} - \partial_{\underline{n}} A_{\underline{m}}$. У формулюванні у фазовому просторі дія спінової частинки з ненульовим електричним зарядом e дається виразом (22), до якого входять в'язі першого роду

$$\Phi_{(e)} = |x|\, \xi \cdot (p - eA(x)) \approx 0,\; T_{(e)} = |x|(p-eA)^2 + 2i(\xi \cdot x)\xi \cdot (p-eA) + ie|x|^2(\xi \cdot F \cdot \xi) \approx 0$$

та $\mathfrak{D} \approx 0$. Перші дві з них узагальнюють в'язі (23) на випадок взаємодії із зовнішнім електромагнітним полем. Також здобуто представлення для лагранжіана спінової частинки у конфігураційному просторі, які розширюють (24) та (25).

Проведено квантування моделі за Діраком та здобуто рівняння Дірака та Клейна-Гордона для хвильової функції частинки у зовнішньому електромагнітному полі

$$\mathscr{D}_x(A)\Psi(x) = \left(|x|\gamma \cdot (\partial - ieA) + \tfrac{D}{2|x|}(\gamma \cdot x)\right)\Psi(x) = 0,$$
$$\mathscr{D}_x^2(A)\Psi(x) = \left([|x|\gamma \cdot (\partial - ieA)]^2 + \tfrac{D^2}{4}\right)\Psi(x) = 0.$$

Ці рівняння в однорідних координатах $x^{\underline{m}}$ було представлено також у внутрішніх координатах простору анти-де Сіттера $z^{m'}$, в яких вони набувають вигляду відомих рівнянь для поля зі спіном $1/2$ у зовнішньому полі

$$\rho^{m'} D_{m'}(A)\psi(z) = 0, \quad \left(D^{m'}(A)D_{m'}(A) - ie\sigma^{m'n'}F_{m'n'} + \tfrac{D(D-1)}{4}\right)\psi(z) = 0.$$

Тут $\rho^{m'} = \rho^{a'} e_{a'}^{m'}(z)$ і $\rho^{a'}$ є матрицями Дірака у вимірності D, а $e_{a'}^{m'}(z)$ – фільбайн простору анти-де Сіттера. $D_{m'}(A) = \partial_{m'} + \frac{1}{2}\omega_{m'}{}^{a'b'}\sigma_{a'b'} - ieA_{m'}$ є коваріантною похідною за присутності зовнішнього поля, до якої входить спінова зв'язність простору анти-де Сіттера $\omega_{m'}{}^{a'b'}(z)$.

У підпункті 4.5.1.4 запропоноване формулювання спінової частинки у просторі анти-де Сіттера, яка взаємодіє з абелевими антисиметричними калібрувальними полями [20]. Ці поля присутні у спектрі квантованих замкнених суперструн.

Здобуті формулювання узагальнюють на простір анти-де Сіттера відому модель спінової частинки у просторі Мінковського, яка взаємодіє із зовнішніми електромагнітним [32*] та абелевими антисиметричними калібрувальними полями [33*].

У пункті 4.5.2 запропоновано нову модель замкненої спінової струни з нульовим натягом у D-вимірному просторі анти-де Сіттера, яка узагальнює здобуте нове формулювання безмасової спінової частинки [19]. Виведено дію спінової струни у змінних фазового простору

$$S^{AdS_D}_{\text{spinstring}}=\int\limits_{\Sigma} d\tau d\sigma \left((P\cdot\partial_\tau X)+\frac{i}{2}(\Xi\cdot\partial_\tau\Xi)-\frac{e}{2}T-vL+a\mathfrak{D}+i\chi\Phi \right),$$

де $e(\tau,\sigma)$, $v(\tau,\sigma)$, $a(\tau,\sigma)$ та $\chi(\tau,\sigma)$ є множниками Лагранжа для гамільтонових в'язей

$$\Phi(\sigma)=(\Xi\cdot P)\approx 0, \quad -L(\sigma)=(P\cdot\partial_\sigma X)+\frac{i}{2}(\Xi\cdot\partial_\sigma\Xi)\approx 0,$$
$$T(\sigma)=P^2\approx 0, \quad \mathfrak{D}(\sigma)=(X\cdot P)\approx 0,$$

які узагальнюють в'язі в моделі спінової частинки (23). Ці в'язі є генераторами локальних симетрій дії запропонованої моделі і утворюють листкову $n=1$ супералгебру Вірасоро розширену генератором дилатацій координат $\mathfrak{D}(\sigma)\approx 0$. Також здобуті представлення для лагранжіана у конфігураційному просторі, виведені та розв'язані рівняння спінової струни.

Досліджено калібрувальні симетрії запропонованої моделі на квантовому рівні. Знайдено реалізацію операторів змінних фазового простору та духів, для якої в алгебрі калібрувальних симетрій відсутні аномалії незалежно від розмірності простору анти-де Сіттера. Подібне впорядкування використовувалось для доведення відсутності аномалій у моделях нуль-(супер)струн та нуль-(супер)-p-бран у (супер)просторі Мінковського [34*], [35*], [36*].

Висновки

Дисертацію присвячено вивченню структури нелінійностей у суперсиметричних теоріях струн, пов'язаних як з кривизною зовнішнього бекграунда, так і обумовлених їх спіновими ступенями свободи. Детально проаналізовано граничні випадки нульового та нескінченного натягу. У цих граничних випадках доведено класичну інтеґровність нелінійних рівнянь суперструн у (супер)просторах анти-де Сіттера або ці рівняння були перетворені у лінійні після переходу до твісторних змінних, що дозволило застосувати відомі методи квантування.

Основні наукові результати дисертації сформульовано нижче.

1. Запропоновано формулювання двовимірної σ-моделі у $OSp(4|6)/(SO(1,3)\times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі, яке ґрунтується на реалізації $osp(4|6)$ супералгебри його глобальної симетрії як $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної алгебри. Доведено лінійну залежність рівнянь для ферміонних полів σ-моделі.

2. Досліджено нелінійну реалізацію $D=3$ $\mathcal{N}=6$ суперконформної симетрії у цій σ-моделі. Здобуто густини ньотерових струмів, пов'язаних з даною глобальною симетрією, в термінах форм Картана та параметрів суперконформної алгебри.

3. Запропоновано для κ-симетрії та листкових репараметризацій дії суперструни в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграунді калібрування світлового конуса, в якому він утворений нуль-геодезичними на межі чотиривимірного простору анти-де Сіттера AdS_4 у конформно-пласкій параметризації. Побудовано лагранжіан та гамільтоніан суперструни у даному калібруванні.

4. Здобуто лагранжіан суперструни у частковому калібруванні κ-симетрії, в якому залишаються дві з восьми координат у секторі суперсиметрій, порушених $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ супербекграундом. Знайдено представлення нульової кривизни для рівнянь суперструни у цьому калібруванні, що вказує на їх можливу класичну інтеґровність й у загальному випадку, коли не накладено калібрувальних умов.

5. Доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки та $D0$-брани в $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперпросторі. Доведено класичну інтеґровність рівнянь безмасової суперчастинки в $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ суперсиметричному фактор-просторі та встановлено співвідношення між компонентами її пари Лакса та зв'язністю Лакса σ-моделі у цьому просторі.

6. Запропоновані нові супертвісторні формулювання моделей струн інваріантних відносно просторово-часової суперсиметрії і розроблені лагранжів та гамільтонів підходи до їх опису.

7. Введено редуковані супертвісторні моделі, які узагальнюють на випадок струн з натягом супертвісторні формулювання безмасових частинок та безнатягових струн. Проведено аналіз моделі, яка відповідає $D = 4$ $\mathcal{N} = 2$ суперструні, як гамільтонової системи з в'язями.

8. Доведено інваріантність відносно нескінченновимірних розширень глобальної суперконформної симетрії класичних лагранжіанів ліво- та правобіжних полів супертвісторів у моделі твісторної струни Берковіца та узагальненій моделі, в якій відсутня калібрувальна $GL(1,\mathbb{R})$ симетрія. Показано, що ці симетрії порушуються у квантовій теорії.

9. Запропоновано лоренц-гармонічне інтеґральне представлення для вільних безмасових симетричних спінорних полів у просторі Мінковського розмірності $D = 5$.

10. Розроблено опис в амбітвісторному просторі безмасових унітарних незвідних представлень $su(2,2)$ алгебри з додатною енергією. Встановлено співвідношення між амбітвісторним та відомим осциляторним описами цих представлень.

11. Введено 4-твісторне формулювання моделі масивної частинки у п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера, встановлено його зв'язок з раніше відомим 2-твісторним формулюванням та проведено квантування моделі в термінах амбітвісторів.

12. Встановлено зв'язок між змінними, які входять до суперпросторового та супертвісторних формулювань моделі безмасової суперчастинки у $AdS_5 \times S^5$ супербекграунді, а також між цими формулюваннями. Проведено квантування за Діраком цієї моделі у 4-супертвісторному формулюванні.

13. Запропоновано формулювання моделі безмасової спінової частинки, в

якому D-вимірний простір анти-де Сіттера реалізовано як дійсний проєктивний багатовид. Модель узагальнено на випадок взаємодії з фоновими електромагнітним і абелевими антисиметричними калібрувальними полями та проведено її квантування за Діраком.

14. Побудовано модель замкненої безнатягової спінової струни у D-вимірному просторі анти-де Сіттера у зазначеній реалізації. Здобуто квантові генератори її калібрувальних симетрій, у (анти)комутаційних співвідношеннях яких відсутні аномалії.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Список наукових праць, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring and $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry, Physical Review D, 2009, V.79, 106007. arXiv:0811.2813 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

2. D.V. Uvarov, $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry of the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Classical and Quantum Gravity, 2011, V.28, 235010. arXiv:1011.5457 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

3. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring in the light-cone gauge, Nuclear Physics B, 2010, V.826, P.294-312. arXiv:0906.4699 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

4. D.V. Uvarov, Light-cone gauge Hamiltonian for $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Modern Physics Letters A, 2010, V.25, P.1251-1265. arXiv:0912.1044 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

5. D.V. Uvarov, Kaluza-Klein gauge and minimal integrable extension of $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ sigma-model, International Journal of Modern Physics A, 2012, V.27, 1250118. arXiv:1203.3041 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

6. D.V. Uvarov, Lagrangian mechanics of massless superparticle on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Nuclear Physics B, 2013, V.B867, P.354-369. arXiv:1205.5388 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

7. D.V. Uvarov, On integrability of massless $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superparticle equations, Modern Physics Letters A, 2014, V.29, 1350183. arXiv:1212.3157 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

8. D.V. Uvarov, On integrability of $D0$-brane equations on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Journal of Physics: Conference Series, 2014, V.482, 012043. arXiv:1306.0732 [hep-th].

9. D.V. Uvarov, (Super)twistors and (super)strings, Classical and Quantum Gravity, 2006, V.23, P.2711-2726. arXiv:hep-th/0601149. (SJR квартиль Q1).

10. D.V. Uvarov, Gauge symmetries of strings in supertwistor space, International Journal of Modern Physics A, 2007, V.22, P.1663-1683. arXiv:hep-th/0606222. (SJR квартиль Q2).

11. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for higher dimensional superstrings, Classical Quantum Gravity, 2007, V.24, P.5383-5400. arXiv:hep-th/0703051. (SJR квартиль Q1).

12. D.V. Uvarov, Canonical description of $D = 10$ superstring formulated in supertwistor space, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, V.42, 115204. arXiv:0804.0908 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

13. D.V. Uvarov, Conformal higher-spin symmetries in twistor string theory, Nuclear Physics B, 2014, V.889, P.207-227. arXiv:1405.7829 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

14. D.V. Uvarov, Spinor description of $D = 5$ massless low-spin gauge fields, Classical and Quantum Gravity, 2016, V.33, 135010. arXiv:1506.01881 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

15. D.V. Uvarov, Ambitwistors, oscillators and massless fields on AdS_5, Physics Letters B, 2016, V.762, P.415-420. arXiv:1607.05233 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

16. D.V. Uvarov, Multitwistor mechanics of massless superparticle on $AdS_5 \times S^5$ superbackground, Nuclear Physics B, 2020, V.950, 114830. arXiv:1907.13613 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

17. D.V. Uvarov, Oscillator approach to quantization of $AdS_5 \times S^5$ superparticle in twistor formulation, Physics Letters B, 2021, V.815, 136132. arXiv:2004.03356 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

18. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for massless superparticle in $AdS_5 \times S^5$ superspace, Nuclear Physics B, 2018, V.936, P.690-713. arXiv:1807.08318 [hep-th]. (SJR квартиль Q1).

19. D.V. Uvarov, Massless spinning particle and null-string on AdS_d: projective-space approach, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2018, V.51, 285402. arXiv:1707.05761 [hep-th]. (SJR квартиль Q2).

20. D.V. Uvarov, Spinning particle interacting with electromagnetic and antisymmetric gauge fields in anti-de Sitter space, European Journal of Physics C, 2019, V.79, 425. (SJR квартиль Q1).

Список наукових праць, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. D.V. Uvarov, Supertwistor formulation for the first-order superstring action, in Proceedings of IV Summer School in Modern Mathematical Physics (3-14 September 2006, Institute of Physics, Belgrade), Institute of Physics, Belgrade 2007, P.391-402.

2. D.V. Uvarov, Twistor formulation for superstrings, in Bogolyubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (15-18 September 2009, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.151.

3. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring and $D = 3$ $\mathcal{N} = 6$ superconformal symmetry, in II Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (22-24 December 2010, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.18.

4. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times CP^3$ superstring as $OSp(4|6)/(SO(1,3) \times U(3))$ sigma-model in conformal basis, in Proceedings of III International Conference "Quantum Electrodynamics and Statistical Physics" (29 August - 2 September 2011, NSC KIPT, Kharkiv), Problems of Atomic Science and Technology, 2012, N1, P.32-36. (SJR квартиль Q4). `http://vant.kipt.kharkov.ua/TABFRAME2.html`

5. D.V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring in AdS-light-cone gauge, in III Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (21-23 December 2011, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.21.

6. D.V. Uvarov, Spinor description and integral on-shell representation for curvatures of $D = 5$ gauge fields, in International Conference "Problems of Theoretical Physics" dedicated to the 50-th anniversary of Bogolyubov ITP foundation (24-26 May, 2016, Bogolyubov ITP, Kyiv). Book of Abstracts P.43.

7. D.V. Uvarov, Classically integrable models of massless particle and $D0$-brane on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, in V International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to V.A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the NAS of Ukraine (19-24 June 2017, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv). Book of Abstracts P.51.

8. D.V. Uvarov, Ambitwistor space realization of $SU(2,2)$ positive energy unitary irreducible representations corresponding to massless fields on anti-de Sitter space, in VI International Conference "Analysis and Mathematical Physics" dedicated to the centennial anniversary of the NAS of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory (18-22 June 2018, B.I. Verkin ILTPE, Kharkiv). Book of Abstracts P.32-33.

9. D.V. Uvarov, Features of the twistor formulation of the massless superparticle on $AdS_5 \times S^5$ superbackground, in Proceedings of XXVIth International Colloquium on Integrable Systems (8-12 July 2019, Czech Technical University, Prague), Journal of Physics: Conference Series, 2019, V.1416, 012039.

Список використаних джерел

1*. J. Gomis, D. Sorokin, L. Wulff, The complete $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superspace for type IIA superstring and D-branes, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0903, 015. arXiv:0811.1566 [hep-th].

2*. O. Aharony, O. Bergman, D.L. Jafferis, J. Maldacena, $N = 6$ superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0810, 091, arXiv:0806.1218 [hep-th].

3*. G. Arutyunov, S. Frolov, Superstrings on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ as a coset sigma-model, Journal of High Energy Physics, 2008, V.0809, 129. arXiv:0806.4940 [hep-th].

4*. B.J. Stefański, Green-Schwarz action for Type IIA strings on $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, Nuclear Physics B, 2009, V.808, P.80-88. arXiv:0806.4948 [hep-th].

5*. J. de Azcarraga, J. Lukierski, Supersymmetric particles with internal symmetries and central charges, Physics Letters B, 1982, V.113, P.170-174.

6*. W. Siegel, Hidden local supersymmmetry in the supersymmetric particle action, Physics Letters B, 1983, V.128, P.397-399.

7*. M.B. Green, J.H. Schwarz, Properties of the covariant formulation of superstring theories, Nuclear Physics B, 1984, V.243, P.285-306.

8*. N. Berkovits, M. Bershadsky, T. Hauer, S. Zhukov, B. Zweibach, Superstring theory on $AdS_2 \times S^2$ as a coset manifold, Nuclear Physics B, 2000, V.567, P.61-86. arXiv:hep-th/9907200.

9*. D. Sorokin, L. Wulff, Evidence for the classical integrability of the complete $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring, Journal of High Energy Physics, 2010, V.1011, 143. arXiv:1009.3498 [hep-th].

10*. A. Cagnazzo, D. Sorokin, L. Wulff, More on integrable structures of superstrings in $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ and $AdS_2 \times S^2 \times T^6$ superbackgrounds, Journal of High Energy Physics, 2012, V.1201, 004. arXiv:1111.4197 [hep-th].

11*. P.A. Grassi, D. Sorokin and L. Wulff, Simplifying superstring and $D-$brane actions in $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superbackground, Journal of High Energy Physics, 2009, V.0908, 060. arXiv:0903.5407 [hep-th].

12*. I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Spinor Cartan moving $n-$hedron, Lorentz-harmonic formulations of superstrings, and $\kappa-$symmetry, Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, 1991, V.54, P.421-424.

13*. I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Green-Schwarz superstrings in spinor moving frame formalism, Physics Letters B, 1992, V.288, P.77-84.

14*. I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Twistor-like approach in the Green-Schwarz $D = 10$ superstring theory, Physics of Particles and Nuclei, 1994, V.25, P.453-477.

15*. R. Omnes, A new geometric approach to the relativistic string, Nuclear Physics B, 1979, V.149, P.269-284.

16*. A.A. Zheltukhin, Classical relativistic string as an exactly solvable sector of the $SO(1,1) \times SO(2)$ gauge model, Physics Letters B, 1982, V.116, P.147-150.

17*. T. Shirafuji, Lagrangian mechanics of massless particles with spin, Progress of Theoretical Physics, 1983, V.70, P.18-35.

18*. I.A. Bandos, J.A. de Azcarraga, C. Miquel-Espanya, Superspace formulations for the (super)twistor string, Journal of High Energy Physics, 2006, V.0607, 005. arXiv:hep-th/0604037.

19*. F. Delduc, A.S. Galperin, E. Sokatchev, Lorentz-harmonic (super)fields and (super)particles, Nuclear Physics B, 1992, V.368, P.143-171.

20*. A.S. Galperin, P.S. Howe, K.S. Stelle, The superparticle and the Lorentz group, Nuclear Physics B, 1992, V.368, P.248-280. arXiv:hep-th/9201020.

21*. A.A. Zheltukhin, Gauge description and nonlinear string equations in D-dimensional space-time, Theoretical and Mathematical Physics, 1983, V.56, P.785-795.

22*. N. Berkovits, Alternative string theory in twistor space for $N = 4$ super-Yang-Mills theory, Physical Review Letters, 2004, V.93, 011601. arXiv:hep-th/0402045.

23*. M. Gunaydin, N. Marcus, The spectrum of the S^5 compactification of the chiral $N = 2$, $D = 10$ supergravity and the unitary supermultiplets of $U(2,2|4)$, Classical and Quantum Gravity, 1985, V.2, P.L11-L17.

24*. M. Gunaydin, D. Minic, M. Zagermann, $4d$ doubleton conformal theories, CPT and IIB string on $AdS_5 \times S^5$, Nuclear Physics B, 1998, V.534, P.96-120. arXiv:hep-th/9806042.

25*. L.B Litov, V.N. Pervushin, Quantum supertwistors and fundamental superspaces, Physics Letters B, 1984, V.147, P.76-80.

26*. P. Claus, M. Gunaydin, R. Kallosh, J. Rahmfeld, Y. Zunger, Supertwistors as quarks of $SU(2,2|4)$, Journal of High Energy Physics, 1999, V.9905, 019. arXiv:hep-th/9905112.

27*. R.R. Metsaev, C.B. Thorn, A.A. Tseytlin, Light cone superstring in AdS space-time, Nuclear Physics B, 2001, V.596, P.151-184. arXiv:hep-th/0009171.

28*. I. Bars, Twistor superstring in 2T-physics, Physical Review D, 2004, V.70, 104022. arXiv:hep-th/0407239.

29*. I. Bars, Twistors and 2T-physics, American Institute of Physics Conference Proceedings, 2005, V.767, P.3-27. arXiv:hep-th/0502065.

30*. H.J. Kim, L.J. Romans, P. van Nieuwenhuizen, Mass spectrum of chiral ten-dimensional $N = 2$ supergravity on S^5, Physical Review D, 1985, V.D32, P.389-399.

31*. P. Howe, S. Penati, M. Pernicci, P. Townsend, Wave equations for arbitrary spin from quantization of the extended supersymmetric spinning particle, Physics Letters B, 1988, V.215, P.555-558.

32*. A. Barducci, R. Casalbuoni, L. Lusanna, Supersymmetries and the pseudoclassical relativistic electron, Nuovo Cimento A, 1976, V.35, P.377-399.

33*. A.A. Zheltukhin, On superfield structure of action for supersymmetric particle, Soviet Journal of Nuclear Physics, 1987, V.46, P.1072.

34*. I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Hamiltonian mechanics and absence of critical dimensions for null membranes, Soviet Journal of Nuclear Physics, 1989, V.50, P.556-560.

35*. I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Null super p-brane: Hamiltonian dynamics and quantization, Physics Letters B, 1991, V.261, P.245-250.

36*. I.A. Bandos, A.A. Zheltukhin, Null super p-branes quantum theory in 4-dimensional space-time, Fortschritte der Physik, 1993, V.41, P.619-676.

Анотація

Уваров Д.В. Суперсиметричні моделі спінових частинок і струн у викривлених та твісторних просторах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (10 – природничі науки, 104 – фізика і астрономія). – Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України, Харків, 2024.

Основна ідея дисертації полягає у дослідженні узагальненої динаміки і симетрій у теорії суперсиметричних релятивістських спінових частинок і струн, які виникають при переході від пласких до викривлених та твісторних просторів. Її актуальність пояснюється фундаментальними труднощами на шляху побудови квантової теорії гравітації на основі теорії суперструн. У суперпросторах анти-де Сіттера, таких як $AdS_5 \times S^5$ та $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, активно досліджується можливість голографічного формулювання теорії квантової гравітації. Їх симетрії можуть бути реалізовані як суперконформні симетрії, що визначає першочерговий інтерес до застосування суперсиметризованого твісторного підходу до суперструн, вкладених у ці суперпростори. У дисертаційній роботі вивчається поєднання теорії твісторів та теорії суперструн. З цією метою побудовані нові моделі та запропоновані нові формулювання відомих моделей суперсиметричних частинок і струн. Здобуті також нові результати при вивченні відомих моделей, таких як $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ суперструна та безмасова $AdS_5 \times S^5$ суперчастинка. Результати дисертації свідчать про те, що поєднання теорії твісторів і теорії

суперструн та використання методів теорії інтеґровних систем представляють інтерес для розв'язання проблеми об'єднання квантової механіки і гравітації.

Ключові слова: суперсиметрія, суперпростір, супертвістор, суперструна, суперчастинка, лагранжіан, гамільтоніан, класична інтеґровність, гамільтонова в'язь, осцилятор.

Abstract

Uvarov D. V. Supersymmetric models of spinning particles and strings in curved and twistor spaces. – Qualification scientific work retaining manuscript rights.

Thesis submitted for the scientific degree of the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics on the specialty 01.04.02 "Theoretical Physics" (10 – Natural Sciences, 104 – Physics and Astronomy). – National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology" of NAS of Ukraine, Kharkiv, 2024.

In the thesis developed is supersymmetric theory of relativistic spinning particles and strings in curved and twistor spaces. Studied are their classical and quantum symmetries on the basis of group-theoretic and geometric approaches of the quantum field theory. Interest to this direction of research is enhanced by recent results of experiments in high-energy physics, gravitation and cosmology. Their explanation requires construction of a theory that would unify all known fundamental interactions. A possibility to construct consistent on the quantum level theory exists in the framework of the superstring theory in 10-dimensional space-time. This theory is based on the idea of relativistic extended objects – strings and branes – and the concept of supersymmetry unifying bosons and fermions. Recently there was attained some progress in constructing quantum gravity based on application of the holographic principle in superstring theory. According to this principle quantum gravity in a bounded space-time domain could be described in terms of quantum field theory in the boundary space. The most examined is application of the holographic principle for construction of the quantum gravity in the anti-de Sitter superspaces such as $AdS_5 \times S^5$ and $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ ones. There it is assumed to be formulated as the Yang-Mills or Chern-Simons theory in flat boundary superspaces. Global symmetries of these anti-de Sitter superspaces are realized as superconformal symmetries of the boundary superspaces. The latter underlie supersymmetric extention of the twistor space. Therefore unification of the twistor theory and string theory seems to be a promising approach to address the quantum gravity problem on the basis of the holographic principle.

To continue further development of this approach in the thesis constructed were novel models and proposed novel formulations of known supersymmetric models of relativistic particles and strings in the anti-de Sitter and twistor spaces. There were obtained new results in the study of known supersymmetric models in these spaces. Examined was the symmetry structure of considered models and its dependence of the space geometry, spin degrees of freedom and mechanisms of interaction with background fields.

For local symmetries of the superstring model in the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superspace in the thesis there were proposed the light-cone gauge conditions corresponding to the light cone on the boundary of the four-dimensional anti-de Sitter space AdS_4 in the conformally-flat parametrization. There were obtained the superstring Lagrangian and Hamiltonian in this gauge. Also there was proposed partial κ-symmetry gauge, in which in the sector of supersymmetries broken in the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superspace remain only two out of eight coordinates. Found was the zero-curvature representation for the superstring equations in such partial gauge. This indicates on possible classical integrability of the $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ superstring equations. Presented in the thesis proof of the classical integrability of massless particle and $D0$-brane equations in the mentioned superspace sustains this possibility. There were proposed novel supertwistor formulations of the superstring models and elaborated the Lagrangian and Hamiltonian approaches to their description. It was established the connection between superspace and supertwistor formulations of the massless superparticle model in the $AdS_5 \times S^5$ superspace. In the supertwistor formulation there was for the first time performed the Dirac quantization of this model. There was proposed novel formulation of the massless spinning particle model, in which symmetry group of the D-dimensional anti-de Sitter space is linearly realized. This formulation was generalized to the case of particle's interaction with background electromagnetic and Abelian antisymmetric gauge fields and performed its Dirac quantization. It was proposed novel model of the closed tensionless spinning string in the D-dimensional anti-de Sitter space in such realization. There were constructed quantum generators of its gauge symmetries, the (anti)commutation relations of which are anomaly-free.

Obtained results contribute to the range of approaches to overcome difficulties on the way to gravity quantization on the basis of superstring theory.

Key words: supersymmetry, superspace, supertwistor, superstring, superparticle, Lagrangian, Hamiltonian, classical integrability, Hamiltonian constraint, oscillator.