ІНСТИТУТ РАДІОФІЗИКИ ТА ЕЛЕКТРОНІКИ ІМ. О.Я. УСИКОВА

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР

«ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Майзеліс Захар Олександрович

УДК 534.17, 537.877, 538.975, 538.945

ДИСЕРТАЦІЯ

ПОШИРЕННЯ, ВЗАЄМОДІЯ І ДЕКОГЕРЕНЦІЯ МОД У НЕЛІНІЙНИХ КВАНТОВИХ СИСТЕМАХ

01.04.02 – Теоретична фізика

Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

__________________________ З. О. Майзеліс

Науковий консультант: **Апостолов Станіслав Сергійович**, доктор фізико-математичних наук, доцент

Харків – 2021

АНОТАЦІЯ

Майзеліс З. О. Поширення, взаємодія і декогеренція мод у нелінійних квантових системах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (104 – Фізика та астрономія). – Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України, – Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України, Харків, 2021.

У дисертаційній роботі представлені результати дослідження поширення, взаємодії, затухання і декогеренції мод у квантових системах за наявності дії на них адитивного та частотного шумів, а також електронних мод у одновимірному вігнерівському кристалі та листі графена, джозефсонівських електромагнітних мод у шаруватому надпровіднику. Передбачено ряд лінійних та нелінійних ефектів у цих системах.

Зокрема, розвинуто метод відокремлення ефектів адитивного і частотного шумів, що діють у системі за наявності її затухання та декогеренції при збудженні системи на частоті, близькій до резонансу. Згідно цього методу, необхідно аналізувати статистичні моменти старших порядків комплексної координати моди, що знаходиться під дією змушуючої сили в умовах близьких до резонансу. Показано переваги цього методу в порівнянні з традиційним методом аналізу уширення розподілу в площині двох квадратур координати. Показано, як навіть за наявності адитивного шуму більшої амплітуди, ніж у частотного шуму, вже моменти другого і третього порядку дозволяють розрізнити ефекти частотного шуму, нелінійності, або теплового шуму у системі.

Показано, як цей метод аналізу моментів комплексної координати дозволяє не лише детектувати наявність частотного шуму, але і визначити його тип

і статистичні характеристики. Проаналізовано важливий клас білих частотних шумів на прикладах гауссівського і пуассонівського шумів, отримано асимптотичні вирази для старших моментів у випадку слабкого шуму з довільною статистикою. Запропоновано алгоритм знаходження моментів для марківських процесів, які є особливо важливими з точки зору застосувань, оскільки неперервними марківськими шумами моделюють вплив адсорбованих на поверхні мікрорезонатора молекул, що дифундують по його поверхні. Дискретні марківські шуми представляють інтерес у електронних системах, де відбувається перемикання між двома можливими значеннями частоти резонатора. Для телеграфних сигналів запропоновано схему експериментальної перевірки отриманих закономірностей і експериментальні дані порівняно з теоретичними передбаченнями для торсіонного мікрорезонатора.

Показано, що завдяки взаємодії механічної моди з квантовою дворівневою системою вона буде не просто зазнавати дії ефективного телеграфного шуму. При великій енергії дворівневої системи у порівнянні з енергією моди, і при особливому, дисперсійному зв'язку між ними, може реалізовуватися декілька станів цієї системи. Побудовано теорію мультистабільності в цій системі у наближенні середнього поля, і показано, що при контакті з однією дворівневою системою може спостерігатися бістабільність або тристабільність. В той же час більша кількість рівнів у квантовій системі, зв'язаній з модою, призводить до більшої кількості співіснуючих рівноважних станів у системі. Показано, що при монотонному збільшенні, а потім зменшенні величини зовнішньої сили, що збуджує моду, зміна її енергії може мати гістерезисний характер. Поблизу точок біфуркації вплив квантової системи на моду не може бути описаний в рамках теорії середнього поля. Знайдено швидкість переходу між метастабільними станами у квазікласичному наближенні з урахуванням квантового шуму внаслідок контакту з дворівневою системою.

Показано, що мультистабільність може виникати і у класичній нелінійній коливальній системі при наявності так званого аргументального зв'язку з високочастотним просторово локалізованим полем. Вивчено аргументальні коливання на прикладі маятника Дубошинського і показано, що в системі можуть встановлюватися змушені коливання з псевдоквантовим дискретним спектром енергій. Знайдено, яка саме амплітуда встановлюється в системі в залежності від початкового відхилення маятника і початкової фази поля. Вважаючи початкову фазу неконтрольованим параметром, що визначає стохастичність системи, отримані ймовірності встановлення амплітуд для різних мод в залежності від початкової енергії маятника. Показано, що навіть при точному збігу початкової енергії з однією з енергій дискретного спектра вимушених коливань, в результаті можуть встановитися і менші амплітуди.

Вивчено вплив нульових електромагнітних мод вакуума на взаємодію в системі, що складається з тонкої плівки і масивного тіла, з урахуванням скінченної частоти релаксації в речовині плівки. Цей вплив призводить до виникнення сили Казимира між двома тілами, і часткова прозорість плівки для електромагнітних мод вакуума призводить до чутливості цієї сили до діелектричних властивостей плівки. Це дозволяє за допомогою вимірювання сили Казимира вивчати властивості матеріалів. Зокрема, сила Казимира може або зменшуватися з ростом температури, або мати мінімум на температурній залежності, відповідно до температурної поведінки частоти релаксації.

Проаналізовано вплив ефекту Казимира на роботу спектроскопічної установки, в якій вивчається атомний перехід атомів стронцію, захоплених у вузлах фотонного кристалу всередині порожнистого волокна. Ширина піка в цій установці проаналізована в залежності від густоти атомів у вузлах фотонного кристалу, інтенсивності світла у пучках тощо. Знайдена залежність часу декогеренції стану атома від відстані його до краю волокна. Виконано оцінку зміни частоти за рахунок ефекту Казимиру з урахуванням різниці поляризовностей атомів у двох станах, геометричного фактору, що враховую взаємодію з усіма стінками волокна, прозорості стінок і діелектричної проникності їх матеріалу, а також температури. Показано, що у сучасних установках, у яких відносна похибка за рахунок факторів іншої природи не менша за 10^{-17}, вкладом ефекту Казимира, який оцінено таким що не перевищує $3 \cdot 10^{-18}$, можна знехтувати.

Отримано і проаналізовано теплопровідність одновимірного вігнерівського кристалу з урахуванням нелінійності закону дисперсії електронних мод в ньому. Показано, що саме врахування взаємодії мод дозволяє коректно описувати процеси теплової релаксації в системі. Враховано вклад процесів, що змінюють число мод, які поширюються в прямому і зворотньому напрямку. За допомогою кінетичного рівняння Больцмана розрахована залежність термокондактанса від довжини системи і знайдена залежність плазмової довжини від температури. Проаналізовано динаміку врівноваження системи після раптової зміни числа мод, які поширюються в один бік, що є важливим при аналізі процесів термолізації.

Досліджено електронні моди у листі графену, що знаходиться у електричному полі, потенціал якого має профіль одновимірного бар'єру. Особлива структура поверхні Фермі в графені призводить до того, що у потенціальному бар'єрі можуть поширюватись локалізовані моди. Це можливо завдяки симетрії системи відносно заміни електронів на дірки і потенціального бар'єра на яму. Досліджено дисперсійні криві локалізованих мод, які мають максимуми. Така немонотонність закону дисперсії призводить до особливостей густини електронних станів у графені як функції висоти або ширини потенціального бар'єру. Знайдено провідність листа графену і показано, що вона може бути представлена як сума вкладів неперервного спектру і вкладів локалізованих мод.

Досліджено поширення джозефсонівських електромагнітних локалізованих мод у пластині шаруватого надпровідника, напрямок поширення яких є довільним по відношенню до площини шарів. Показано, що завдяки анізотропії шаруватих надпровідників хвилі в них можуть бути представлені у вигляді суперпозиції звичайних та незвичайних мод, що призводить до чутливості закону дисперсії до напрямку поширення. Показано, що збудження локалізованих мод у пластині шаруватого надпровідника призводить до піків у залежності поглинання терагерцевого випромінення від кута падіння на систему. Завдяки немонотонності дисперсійних кривих, такі піки можуть бути, як уособленими, так і розширюватися або навіть роздвоюватися. Показано, що за рахунок нелінійності рівнянь, що описують електромагнітне поле в системі, статичне магнітне поле може змінювати тензор ефективної діелектричної проникності шаруватого надпровідника, впливаючи на поширення терагерцевих мод у системі і їх закон дисперсії.

Одержані результати доповнюють і розширюють наявні уявлення про поширення, взаємодію і декогеренцію мод у нелінійних квантових системах при наявності затухання або зовнішніх шумів. Ці результати можуть бути використані при розробці нанопристроїв та експериментальних установок у мікро- і нано-масштабах, у системах зчитування інформації квантових комп'ютерів та електроніки терагерцового діапазону. Наприклад, метод відділення і аналізу частотного шуму у нано- і мікрорезонаторах дозволив виявити частотні шуми навіть на фоні більшого за амплітудою теплового шуму, присутнього в установках, цей метод може бути використаний в системах детектування і визначення мас макромолекул. Аналіз мультистабільності в системі моди і квантової дворівневої системи, зв'язаних дисперсійним зв'язком, може бути використаний для аналізу стану реєстру квантового комп'ютера.

Ключові слова: частотний шум, мультистабільність вібраційної моди, декогеренція стану квантової системи, ефект Казимира, вігнерівський кристал, локалізовані електронні моди, коефіцієнт поглинання системи, джозефсонівська хвиля.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. Maizelis Z. A., Roukes M. L., Dykman M. I. Detecting and characterizing frequency fluctuations of vibrational modes. *Phys. Rev. B*. 2011. Vol. 84, No. 14. P. 144301. Квартиль Q1.

2. Maizelis Z. A. Electromechanical resonator under the influence of telegraph unbalanced frequency noise. *Telecomm. Radio. Eng.*. 2016. Vol. 75, No. 9. C. 811–821. Квартиль Q3.

3. Sun F., Zou J., Maizelis Z. A., Chan H. B. Telegraph frequency noise in electromechanical resonators. *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 91, No. 17. P. 174102. Квартиль Q1.

4. Maizelis Z., Rudner M., Dykman M. I. Vibration multistability and quantum switching for dispersive coupling. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 89, No. 15. P. 155439. Квартиль Q1.

5. Shumaev A. I., Maizelis Z. A. Distribution functions of argumental oscillations of the Duboshinskiy pendulum. *J. Appl. Phys*. 2017. Vol. 121, No. 15. P. 154902. Квартиль Q2.

6. Yampol'skii V. A., Savel'ev S., Mayselis Z. A., Apostolov S. S., Nori F. Anomalous temperature dependence of the Casimir force for thin metal films. *Phys. Rev. Lett*. 2008. Vol. 101, No. 9. P. 096803. Квартиль Q1.

7. Yampol'skii V. A., Savel'ev S., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Nori F. Temperature dependence of the Casimir force for bulk lossy media. *Phys. Rev. A*. 2010. Vol. 82, No. 3. P. 032511. Квартиль Q1.

8. Okaba S., Takano T., Benabid F., Bradley T., Vincetti L., Maizelis Z., Yampol'skii V., Nori F., Katori H. Lamb-Dicke spectroscopy of atoms in a hollow-

core photonic crystal fibre. *Nature Comm*. 2014. Vol. 5, No. 1. P. 4096. Квартиль Q1.

9. Apostolov S., Liu D.E., Maizelis Z., Levchenko A. Thermal transport and quench relaxation in nonlinear Luttinger liquids. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88, No. 4. P. 045435. Квартиль Q1.

10. Yampol’skii V. A., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Levchenko A., Nori F. Voltage-driven quantum oscillations of conductance in graphene. *Europhys. Lett.*. 2011. Vol. 96, No. 6. P. 67009. Квартиль Q1.

11. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F., Rokhmanova T. N., Yampol’skii V. A. Transmission of terahertz waves through layered superconductors controlled by a dc magnetic field. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 94, No. 2. P. 024513. Квартиль Q1.

12. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Maizelis Z. A., Rokhmanova T. N., Shmat’ko A. A., Yampol’skii V. A. Localized waves in layered superconductors. *Telecomm. Radio. Eng.*. 2019. Vol. 78, No. 7. P. 615–631. Квартиль Q3.

13. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Shimkiv D. V., Shmat’ko A. A., Yampol’skii V. A. Anomalous dispersion of oblique terahertz waves localized in the plate of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2019. Vol. 45, No. 8. P. 885–893. Квартиль Q3.

14. Mazanov M. V., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Shmat’ko A. A., Yampol’skii V. A. Resonant absorption of terahertz waves in layered superconductors: Wood’s anomalies and anomalous dispersion. *Phys. Rev. B*. 2020. Vol. 101, No. 2. P. 024504. Квартиль Q1.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

15. Yampol’skii V. A., Savel’ev S., Mayselis Z. A., Apostolov S. S., Nori F. Anomal Temperature Dependence of the Casimir Force for Thin Metal Films. *Modern Challenges in Microwave Superconductivity, Photonics and Electronics*: Proceedings of Mini-Colloquium and International Workshop, Kharkiv, Ukraine, 11–12 June 2009.

Kharkiv, 2009. C. 23.

16. Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А., Савельев С. Е., Nori F. Немонотонная температурная зависимость силы Казимира для металлических нанопленок. *НТ-35*: тезисы докладов XXXV Совещания по физике низких температур, г. Черноголовка, Россия, 29 сентября – 9 октября 2009 г.. Черноголовка, 2009. С. 220.

17. Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А., Савельев С. Е., Nori F. Температурная зависимость силы казимировского притяжения металлических пластин конечных размеров. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали IX міжнародної конференції (м. Харків, 1–4 груд. 2009 р.). Харків, 2009. С. 31.

18. Майзелис З. А. Тристабильность колебательной моды, связанной с двухуровневой системой. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XI міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 3–6 грудня 2013 р.) Харків, 2013. С. 1.

19. Majzelis Z. O., Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Applying a DC Magnetic Field as a way to Control the Reflectance of Layered Superconductors. *ICPS 2014*: Proceedings of International Conference of Physics Students, Heidelberg, Germany, 10–17 August, 2014. Kharkiv, 2014. C. 22.

20. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Reflectivity of semi-infinite layered superconductors in presence of external dc magnetic field. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics* Proceedings of 14th Kharkiv Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 14–17 October 2014. Kharkiv, 2014. C. 1.

21. Sun F., Zou J., Maizelis Z., Chan H. B. Characterizing Random Telegraph Frequency Noise in a Micromechanical Oscillator. *APS March Meeting 2014*: Bulletin of the American Physical Society, Denver, Colorado, USA, 3–7 March, 2014 Denver, 2014. C. S24.00005.

22. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Transparency of finite-thickness layered superconductors controlled by DC magnetic field. *Open Readings 2015*: Proceedings of 58th Scientific Conference for Students of

Physics and Natural Sciences, Vilnius, Lithuania, 24–27 March, 2015. Lithuania, 2015. C. 64.

23. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Effect of DC Magnetic Field on Reflectivity of Layered Superconductors. *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves*: Proceedings of 9th International Kharkiv Symposium, Kharkiv, Ukraine, 21–24 June, 2016. Kharkiv, 2016. C. 21.

24. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transmittance of THz Waves Through Finite-thickness Layered Superconductors in the Presence of External DC Magnetic Field. *Applied Physics and Engineering – 2016*: Proceedings of International Young Scientists Forum, Kharkiv, Ukraine, 10–14 October, 2016. Kharkiv, 2016. C. 23.

25. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Перес-Родригес Ф., Макаров Н. М., Ямпольский В. А. Отражение, прохождение и трансформация поляризации волн в слоистых сверхпроводниках. *Current problems in Solid State Physics*: Proceedings of International Jubilee Seminar, Kharkov, Ukraine, 22–23 November, 2016. Kharkiv, 2016. C. 40–41.

26. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. DC magnetic field control of wave transformation in layered superconductors. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. С. 39.

27. Shymkiv D. V., Rokhmanova T., Maizelis Z. A., Kadygrob D. V., Apostolov S. S. Oblique localized Josephson plasma waves in a plate of layered superconductor. *Clusters and Nanostructured Materials (CNM-5)*: Proceedings of International meeting, Uzhgorod, Ukraine, 22–26 October 2018 Uzhgorod, 2018. C. 88–90.

28. Mazanov M. V., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Resonant absorption of electromagnetic waves accompanied by localized modes with anomalous dispersion in layered superconductors.

Low temperature physics – 2019: Proceedings of 8th International Conference for for Professionals and Young Scientists, Kharkiv, Ukraine, 3–7 June 2019 Kharkiv, 2019. C. 83.

ABSTRACT

Maizelis Z. O. Propagation, interaction and decoherence of modes in nonlinear quantum systems. – Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.04.02 “Theoretical physics” (104 – Physics and Astronomy). – O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NAS of Ukraine, – National Science Center ”Kharkiv Institute of Physics and Technology” NAS of Ukraine, Kharkiv, 2021.

The Doctoral Thesis presents the results of the study of propagation, interaction, attenuation and decoherence of modes in quantum systems in the presence of additive noise and frequency noise, electronic modes in a one-dimensional Wigner crystal and graphene sheet, as well as Josephson electromagnetic modes in layered superconductor. A number of linear and nonlinear effects in these systems are provided.

In particular, a method for separating the effects of additive noise operating in the system from frequency noise is developed. According to this method, it is necessary to analyze the statistical moments and cumulants of the higher orders of the complex coordinate of the mode, modulated by the external force in conditions close to resonance. The advantages of this method in comparison with the traditional method of analyzing the broadening of the distribution in the plane of in-phase and out of phase coordinates, are shown. It is proved that even in the presence of additive noise of greater amplitude than that of frequency noise, second and third-order cumulants allow to distinguish the effects of frequency noise, nonlinearity, or thermal noise in the system.

The proposed method of analysis of complex coordinates moments allows not only to detect the presence of frequency noise, but also to determine its type and statistical characteristics. An important class of white frequency noise is analyzed on the examples of Gaussian and Poisson noise, asymptotic expressions for older moments in the case of weak noise with arbitrary statistics are obtained. An algorithm for finding

moments for Markov processes, which are especially important from the point of view of applications, is proposed. Continuous Markov noise simulates the effect of molecules diffusion on the surface of the microresonator. Discrete Markov noise is of interest in electronic systems, where there is switching between two possible values of the resonator frequency. For telegraph signals, a scheme of experimental verification of the obtained relations is proposed and experimental data is compared with theoretical predictions for a torsion microresonator.

It is shown that due to the interaction of a mode with quantum two-level system, it will not just be exposed to effective telegraph noise. With a high energy of a two-level system in comparison with the energy of the mode, and in the case of a special, dispersive interaction between them, several states of this system can be realized. The theory of multistability in this system in the approximation of the mean field is constructed, and it is shown that bistability or threestability can be observed in the case of contact with one two-level system. At the same time, more levels in the quantum system interacting with the mode leads to greater number of coexisting equilibrium states in the system. It is shown that with a monotonic increase and then decrease of the magnitude of the external force that excites the mode, the change in its energy can be hysteretic. Near bifurcation points, the influence of a quantum system on the mode cannot be described in terms of the mean field theory. The rate of transition between metastable states in the quasiclassical approximation is found, taking into account quantum noise due to contact with a two-level system.

It is shown that multistability can also occur in a classical nonlinear oscillatory system in the presence of a so-called argumental coupling with a high-frequency spatially localized field. Argumental oscillations are studied on the example of the Duboshinsky pendulum and it is shown that forced oscillations with a discrete energy spectrum can be established in the system. It is found what amplitude is set in the system depending on the initial deviation of the pendulum and the initial phase of the field. Considering the initial phase as an uncontrolled parameter that determines the stochasticity of the system, the probabilities of setting the amplitudes for different modes depending on the initial energy of the pendulum are obtained. It is shown that even with the exact coincidence of the initial energy with one of the energies of the discrete spectrum of forced oscillations, smaller amplitudes can be established as a result.

The influence of zero oscillations of vacuum on a system consisting of a thin film and a massive body, taking into account the finite frequency of relaxation in the film material, is studied. This effect gives rise to a Casimir force between the two bodies, and the partial transparency of the film for the electromagnetic modes of vacuum leads to the sensitivity of this force to the dielectric properties of the film. This allows to use measurement of the Casimir force to study the properties of materials. In particular, the Casimir force can either decrease with the increase of temperature, or have a minimum on the temperature dependence, in accordance with the temperature behavior of the relaxation frequency.

The influence of the Casimir effect on the operation of a spectroscopic setup in which the atomic transition of strontium atoms trapped in photonic crystal nodes inside a hollow fiber is studied and analyzed. The width of the peak in this installation is analyzed depending on the density of atoms in the photonic crystal nodes, the light intensity in the beams, etc. The dependence of the decoherence time of the atom state depending on its distance to the fiber edge is found. The frequency change due to the Casimir effect is estimated taking into account the difference between the polarizations of atoms in the two states, the geometric factor that takes into account the interaction with all fiber walls, wall transparency and dielectric constant of their material, and temperature. It is shown that in modern installations, in which the relative error due to factors of another nature is not less than 10^{-17}, the contribution of the Casimir effect, which is estimated to not exceed $3 \cdot 10^{-18}$, can be neglected.

The thermal conductivity of a one-dimensional Wigner crystal is obtained and analyzed taking into account the nonlinearity of the dispersion law of electronic modes in it. It is shown that taking into account the interaction of modes allows to correctly describe the processes of thermal relaxation in the system. The contribution of processes that change the number of modes that propagate in the forward and reverse directions is taken into account. Using the Boltzmann kinetic equation, the dependence of thermal conductivity on the length of the system was calculated and the dependence of plasmon length on temperature was found. The dynamics of system equilibration after a sudden change in the number of modes propagating in one direction, which is important in the analysis of thermalization processes, is analyzed. The obtained results can be used for the analysis of nanostrings, Joule heat to which can be transferred by means of a quantum dot contact or by injection of fast electrons into the system.

Electronic modes in a graphene sheet in an electric field with one-dimensional potential barrier have been studied. The special structure of the Fermi surface in graphene leads to the fact that localized modes can propagate in the potential barrier. This is possible due to the symmetry of the system with respect to the replacement of electrons by holes and the potential barrier by the well. The dispersion curves of localized modes that have maxima are investigated. This nonmonotonicity of the dispersion curves leads to the peculiarities of the density of states in graphene as a function of the height or width of the potential barrier. The conductivity of the graphene sheet is found and it is shown that it can be represented as the sum of the contributions of the continuous spectrum and the contributions of the localized modes.

The propagation of Josephson electromagnetic localized modes in the plate of a layered superconductor, the direction of propagation of which is arbitrary with respect to the plane of the layers, has been studied. It is shown that due to the anisotropy of layered superconductors, waves in them can be represented as a superposition of ordinary and extraordinary modes, which leads to the sensitivity of the dispersion law to the direction of propagation. It is shown that the excitation of localized modes in the plate of a layered superconductor leads to peaks on the dependence of the absorption of terahertz radiation on angle of incidence. Due to the non-monotonicity of the dispersion curves, such peaks can be separate, or broadened or even split into two peaks. It is shown that due to the nonlinearity of the equations describing the electromagnetic field in the system, the static magnetic field can change the tensor of the effective dielectric permittivity of the layered superconductor, influencing the propagation of terahertz modes in the system and their dispersion law.

The obtained results complement and expand the existing knowledge about the propagation and interaction of modes in nonlinear quantum systems in the presence of attenuation or external noise. These results can be used in the development of nanodevices and experimental installations on micro- and nano-scales, in readout systems of quantum computers and electronics of the terahertz range. For example, the proposed method of separation and analysis of frequency noise in nano- and microresonators allowed to detect frequency noise even in spite of the background thermal noise of greater amplitude present in the installations, this method can be used in systems for detecting and determining the masses of macromolecules. Analysis of multistability in the system of mode coupled to a quantum two-level system in the case of dispersive coupling can be used to analyze the state of the register of a quantum computer.

Keywords: frequency noise, multistability of vibrational mode, decoherence of quantum system state, Casimir effect, Wigner crystal, localized electronic modes, absorption coefficient of system, Josephson wave.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА АБРЕВІАТУР

ТШЧ	Телеграфний шум частоти
ККР	Квантове кінетичне рівняння
ВФ	Відемана-Франца (закон)
ДРС	Дворівнева система
КВ	Кристал Вігнера
КРБ	Кінетичне рівняння Больцмана
МОП	Магнітооптична пастка
ОГ	Оптична глибина
ППХД	Поверхневі плазмові хвилі Джозефсона
ПФКВ	Порожнисті фотоннокристалічні волокна
РЛ	Рідина Латтінжера
ТЛ	Томонага-Латтінжера (модель)
H	Повний гамільтоніан системи
H_0	Гамільтоніан моди без врахування взаємодії з термостатом
ρ	Матриця густини стану квантової системи
M_k	Статистичний момент порядку k
Q	Коефіцієнт добротності (відношення власної частоти коливань до швидкості затухання)
$\mathcal{K}$	Теплопровідність одновимірного вігнерівського кристалу
$\hat{a}_k^+$	Оператор народження квазічастинок середовища
$\hat{a}_k$	Оператор анігіляції квазічастинок середовища
λ_{ab}	Лондонівська глибина проникнення магнітного поля поперек шарів
λ_c	Лондонівська глибина проникнення магнітного поля вздовж шарів
γ	Параметр анізотропії шаруватого надпровідника ($\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}$)
Ω	Безрозмірна частота джозефсонівської хвилі ($\Omega = \omega/\omega_J$)

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Сучасний розвиток технологій йде шляхом мініатюризації та компактизації приладів і пристроїв з одночасним зростанням їх потужностей та складності процесів. Це стає можливим завдяки більш точним і швидким розрахункам фізичних величин, не лише за рахунок значного розвитку чисельних методів та схем, але і за рахунок вибору найбільш точних фізичних концепцій, які дозволяють описувати необхідні явища з мінімальними витратами потужності розрахунків. Мабуть одним з найважливіших прикладів у історії фізики є концепція мод, коли замість розрахунку руху окремих ступенів вільності системи аналізується коливання усієї системи на одній частоті [1]. Підхід через аналіз мод є одним з базових у різних областях фізики, зокрема фізиці твердого тіла, кристалофізиці [2], оптиці, електромагнетизмі [3], теорії гравітації [4] та ін.

Хоча використання концепту мод є дуже широким, добре обґрунтованим і вкрай вигідним, його застосування зазвичай передбачає такі наближення, як лінійність систем або слабке затухання. Водночас при описанні реальних систем затухання грає дуже важливу, а часто і визначальну роль, тому врахування його при описі систем з погляду мод стало важливим кроком у розвитку цього концепту [3]. Нелінійність систем з першого погляду унеможливлює введення мод, але це вдається зробити у наближенні слабкої нелінійності. Більше того, нелінійність призводить до важливого ефекту взаємодії мод [2], пояснення якого наблизило до опису реальних фізичних систем.

Ще одним кроком на шляху розвитку концепції мод став перехід до квантових систем, де класичне визначення втратило силу, адже коливання як вид руху набуло у квантовій механіці іншого розуміння. Квантові моди при цьому не втратили своєї значущості. І якщо в лінійному випадку без затухання переформулювання на квантові системи є зазвичай стандартною процедурою, то перехід до більш реалістичних систем, з якими стикаються сучасні нано- і мікротехнології, є дуже нетривіальним і досі невирішеним у фізиці твердого тіла та у суміжних областях.

Нелінійний відгук на зовнішнє збудження характерний, зокрема, для квантових дворівневих систем, що представляють основу для побудови квантового комп'ютера. Затухання ж є наслідком контакту квантової системи з деякою іншою системою, термостатом, і дисипацією енергії у ній за рахунок взаємодії. Ця взаємодія з точки зору квантової механіки є досить складним процесом і призводить до того, що чисті квантові стани стають змішаними, що значно ускладнює опис. Ще одним наслідком взаємодії, що є невід'ємним від затухання, є декогеренція. Саме ці явища є обмежуючими для розвитку технологій квантових комп'ютерів та багатьох інших нанотехнологій, адже проблема створення закритих систем виходить на перший план при зменшенні масштабів систем. Водночас більш складна взаємодія з зовнішнім середовищем, що передбачає окрім затухання і декогеренції, наявність, наприклад, адитивних або фазових шумів, є невивченою проблемою.

Важливим фактором при описі квантових мод є розмірність системи, і якщо для одних явищ зміна розмірності призводить лише до кількісних очікуваних змін, то для інших, в залежності від розмірності, система може проявляти якісно різні властивості, зокрема, проблема нескінченої провідності для одно- та двовимірних надпровідних кристалів при температурах, вищих за критичну [5], або дискусія про стійкість двовимірних графенових плівок [6]. Метаматеріали та сильноанізотропні матеріали проявляють ряд особливих властивостей, поширення мод у таких системах має ряд притаманних їм явищ, зокрема явища негативної рефракції [7], або резонансні ефекти при збудженні у них власних мод електронної плазми [5].

Низка невирішених фундаментальних і прикладних проблем щодо впливу нелінійності і затухання на еволюцію і взаємодію мод у квантових системах різної розмірності і структури визначають важливість і актуальність досліджень, проведених в даній дисертаційній роботі. Зокрема, розроблено теорію відгуку квантових систем на зовнішнє збудження за наявності як затухання, так і частотних шумів, що діють на систему. Розвинено метод відокремлення ефекту різних шумів на статистичні характеристики відгуку. Досліджено мультистабільність систем при взаємодії із зовнішнім термостатом, що є важливим для вивчення розподілу системи поблизу точок біфуркації. Взаємодія з термостатом і декогеренція може обмежувати точність спектроскопічних методів або точність квантового годинника, і в дисертаційній роботі вивчена можливість цього для порожнистого фотонного кристалічного волокна. Крім того, досліджено квантові ефекти у одновимірному електронному вігнеровському кристалі, скінченність часу релаксацій в якому можлива лише при врахуванні нелінійності закону дисперсії мод. Показано, що у двовимірному листі графену поширюються особливі моди, що обумовлені не потенціальною ямою, як це є звичним у квантовомеханічних системах, а потенціальним бар'єром. Нарешті, досліджені джозефсонівські моди у пластині шаруватого надпровідника, які в залежності від напрямку поширення, мають різну дисперсію за рахунок анізотропії системи. Окрім того, збудження таких мод призводить до аномалій у взаємодії пластини з зовнішнім терагерцевим випроміненням. Саме це коло досліджень, які мають фундаментальне та прикладне значення, робить тему дисертації актуальною.

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційної праці полягає у виявленні специфічних особливостей при поширенні, взаємодії, затуханні та декогеренції мод у нелінійних квантових системах із скінченною кількістю ступенів вільності при врахуванні взаємодії з зовнішнім термостатом, джерелами адитивних та фазових шумів, в одно- та двовимірних кристалічних системах, сильноанізотропних пластинах шаруватих надпровідників, і в дослідженні ефектів, викликаних цими модами.

Для досягнення поставленої мети було сформульовано наступні завдання:

- розробити теоретичний метод відокремлення впливів адитивного та частотного шумів, які діють на квантову систему, у її відгуку на зовнішнє збудження, при наявності затухання і декогеренції у системі;

● дослідити статистичні моменти старших порядків для комплексної координати осцилятора при його збудженні поблизу резонансу за наявності частотного шуму і розробити методику експериментальної перевірки отриманих результатів;

● побудувати теорію нелінійного відгуку гармонічного резонатора, дисперсійно зв'язаного з квантовою дворівневою системою;

● дослідити мультистабільність аргументальних коливань на прикладі маятника Дубошинського та знайти функцію розподілу системи за отриманими модами;

● дослідити вплив електромагнітних мод вакуума на систему тонкої плівки і масивного тіла, що призводить до сили Казимира тяжіння плівки до масивного тіла за наявності дисипацій;

● дослідити вплив сили Казимира на точність спектроскопії Лемба-Діка для атомів у порожнині фотонного кристалічного волокна;

● розробити теорію поширення електронних мод у вігнерівському кристалі з урахуванням нелінійності закону дисперсії мод;

● дослідити моди, локалізовані на потенціальному бар'єрі в листі графену і обумовлену ними електропровідність;

● розвинути теорію локалізованих джозефсонівських електромагнітних мод, що поширюються у пластині шаруватого надпровідника під довільним кутом по відношенню до площини шарів у пластині.

Об'єктом дослідження є ефекти при поширенні, інтерференції, затуханні та декогеренції нелінійних мод різної природи у одновимірних, двовимірних та шаруватих квантових системах за наявності контакту із зовнішнім середовищем та джерелами шумів.

Предметом дослідження є статистичні моменти старших порядків для комплексної координати моди, заповненість рівнів мультистабільних систем, сила

Казимира, ширина переходу атомного годинника, теплопровідність вігнерівського кристала, дисперсійна залежність локалізованих мод в потенціальному бар'єрі листа графену і в пластині шаруватого надпровідника.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених у дисертації задач були використані наступні методи теоретичної фізики: метод аналітичного розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь; метод квантового кінетичного рівняння для матриці густини станів; метод аналізу комплексної координати квантової моди; метод повільних змінних; методи знаходження міжшарової різниці фаз параметра порядку у шаруватому надпровіднику за допомогою вирішення системи зв'язаних калібрувально-інваріантних синусоїдальних рівнянь Гордона; метод трансфер-матриць для дослідження коефіцієнтів відбиття шаруватої системи; метод аналізу інтегралу зіткнень у квантово-кінетичному рівнянні Больцмана.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше розвинуто теоретичний метод відокремлення впливів адитивного і частотного шумів для аналізу динаміки квантової моди за наявності її затухання та декогеренції при збудженні системи на частоті, близькій до резонансу. Показано, як вивчення статистичних моментів старших порядків системи дозволяє виявити наявність різних шумів, що не є можливим виходячи з аналізу лише спектру відгуку. Отримані результати справедливі як для класичного, так і для квантового осцилятора. Цей метод дозволяє вивчати властивості відгуку систем на частотний шум навіть за наявності адитивного шуму, що має більший вплив на спектр системи.

2. Вперше отримані аналітичні вирази для статистичних моментів старшого порядку комплексної координати моди за наявності частотного шуму з різними статистичними властивостями, з урахуванням ефектів затухання та декогеренції. Отримані і проаналізовані асимптотичні вирази для моментів старших порядків та кореляційної функції комплексної координати у випадках гауссівського, пуассонівського та телеграфного шумів. Показано, як аналіз саме старших моментів дозволяє характеризувати частотний шум, наявний у системі. Запропоновано

схему проведення експериментальної перевірки отриманих закономірностей для механічного торсіонного мікрорезонатора і доведено можливість відокремлення частотного шуму від адитивного.

3. Вперше побудовано теорію нелінійного відгуку гармонічного резонатора, дисперсійно зв'язаного з квантовою дворівневою системою. Показано, що завдяки цьому зв'язку амплітуда моди як функція вимушувальної сили проявляє гістерезисні властивості, а при деяких амплітудах зовнішнього збудження можуть спостерігатися декілька станів системи. Зокрема, для випадку контакту з дворівневою системою, мода проявляє тристабільність. Ця специфічна мультистабільність пояснена особливою ефективною нелінійністю моди, що є наслідком дисперсійного зв'язку з квантовою системою. Розрахована швидкість переходу системи між станами рівноваги поблизу точок біфуркації.

4. Вперше досліджено функцію розподілу коливальної системи за модами аргументальних коливань на прикладі маятника Дубошинського. Показано, що у класичній аргументальній системі може формуватися псевдоквантовий спектр вимушених коливань під дією локалізованої сильнонелінійної зовнішньої сили. В залежності від параметрів системи вона виявляє декілька станів вимушених коливань, функцію розподілу за якими вперше знайдено у роботі.

5. Вперше вивчено ефект Казимира впливу квантових мод вакуума на взаємодію тонкої плівки та масивного тіла за наявності дисипацій при ненульовій температурі. Цей ефект призводить до виникнення сили тяжіння, яка складається з двох вкладів, радіаційного та дисипаційного. Загальні вирази для цих вкладів для випадку тяжіння тонкої плівки до масивного металу вперше отримані та проаналізовані у дисертації.

6. Вперше досліджено вплив сили Казимира на точність спектроскопії Лемба-Діка ультрахолодного атому стронцію у фотонно-кристалічному волокні. Досліджено ширину спектральної лінії і вплив на неї різних факторів, зокрема ефекту Казимира взаємодії зі стінками порожнини та взаємодії атомів одного з іншим. Досліджено час декогеренції стану захопленого атома в залежності від

часу його затримки у порожнині та відстані від місця його захоплення до краю порожнини. Оцінена точність оптичного атомного годинника, який побудований таким чином.

7. Вперше побудовано теорію теплового транспорту у вігнерівському кристалі, що супроводжується взаємодією електронних мод. Показано, що саме нелінійність закону дисперсії і врахування міжмодового розсіювання дозволяє коректно описувати динаміку термічного врівноваження системи. Отримана теплопровідність одновимірного вігнерівського кристалу з урахуванням ефектів такого міжмодового розсіювання.

8. Вперше досліджено вплив густини електронних мод, локалізованих на потенціальному бар’єрі, створеному електричним полем, на електропровідність листа графена. Завдяки специфічній будові поверхні Фермі в графені існують моди, які локалізовані поблизу потенціального бар’єру і поширюються вздовж нього. Розраховано електропровідність листа графену у вигляді суми вкладів за модами.

9. Вперше вивчено поширення локалізованих джозефсонівських мод у пластині шаруватого надпровідника, для довільного напрямку їх хвильового вектора по відношенню до площини шарів. Знайдено і проаналізовано закон дисперсії таких мод в залежності від параметрів системи. Показано, що проходження терагерцевого випромінення крізь зразок може бути суттєво пригнічено за рахунок збудження локалізованих джозефсонівських мод у пластині. Окрім того, показано, що зовнішнє стале магнітне поле за рахунок нелінійності джозефсонівської плазми може впливати на поширення лінійних мод, змінюючи, зокрема, тензор ефективної проникності зразка.

Практичне і наукове значення отриманих результатів полягає в тому, що результати досліджень доповнюють і розширюють наявні уявлення про поширення, декогеренцію та взаємодію лінійних та нелінійних мод квантової природи. Зокрема, розвинуто метод відокремлення впливів частотного шуму від адитивного і знаходження його статистичних характеристик за допомогою аналізу статистичних моментів старших порядків комплексної координати осцилятора.

Цей метод перевірено в експерименті з торсіонним мікрорезонатором під дією телеграфного частотного шуму. Отримані в дисертації результати щодо мультистабільності моди, зв'язаної з квантовою малокубітною системою, можуть бути використані, наприклад, при аналізі типових зарядових кубітів, зв'язаних з надпровідними модами порожнин, або кубітів на основі куперівських пар, зв'язаних з наномеханічним резонатором у діючих експериментальних установках. Проведений аналіз важливий для розуміння границь мініатюризації багатьох нанопристроїв, зокрема магнетометрів або квантових годинників. Саме вплив електромагнітних мод вакуума у зазорі на атом і оточуючі його макроскопічні тіла може лімітувати точність спектроскопічних методів. З іншого боку, результати, що стосуються систем з шаруватим надпровідником, можуть бути використані при розробці приладів терагерцевого діапазону, зокрема, контрольованих фільтрів терагерцевого випромінювання. Цей діапазон частот є важливим з точки зору багатьох практичних застосувань у системах безпеки, медичній діагностиці, контролі навколишнього середовища.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, викладені в дисертації, отримані дисертантом самостійно. В дослідженнях, що виконувалися зі співавторами, здобувачеві належить визначальна роль у постановці задач, вирішених у дисертації, формулюванні основних ідей та методів дослідження, проведенні найбільш складних аналітичних і чисельних розрахунків, а також виконанні контролю та перевірці результатів, отриманих іншими співавторами. Результати дисертації опубліковані у статтях [8–21] і тезах доповідей наукових конференцій [22–35]. Здобувач брав участь у постановці задач, вирішених у дисертації, формулюванні основних ідей та методів дослідження, проведенні найбільш складних аналітичних і чисельних розрахунків, а також виконував контроль та перевірку результатів, отриманих іншими співавторами.

У статтях [8–10] здобувачем було розвинуто метод відокремлення двох типів шумів, що діють на квантовомеханічну моду, адитивного і частотного. Він показав, як аналіз статистичних моментів старших порядків комплексної координати не тільки дозволяє відокремити вплив частотного шуму, але і відрізняти різні типи шумів, тим самим аналізуючи їх природу. У праці [8] здобувачем розвинуто цей метод і дана порівняльна характеристика ефекту гауссівського, пуассонівського та телеграфного шумів. У праці [9] здобувачем детально проаналізовано випадок телеграфного шуму, важливого з точки зору практичних застосувань. У праці [10] результати, отримані цим методом, перевіряються в експерименті з торсіонним мікрорезонатором, здобувач виконував всі теоретичні розрахунки, а також приймав участь у постановці експерименту і обробці його результатів.

У статті [11] здобувачем показано, що дисперсійна взаємодія між гармонічною модою і дворівневою системою призводить до ефективної нелінійності моди і неоднозначної залежності амплітуди коливань від вимушуючої сили, а також проаналізовано і узагальнено результати на випадок квантових систем, що складаються з декількох кубітів. У статті [12] здобувачем досліджено функцію розподілу аргументальних коливань за дискретними рівнями в залежності від енергії системи, показано, що мультистабільність системи визначається високою чутливістю до початкових параметрів.

У статті [13] здобувачем досліджено ефект Казимира впливу електромагнітних мод вакуума на взаємодію тонкої металевої плівки і масивного тіла, з урахуванням скінченних дисипацій у металі при ненульовій температурі, що призводить до сили тяжіння між плівкою і тілом. У статті [14] здобувач відокремив в температурній поправці до сили Казимира складову, що залежить від затухання. Саме це дозволило проаналізувати залежність сили взаємодії від ключових параметрів. У статті [15] здобувач дослідив вплив сили Казимира на точність спектроскопії Лемба-Діка, а отже на точність атомного годинника, принцип дії якого базується на знаходженні частоти досліджуваного атомного переходу.

В статтях [16, 17] здобувачем досліджено поширення квантових мод у низькорозмірних системах. В роботі [16] здобувачем побудовано теорію теплового транспорту у вігнерівському кристалі, показано, що саме непружне міжмодове розсіяння дозволяє отримати термокондактанс системи і визначає процес переходу системи до стану термічної рівноваги. В роботі [17] здобувачем передбачено вплив локалізованих на потенціальному бар’єрі електронних мод на електропровідність листа графена.

В статтях [18–21] здобувачем досліджено джозефсонівські електромагнітні моди у пластині шаруватого надпровідника. Загальний огляд дисперсійних властивостей мод у шаруватих надпровідниках був зроблений здобувачем у статті [18]. У роботі [19] здобувач визначив аналітично закон дисперсії мод для хвиль довільного напрямку поширення відносно шарів у пластині. Вплив генерації локалізованих мод на поглинання пластиною терагерцевих хвиль був проаналізований здобувачем в роботі [20]. В статті [21] здобувачем досліджено вплив зовнішнього постійного магнітного поля на тензор ефективної діелектричної проникності пластини, а отже на розповсюдження лінійних джозефсонівських мод через пластину.

Статті [13, 21], окрім результатів, представлених у основних положеннях даної дисертації, містять результати, які були представлені у кандидатській [36] та у докторській [37] дисертаціях С. С. Апостолова. Результати, отримані С. С. Апостоловим, не перетинаються з результатами, отриманими здобувачем. У статті [13] здобувачем визначені основні методи та ідеї дослідження, зроблені принципові аналітичні розрахунки, виконаний контроль та перевірка результатів, отриманих співавторами, а також проведений аналіз та узагальнення результатів. У свою чергу, С. С. Апостолов виконував аналітичні та чисельні розрахунки, а також проводив аналіз отриманих залежностей від параметрів задачі. У статті [21] здобувачем проаналізовано і досліджено вплив зовнішнього постійного магнітного поля на тензор ефективної діелектричної проникності і на поширення джозефсонівських мод, тоді як С. С. Апостоловим розроблено метод теоретичного дослідження електромагнітного транспорту у зразку шаруватого надпровідника при взаємодії його з незмінним у часі магнітним полем. Нижче більш детально викладено результати здобувача та результати С. С. Апостолова.

У статті [13] здобувач вивчив ефект Казимира впливу електромагнітних мод вакуума на тонку металеву плівку і масивне тіло, що знаходиться поблизу нього, з урахуванням скінченного затухання і температури, отримав загальні вирази (6)–(8) для сили тяжіння між плівкою і металевою кулею. Ним були сформульовані основні відмінності від випадку взаємодії двох масивних тіл. У свою чергу, С. С. Апостолов, використовуючи результати, отримані здобувачем, вивів асимптотичні вирази (9)–(13) для сили Казимира в системі «масивний метал — металева наноплівка», проаналізував залежність цієї сили від температури і визначив оптимальні параметри задачі (товщина плівки, характеристики метала) для можливого експериментального спостереження аномальності цієї залежності.

У статті [21] здобувачем досліджено вплив зовнішнього постійного магнітного поля на поширення джозефсонівських мод у пластині шаруватого надпровідника, отримано вираз для тензора ефективної діелектричної проникності матеріала та показано, що завдяки нелінійності магнітне поле формує своєрідний фон для поширення лінійних мод. У свою чергу, С. С. Апостолов показав, що за допомогою магнітного поля можна контролювати ступінь прозорості шаруватого надпровідника і визначив величину магнітного поля, за якої пластина шаруватого надпровідника стає повністю прозорою.

Таким чином, особистий внесок здобувача у вирішенні задач, поставлених у дисертації, є визначальним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на семінарах відділу теоретичної фізики Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України, кафедри теоретичної фізики ім. І.М. Ліфшиця Харківського національного университету ім. В.Н. Каразіна, а також на наступних всеукраїнських та міжнародних наукових конференціях та школах:

- Modern Challenges in Microwave Superconductivity, Photonics and Electronics: Mini-Colloq. & Internat. Workshop (Ukraine, Kharkiv, 11–12 June 2009),
- XXXV Совещание по физике низких температур НТ-35, (Россия, Черноголовка, 29 сентября – 2 октября 2009),
- IX-а, XI-а та XIII-а Міжнародні конференції «Фізичні явища в твердих

тілах» (Україна, Харків, 1–4 грудня 2009, 3–6 грудня 2013 та 5–8 грудня 2017),

● International Conference of Physics Students (Germany, Heidelberg, 10–17 August 2014),

● 14th Kharkiv Young Scientist Conference on Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics (Ukraine, Kharkiv, 14–17 October 2014),

● APS March Meeting (USA, Denver, Colorado, 3–7 March 2014),

● 58th Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences (Lithuania, Vilnius, 24–27 March 2015),

● 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, MSMW'2016 (Ukraine, Kharkiv, 21-24 June 2016),

● International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering YSF-2016 (Ukraine, Kharkiv, 10–14 October 2016),

● International Jubilee Seminar «Current problems in Solid State Physics» (Ukraine, Kharkiv, 22–23 November 2016),

● International meeting «Clusters and Nanostructured Materials» (Ukraine, Uzhgorod, 22–26 October 2018),

● International Conference for Professionals and Young Scientists «Low Temperature Physics 2019» (Ukraine, Kharkiv, 3–7 June 2019).

Зв'язок праці з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі радіофізики твердого тіла Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України. Вона є складовою частиною наступних проектів:

● науково-дослідна робота Відділення фізики та астрономії НАН України "Дослідження лінійних і нелінійних властивостей твердотільних структур із застосуванням електромагнітних хвиль НВЧ діапазону і заряджених частинок" (номер державної реєстрації 0106U011978, термін виконання 2007 – 2011 рр., виконавець);

● науково-дослідна робота Відділення фізики та астрономії НАН України ”Вивчення взаємодії електромагнітних та звукових хвиль, а також заряджених часток з твердотільними структурами” (номер державної реєстрації 0112U000211, термін виконання 2012 – 2016 рр., виконавець);

- цільова програма НАН України ”Теоретичні та експериментальні дослідження властивостей періодичних і стохастичних модульованих наноструктур в оптичному, інфрачервоному та надвисокочастотному діапазонах спектру” (номер державної реєстрації 0110U005642, термін виконання 2010 – 2014 рр., виконавець);
- проект Державного фонду фундаментальних досліджень України ”Квантові явища в системах на основі джозефсонівських контактів” (номер державної реєстрації 0113U006217, термін виконання – 2013 р., виконавець);
- науково-дослідна робота Відділення фізики та астрономії НАН України ”Дослідження взаємодії електромагнітних та звукових хвиль, а також заряджених частинок з наноструктурами та метаматеріалами” (номер державної реєстрації 0117U004038, термін виконання 2017 – 2021 рр., виконавець).

Публікації. Результати дисертації опубліковані у 28 наукових працях: у 14 статтях у фахових вітчизняних і міжнародних періодичних виданнях індексуються науковометричними базами Scopus і Web of Science та у 14 тезах доповідей на вітчизняних і міжнародних наукових конференціях.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, шости розділів основного тексту з 75 рисунками у тексті, висновків, списку використаних джерел із 355 найменувань. Обсяг загального тексту дисертації складає 359 сторінок, з них список використаних джерел займає 36 сторінок, додаток займає 4 сторінки, обсяг основної частини складає 295 сторінок.

Розділ 1

ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ МОДИ У КВАНТОВИХ СИСТЕМАХ (ОГЛЯД)

Концепція класичних коливальних мод є загальновизнаною і широко використовуваною в різних областях фізики. В теорії твердого тіла ця концепція дозволила аналізувати спектри колективних збуджень у кристалах [1,2]; в акустиці вона дала можливість точних розрахунків звуку, що генерується або резонує в системі [38]; в оптиці і у радіофізиці за допомогою представлення полів у вигляді суперпозиції гармонічних функцій вдалось не тільки формально отримати розв'язок, але і точніше проаналізувати його [39]; у теорії гравітації пошук гравітаційних хвиль став важливою задачею XX століття [4]. Ідея переходу до аналізу мод тісно пов'язана зі спектральним представленням часових залежностей, і у математичній фізиці метод Фур'є-перетворень, що фактично означає розкладання за модами, грає важливу роль при розв'язуванні різноманітних диференціальних рівнянь у частинних похідних [40].

Погляд на збудження у механічних, акустичних, гравітаційних, електромагнітних системах як на сукупність мод дозволяє значно спростити з математичної точки зору розв'язок задач, а також надає йому глибокий фізичний зміст. Окрім мод, що є колективним рухом усіх частинок кристалу, виділяють важливий клас локалізованих мод, для яких збудження частинок ефективно зникають на деякій відстані від осередку коливань, при цьому ця локалізація можлива як поблизу деякої точки, рухомої або ні, так і навколо деякої лінії або поверхні [41].

Формально метод розкладання на моди можливий лише для лінійних систем. Однак бурхливе зростання інтересу до нелінійних задач у другій половині XX століття призвело до розширення методу розкладання за модами на випадки слабкої нелінійності [41], що, зокрема, дозволило описувати взаємодію мод —

явище, відсутнє у лінійному випадку. Перехід від дисипативних сил, що діють на реальні частинки, до дисипації мод також став важливим кроком до збільшення реалістичності розв'язків різноманітних задач і наближення ними поведінки реальних систем [1].

У квантовій механіці траєкторія частинок втрачає зміст, і погляд на механічні коливання суттєво змінюється. Однак концепція мод набула не меншого розвитку у квантовій фізиці [39, 42]. Розгляд стаціонарних розв'язків рівняння Шредингера дозволив безпосередньо аналізувати спектри систем, розширюючи класичний підхід. Квантова оптика дала нове коло явищ, важливих з практичної точки зору і невідомих для механічних систем [43], зокрема спостереження так званих стиснених станів і станів Ейнштейна-Подольського-Розена для лише однієї або декількох мод електромагнітного поля. Подальший розвиток квантової оптики призвів до можливості збудження і подальшого керування великою кількістю оптичних мод різного ступеня локалізації і різної поляризації [44]. Важливою особливістю методів квантової оптики є можливість керування квантовою заплутаністю отриманих мод, що відкриває можливості реалізації квантових комп'ютерів великої розрахункової потужності.

Носіями квантових мод можуть бути системи з невеликою кількістю ступенів вільності. Такі системи представляють інтерес як з фундаментальної точки зору, бо для них вдається проаналізувати складні явища, такі як вплив шумів різної природи, декогеренція, так і з практичної, бо вони, наприклад, є базою створення квантових комп'ютерів. Моди у низьковимірних системах, з одного боку, можуть проявляти властивості, не притаманні тривимірним системам, а з іншого, мають окремий практичний інтерес, наприклад, для дослідження фотонних кристалів [45], вігнерівських кристалів [46], листів графена [47] тощо. Нарешті, особливим класом матеріалів, в яких поширення мод отримує нові властивості, не притаманні просторовооднорідним матеріалам, є шаруваті матеріали. Наприклад, високотемпературні шаруваті надпровідники є перспективним матеріалом з високим ступенем анізотропії [5, 48].

Далі у цьому розділі наводяться основні результати, отримані для представників цих класів квантових систем, наноосциляторів, низькорозмірних систем, а також шаруватих надпровідникових систем.

1.1. Квантові наносистеми за наявності контакту із зовнішнім середовищем

1.1.1. Декогеренція та затухання механічних мод

За останні роки було досягнуто значного прогресу у розробці мікро- та наномеханічних систем, що допускають повільно затухаючі осциляції. Для різних типів таких систем відношення власної частоти коливань до швидкості затухання, тобто значення коефіцієнту добротності Q, досягло $\gtrsim 10^5$ [49–51]. Це дозволило вивчати нові явища, включаючи квантові [52, 53], і відкрило шлях для численних застосувань, таких як високочутливе зондування маси [54–56] і, потенційно, високоточні наномеханічні годинники [50]. Для контролю та вимірювання стану кубітів на основі джозефсонівського переходу використовуються контакти із надпровідними порожнинами високої добротності [57].

Затухання і втрата когерентності коливань надзвичайно важливі для резонаторів [58], від джозефсонівських [59, 60] до нано- та оптомеханічних систем [61–64]. Важливою проблемою при вивченні наномеханічних коливань та мод надпровідних порожнин є розуміння механізмів їх затухання та втрати когерентності. Часто складно розділити хаотичні флуктуації амплітуди та фази коливань. Флуктуації фази не тільки цікаві самі по собі, але особливо важливі для застосувань, оскільки вони можуть накласти обмеження на чутливість пристроїв, наприклад резонансних детекторів [65] або стабільність точних атомних годинників [66]. Вони можуть походити від теплового шуму, який супроводжує затухання коливань і є наслідком контакту з тепловим резервуаром. Окрім термічного походження, шуми фази також можуть виникати через флуктуації власної частоти резонатора [67], що є більш складним для аналізу. Вони можуть мати різне походження [68], зокрема випадкову адсорбцію та десорбцію молекул на поверхні резонатора, що змінює свою масу [55, 56, 69–71], дифузію молекули вздовж резонатора [72, 73], зв'язок коливальної моди з двофазними флуктуаторами [74], а для нелінійних мод – частотну модуляцію шумами амплітуди [75]. Знання статистичних характеристик частотних шумів, неминуче присутніх в пристроях зчитування інформації у квантових комп'ютерах, дозволить коректно обробляти одержувану в них інформацію.

Існує великий інтерес до ідентифікації частотних шумів, оскільки вивчення їх статистики дозволяє дослідити різні фізичні процеси в мезоскопічних системах [76–78]. Частотний шум можна безпосередньо виміряти, якщо власна частота повільно змінюється з часом, і, отже, може бути точно виміряна, наприклад, підстройкою до резонансного піку. Швидкі зміни власної частоти (швидші, ніж обернена константа затухання) можуть бути виявлені шляхом спостереження автоколивань резонатора. Однак через наявність шуму детектора та / або теплового шуму на практиці не просто виділити частотні шуми від інших джерел фазового шуму.

Для характеристики фазового шуму загальноприйнятим методом є аналіз відгуку резонатора з синусоїдальним збудженням на частоті, близькій до власної частоти, та вимірювання двох квадратур коливань X та Y, які знаходяться у фазі та протифазі з змушуючою силою [66, 79, 80]. При достатньо великих амплітудах коливань ефект анізотропії розподілу в фазовому просторі $X - Y$ через частотний шум може перевищувати ефект розмиття за рахунок теплових шумів та шумів детектора. За допомогою цього методу нещодавно було виміряно коливання власної частоти резонатора з нітриду кремнію [80]. Результативність цього підходу залежить від того, чи резонатор залишається в лінійному режимі навіть за наявності сильного періодичного збудження. Для резонаторів з низьким порогом настання нелінійності, включаючи графен та механічні резонатори з вуглецевих нанотрубок [54, 81–83], така схема може виявитися незастосовною.

Роль фазових шумів особливо велика, оскільки чутливість до них безпосередньо визначає ефективність осцилятора в якості чутливого пристрою зчитування інформації в вихідному реєстрі квантового комп'ютера [65]. Іншим прикладом системи, де роль частотних шумів є визначальною, служить атомний годинник [84], для якого точність роботи безпосередньо залежить саме від того, як точно вдалося усунути або компенсувати фазові шуми. Частотні шуми можуть бути і корисним ефектом. Досліджуючи статистичні характеристики осцилятора, що знаходиться під впливом шумів, можна вимірювати параметри шуму і таким чином вивчати різні процеси в мезоскопічних системах [78]. На цьому принципі грунтується не тільки зчитування інформації у квантових комп'ютерах, а й, наприклад, вимір мас налітаючих макромолекул [54, 72, 73]. Цей метод заснований на тому, що в результаті їх адсорбції, десорбції, а також дифузії вздовж поверхні осцилятора, його власна частота змінюється.

Квантовий стан системи при наявності контакта з термостатом неминуче стає змішаним, навіть якщо система у початковий момент знаходиться у чистому стані. Опис такої негамільтонової еволюції стану можливий лише за допомогою квантового кінетичного рівняння (ККР) для матриці густини станів. Тому нижче розглядається це рівняння у тому випадку, коли взаємодія нелінійного осцилятора з середовищем досить слабка [75]. Розглянемо загальний випадок: введемо два довільні оператори $\hat{L}$ і $\hat{M}$, що залежать лише від координати моди. Тоді кореляційна функція цих двох операторів і допоміжний оператор $F_M(t)$ (який є частковим слідом за координатами середовища) визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}(t)\hat{M}(0)\rangle &= \mathrm{Tr}_0\left[e^{iH_0 t}\hat{L}e^{-iH_0 t}F_M(t)\right], \\ F_M(t) &= Z^{-1}\mathrm{Tr}_m\left[\hat{U}(t)\hat{M}\exp(-H/T)\hat{U}^t(t)\right], \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $\hat{U}$ — оператор еволюції, а Z — статистична сума, H і H_0 — повний гамільтоніан системи і гамільтоніан моди без врахування взаємодії з термостатом, відповідно. Зауважимо, що в першому виразі усереднення ведеться за ступенем вільності моди, а у другому — за ступенями вільності середовища. Тоді квантово-кінетичне рівняння для оператора $F_M(t)$ може бути отримано при досить загальному вигляді гамільтоніана взаємодії H_i. Якщо характерні параметри релаксації Γ і P, для яких далі буде отримано явні вирази (1.19), малі порівняно з температурою T, ми можемо замінити $\exp(-H/T)$ на $\exp(-\mathcal{H}_0/T)$ у виразі (1.1) для $F_M(t)$. Тут $\mathcal{H}_0 = H_0 + H_m$ — повний гамільтоніан моди і оточуючого середовища. Тоді $F_M(t)$ приймає вигляд

$$F_M(t) = \mathrm{Tr}_m \mathcal{F}_M(t), \qquad \mathcal{F}_M(t) = Z^{-1}\hat{U}(t)\hat{M}\exp(-\mathcal{H}_0/T)\hat{U}^+(t). \tag{1.2}$$

У цьому виразі оператор $\hat{U}(t)$ визначається зі співвідношення

$$\begin{aligned} &\hat{U}(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t}e^{-iHt} = T_{t_1}\exp\big[-i\int_0^t dt_1 \hat{H}_i(t_1)\big], \\ &\hat{H}_i(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t}H_i e^{-i\mathcal{H}_0 t}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Тоді, з точністю до першого порядку за слабкою взаємодією, маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_M(t) = \mathcal{F}_M(0) - i\int_0^t dt_1 \left[\hat{H}_i t_1, \mathcal{F}_M(t_1)\right] = \\ = \mathcal{F}_M(0) - i\int_0^t dt_1 \left[\hat{H}_i t_1, \mathcal{F}_M(0)\right] - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[\hat{H}_i t_1 \left[\hat{H}_i(t_2)\mathcal{F}_M(t_2)\right]\right]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Оскільки оператори $\hat{M}$ і H_0 не залежать від динамічних змінних середовища, з рівнянь (1.2) та (1.4) видно, що усереднення за цими змінними зводиться до обчислення середніх значень типу

$$\int dt_1 \ldots dt_n \langle \hat{H}_i(t_1)\ldots\hat{H}_i(t_n)\rangle_m, \tag{1.5}$$

де

$$\langle\hat{O}\rangle_m \equiv Z_m^{-1}\mathrm{Tr}_m \hat{O}\exp(-H_m/T), \qquad Z_m = \mathrm{Tr}_m\exp(-H_m/T). \tag{1.6}$$

Без обмеження загальності можна припустити, що

$$\langle H_i \rangle_m = 0. \tag{1.7}$$

Оскільки недіагональні матричні елементи оператора $\hat{H}_i(t)$ осцилюють швидко з характерним часом порядку t_c, де $t_c = \max(\omega_0^{-1}, \omega_e^{-1})$, то парні корелятори $\langle \hat{H}_i(t_1)\hat{H}_i(t_2)\rangle_m$ також швидко осцилюють як функції $(t_1 - t_2)$, а основний вклад в інтеграл

$$\int\int dt_1 dt_2 \langle \hat{H}_i(t_1)\hat{H}_i(t_2)\rangle_m \tag{1.8}$$

вносить область $|t_1 - t_2| \lesssim t_c$ (область інтегрування по кожному з аргументів t_1 і t_2 є значно більшою за t_c). Аналогічно, основний внесок у інтеграли (1.5) вносять області інтегрування, в яких моменти часу t_i розпадаються на пари з достатньо близькими значеннями часу. Для кожної пари різниця двох часів є величиною порядка t_c, тоді як інтервали між різними парами порядка t. Оскільки кореляція зникає через час порядка t_c, у цьому випадку можна замінити середнє значення добутку n операторів у (1.5) на добуток $n/2$ середніх значень окремих пар.

Це наближення, яке є асимптотично справедливим при

$$t \gg t_c, \qquad \Gamma t_c \ll 1, \tag{1.9}$$

робить можливим розділити процедуру усереднення таким чином:

$$\mathrm{Tr}_m \int_0^t dt_1 \hat{H}_i(t)\hat{H}_i(t_1)\mathcal{F}_M(t_1) = \int_0^t dt_1 \langle \hat{H}_i(t)\hat{H}_i(t_1)\rangle_m \mathrm{Tr}_m \mathcal{F}_M(t_1). \tag{1.10}$$

Мовою діаграмної техніки це наближення відповідає припущенню для діаграм з лініями, які не перетинаються і не вкладаються одна в одну [85, 86].

Основний внесок в інтеграл у правій частині рівняння (1.10) робиться областю $|t - t_1| \sim t_c$, в якій оператор $\mathrm{Tr}_m \mathcal{F}_M(t_1) = F_M(t_1)$ залишається практично незмінним, і, отже, може бути замінений на $F_M(t)$. Отже, застосовуючи операцію Tr_m до рівняння (1.4) та беручи до уваги умову (1.7), отримуємо інтегральне рівняння

$$F_M(t) = F_M(0) - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \times \\ \times \mathrm{Tr}_m \left\{ \left[\hat{H}_i(t_1), \left[\hat{H}_i(t_2), Z_m^{-1} \exp(-\frac{H_m}{T}) F_M(t_1) \right] \right] \right\}. \tag{1.11}$$

Йому відповідає диференціальне рівняння

$$\frac{\partial F_M}{\partial t} = -\int_0^t dt_1 \mathrm{Tr}_m \left\{ \left[\hat{H}_i(t), \left[\hat{H}_i(t_1), Z_m^{-1} \exp(-\frac{H_m}{T}) F_M(t) \right] \right] \right\}, \tag{1.12}$$

яке є аналогом квантово-кінетичного рівняння. Це рівняння належить до класу марківських рівнянь.

Нехтуючи поправками порядку $|P|T^{-1}$, початкова умова для рівняння (1.12) відповідає рівнянню (1.2)

$$F_M(0) = Z_0^{-1} \hat{M} \exp\Big(-\frac{H_0}{T} \Big), \qquad Z_0 = \mathrm{Tr}_0 \exp\Big(-\frac{H_0}{T} \Big). \tag{1.13}$$

У розглянутій області (1.9) інтегрування за t_1 та усереднення за змінними середовища в рівнянні (1.12) може бути проведено явно для різних конкретних форм гамільтоніана взаємодії. Зробимо це для випадку, коли взаємодія є лінійною по координаті виділеного осцилятора і має довільну залежність від динамічних змінних середовища:

$$H_i = (\hat{a} + \hat{a}^+) \hat{h}_i. \tag{1.14}$$

Тут $\hat{h}_i$ є довільною функцією операторів $\hat{a}_k^+$ і $\hat{a}_k$ (операторів народження та анігіляції інших квазічастинок середовища) і не залежить від $\hat{a}^+$ або $\hat{a}$.

Для інтегрування за часом в рівнянні (1.12), використовується явний вираз для еволюції оператора $\hat{a}(t)$ у представленні взаємодії,

$$\hat{a}(t_1) = \hat{a}(t)\exp\left\{i\left[\omega_0 + (\hat{n} - \frac{1}{2})V\right](t - t_1)\right\},$$
$$\hat{a}(t) \equiv \exp(iH_0 t)\hat{a}\exp(-iH_0 t), \hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}, \qquad (1.15)$$

а явний вигляд гамільтоніана виберається таким чином:

$$H = \mathcal{H}_0 + H_i, \quad \mathcal{H}_0 = H_0 + H_m, \quad H_0 = \omega_0\hat{n} + \frac{1}{2}V\hat{n}^2, \quad \hat{n} = \hat{a}^+\hat{a},$$
$$H_m = \sum^k \omega_k \hat{a}_k^+\hat{a}_k, \quad H_i = \sum^k \epsilon_k(4\omega_0\omega_k)^{-1/2}(\hat{a} + \hat{a}^+)(\hat{a}_k + \hat{a}_k^+), \quad \hbar = 1. \qquad (1.16)$$

У цих виразах V – параметр нелінійності осцилятора. Якщо фактичні числа заповненості осцилятора та параметр його нелінійності не надто великі, тобто $t_c|V| \ll 1$, ми можемо нехтувати в області $|t - t_1| \sim t_c$ членами, пропорційними V у аргументі експоненти в рівнянні (1.15). Інтеграли за часом в рівнянні (1.12) (з гамільтоніаном H_i, взятим у формі (1.14)) тоді спрощуються. Наприклад,

$$\int_0^t dt_1 \langle \hat{a}^+(t)\hat{h}_i(t)\hat{a}(t_1)\hat{h}_i(t_1)\rangle_m = \hat{a}^+(t)\hat{a}(t)\int_0^t dt_1 e^{i\omega_0(t-t_1)}\langle \hat{h}_i(t)\hat{h}_i(t_1)\rangle_m =$$
$$= \hat{a}^+(t)\hat{a}(t)\int_0^t dt_1 e^{i\omega_0 t_1)}\langle \hat{h}_i(t_1)\hat{h}_i(0)\rangle_m,$$
$$\hat{h}_i(t) \equiv \exp(iH_m t)\hat{h}_i\exp(-iH_m t). \qquad (1.17)$$

Оскільки інтеграл в рівнянні (1.17) обертається в нуль протягом часу порядку t_c, верхня межа інтегрування в останньому виразі у (1.17) може прямувати до нескінченності.

При врахуванні співвідношень (1.17), кінетичне рівняння (1.12) перетворюється у

$$\frac{\partial F_M}{\partial t} = -[(\bar{n} + 1)(\hat{a}^+\hat{a}F_M - 2\hat{a}F_M\hat{a}^+ + F_M\hat{a}^+\hat{a} +$$
$$+\bar{n}(\hat{a}\hat{a}^+F_M - 2\hat{a}^+F_M\hat{a} + F_M\hat{a}\hat{a}^+)]\Gamma - i[\hat{a}^+\hat{a}, F_M]P. \qquad (1.18)$$

Всі оператори відносяться тут до моменту часу t, а параметри Γ і P задані рівняннями

$$\Gamma = \mathrm{Re} \int_0^\infty dt e^{i\omega_0 t - \epsilon t} \langle \big[\hat{h}_i(t), \hat{h}_i(0) \big] \rangle_m,$$
$$P = \mathrm{Im} \int \int_0^\infty dt e^{i\omega_0 t - \epsilon t} \langle \big[\hat{h}_i(t), \hat{h}_i(0) \big] \rangle_m, \qquad \epsilon \to +0. \tag{1.19}$$

Вирази (1.19) збігаються з отриманими в [87] для параметра затухання та зсуву частоти, тоді як саме рівняння (1.18) (без члена зсуву $\propto P$) для матриці густини гармонічного осцилятора було розглянуто феноменологічно в [88, 89].

У окремому випадку білінійної взаємодії, заданої гамільтоніаном (1.16) ($\hat{h}_i$ лінійно залежать від $\hat{a}_k + \hat{a}_k^+$), рівняння (1.19) переходять до формул класичної теорії. Узагальнене кінетичне рівняння для цього випадку отримано іншим чином у роботі [90]. Також відзначимо, що зручний метод (заснований на використанні теорії супероператорів) отримання квантово-кінетичного рівняння для нелінійного осцилятора та аналізу кореляційних функцій розроблений в статті [91].

1.1.2. Дисперсійний зв'язок та аргументальні моди

Частотні шуми, про які йшлося в попередньому пункті, можуть виникати внаслідок контакту із квантовою системою. Наприклад, телеграфний шум може бути викликаний контактом із квантовою дворівневою системою. Однак, якщо розглядати одночасно динаміку моди і зв'язану з нею дворівневу систему, можна отримати більш складний результат. Важливим типом зв'язку між модою і системою є так званий дисперсійний зв'язок, для якого гамільтоніан взаємодії комутує з гамільтоніанами ізольованих моди і системи. Дисперсійний зв'язок квантової системи з механічною або електромагнітною модою порожнинного резонатора останнім часом привертає велику увагу. Це пов'язано з тим, що така взаємодія використовується для зчитування інформації з реєстра квантового комп'ютера, зв'язок забезпечує засіб для квантового вимірювання числа заповненості енергетичних рівнів системи [57, 92–98]. Основним механізмом зчитування інформації про стан квантової системи або моди є зсув частоти моди або частоти переходу квантової системи, що взаємодіє з модою, в залежності від станів системи і моди. У дисперсійному режимі вимірювання стирає інформацію про квантову фазу, але може викликати переходи між рівнями енергії. Такі переходи, як вже відмічалося, можуть відбуватися внаслідок зв'яку з термостатом, а також якщо мода та/або квантова система знаходиться під впливом зовнішніх полів. Зрозуміло, що через дисперсійний зв'яок теплові міжрівневі переходи викликають декогеренцію [57, 99, 100]. Значно менше відомо про наслідки взаємодії моди і квантової системи для функції відгуку моди та дефазування внаслідок зв'язку з термостатом. Отже, представляє інтерес розглянути вплив дисперсійного зв'язку саме на вимушені коливання осцилятора і квантової наносистеми.

При наявності дисперсійного зв'язку між класичним осцилятором і квантовою наносистемою квантованість станів коливань осцилятора є наслідком цього зв'язку. Але цікаво, що досягти квантованості станів вимушених коливань можна і у класичній сильнонелінійній системі, адже нелінійність у різних системах не тільки призводить до поправок до лінійного наближення, але дозволяє отримати якісно нові фізичні ефекти. Одним з них є амплітудне квантування в класичних нелінійних коливальних системах [101]. Такі вимушені коливання утворюють новий клас вібраційних процесів, так звані *аргументальні коливання*, які мають велику кількість технічних застосувань. Технології, засновані на цих процесах, включають випаровування рідин за допомогою «резонансної кавітації» і на її основі виробництво дешевої питної води, технології промислового холодильного обладнання, високоефективні рішення для виробництва емульсій тощо [102]. Оскільки аргументальні коливання змінюють частоту сигналу на два або більше порядків, вони можуть використовуватися для передачі та перетворення потужності, радіочастотних та мікрохвильових технологій [102].

Механізм амплітудного квантування добре відомий для різних систем [102, 103]. Одним з найпростіших прикладів систем з аргументальними модами є маятник Дубошинського [101–108, 108]. Він представляє собою математичний маятник з магнітом на кінці, що коливається у магнітному швидко осцилюючому полі, локалізованому поблизу положення його рівноваги. Величина поля повинна належати до певного діапазону: занадто слабке поле не здатне врівноважити втрати на дисипацію, занадто сильне поле вносить хаос, тоді амплітуда може хаотично переходити між стабільними значеннями. Незважаючи на жвавий інтерес до цієї системи у літературі (див. [104] і посилання всередині), більшість досліджень зосереджені на спектрі коливань. В той же час, для розуміння процесу стабілізації амплітуди необхідно виявити, яка саме амплітуда з цього набору встановиться в кожному випадку в залежності від початкових умов. Окрім того, оскільки початкова фаза струму індукційної котушки є на практиці непередбачуваною величиною, важливим є аналіз функції розподілу амплітуди коливань, що встановилися, за значеннями дискретного спектру.

1.1.3. Взаємодія наносистеми із масивним тілом і квантові моди вакуума

В якості середовища, що оточує наносистему, яку ми розглядали у попередніх пунктах, і контакт з яким впливає на неї, може виступати навіть вакуум, точніше моди нульових коливань вакуума. Цей вплив проявляється тоді, коли поблизу системи є інші тіла. Саме це і називається ефектом Казимира, що є одним з найбільш цікавих макроскопічних проявів квантових нульових коливань електромагнітного поля в вакуумі. Цей ефект полягає у виникненні сили тяжіння між двома незарядженими тілами внаслідок відмінності між структурою нульових коливань вакуума в присутності і відсутності тіл. Цей один з небагатьох проявів складної структури фізичного вакууму протягом більш 70 років привертає до себе інтерес багатьох дослідницьких груп, що працюють в галузі квантової теорії поля і областях, суміжних з нею. З моменту відкриття [109] вивченню ефекту Казимира було присвячено безліч теоретичних і експериментальних робіт (найбільш повну бібліографію можна знайти в [110–114]). Ефект Казимира виявлений і активно досліджується в різних областях фізики, таких, як квантова теорія поля, атомна фізика, фізика твердого тіла, гравітація і космологія [114–118]. Особливе місце в цьому ряду займає фізика конденсованих середовищ і, зокрема, фізика металевих плівок.

Вивчення макроскопічної взаємодії незаряджених конденсованих середовищ, розпочате в 1948 р. Казимиром і продовжене згодом Є. М. Ліфшицем [119], головним чином було обмежено розглядом тільки напівнескінченних плоскопаралельних пластин. В той же час представляє особливий інтерес дослідження взаємодії Казимира між наносистемами. Можна сказати, що виняткове місце в цьому класі систем займають тонкі металеві та напівметалеві employ наноплівки [120–124]. На відміну від масивних металів, відбивна здатність тонких металевих плівок може бути незначною. Відповідно до цього для взаємодії металевих плівок можна реалізувати умови, при виконанні яких сила Казимира стає чутливою до параметрів матеріалу, які визначають прозорість плівки для електромагнітного поля. Помітний прогрес у вимірюванні сили Казимира [125–129] відкриває можливості для створення нанопристроїв, заснованих на ефекті Казимира, зокрема, в розробці наномеханічних систем [52, 115, 117, 130].

Сучасні технології дозволяють виготовляти металеві плівки практично довільної товщини, використовуючи різні методи, наприклад, вакуумне напилення. Якщо товщина плівки стає порівняної або меншою за глибину проникнення електромагнітного поля в метал, то такі плівки стають прозорими для електромагнітного випромінення і починають проявляти не притаманні масивним металам електродинамічні властивості [116]. Надтонкі металеві плівки, товщиною порядка і менше 0,01 мкм, застосовуються для отримання оптично прозорих контактів, наприклад, для фотодіодів з поверхневим бар’єром, для створення металевої бази в транзисторах на гарячих електронах, в приладах і виробах наноелектроніки [115]. У системах, які включають в себе такі наноплівки, слід очікувати незвичайних електродинамічних явищ. Прозорість металевих наноплівок виступає на перший план в ефекті Казимира.

Теоретичне дослідження ефекту Казимира почалося з роботи «Про притяжіння між двома ідеально провідними пластинами» [109], в якій Казимир отримав для площині, розташованої на відстані a від стінки порожнини, результат:

$$f_0 = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4}. \tag{1.20}$$

Тут f_0 являє собою некласичну силу електромагнітного тяжіння між пластинами на одиницю площі, c — швидкість світла у вакуумі, $\hbar$ — постійна Планка. Після появи роботи [109], першим значним досягненням теорії сили Казимира стало узагальнення формули (1.20) на випадок взаємодії плоскопараллельних конденсованих середовищ, що мають довільні значення діелектричної проникності. В роботі [119] Є. М. Ліфшиц за допомогою флуктуаційно-дисипаційної теореми для електромагнітного поля вирішив задачу про Казимирівську взаємодію товстих діелектричних пластин з діелектричними проникностями ε_1 і ε_2, розділених вакуумної щілиною ширини l. В цьому випадку сила Казимира на одиницю площі представляється у вигляді

$$\begin{gathered} f = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3}\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}p\, p^2\omega^3 \,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2kT}\times \\ \times\left\{ \left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\exp(-2ip\omega l/c)-1\right]^{-1}+\right. \\ \left.+\left[\frac{(s_1+\varepsilon_1 p)(s_2+\varepsilon_2 p)}{(s_1-\varepsilon_1 p)(s_2-\varepsilon_2 p)}\exp(-2ip\omega l/c)-1\right]^{-1}\right\}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Тут символ Re позначає дійсну частину комплексного числа;

$$s_j = \sqrt{\varepsilon_j - 1 + p^2}, \quad j = 1, 2. \tag{1.22}$$

Інтегрування по p ведеться уздовж траєкторії, що складається з двох ділянок: (а) від 1 до 0 вздовж дійсної осі; (б) від $0i$ до ∞i вздовж уявної осі. Трохи пізніше формула для сили Казимира між діелектриками, розділеними рідким прошарком з діелектричною проникністю ε_3, була отримана в [125], за допомогою квантово-польових методів теорії багаточастинкових систем.

З формули (1.21) стає ясно, що якщо електростатична і гравітаційна взаємодії між тілами чутливі до розподілів заряду і маси, то взаємодія Казимира визначається тільки діелектричними властивостями тіл. Як відомо, тензор діелектричної проникності електронейтрального середовища обумовлений динамічною поведінкою підсистем заряджених частинок (колективними поляризаційними властивостями середовища в даному термодинамічному стані). Тому сила Казимира є, по суті, реальним проявом потенціальних можливостей в поведінці динамічної системи в зовнішньому електромагнітному полі.

Незважаючи на інтенсивне вивчення ефекту Казимира, така важлива проблема, як температурна залежність цього ефекту, залишається предметом активних дискусій (див., наприклад, роботи [131,131–136]). У центрі обговорень знаходиться застосовність формули Ліфшиця (1.21) *до середовищ з загасанням*. Для реальних провідників діелектрична проникність ε є комплексною величиною і пов'язана з провідністю середовища $\sigma(\omega)$. У моделі Друде, в якій система електронів релаксує до стану рівноваги за експоненціальним законом, ε приймає наступний вигляд:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \tag{1.23}$$

Тут ω_p — плазмова частота металу, ν — частота зіткнень електронів з об'ємними розсіювачами. Використання цієї моделі у формулі Ліфшиця призводить до деяких фізичних протиріч.

По-перше, в рамках теорії Ліфшиця [119] немає неперервного переходу для сили між ідеальними і реальними металами [131, 134]. Теорія Ліфшиця прогнозує *зростання* вкладу $F_{\mathrm{rad}}(T)$ теплових флуктуацій в силу Казимира при зростанні T тільки для *ідеальних* металів без загасання. У той же час для середовищ з навіть *нескінченно малим загасанням* з частотою релаксації $\nu \neq 0$ ця формула дає *спадання* $F_{\text{rad}}(T)$ в широкому діапазоні температур. Цей спадаючий доданок пов'язаний з прозорістю реальних металів для низькочастотних полів з поперечною електричною поляризацією. Іншими словами, поведінка $F_{\text{rad}}(T)$ змінюється стрибкоподібно для *нескінченно малих* ν в порівнянні з випадком $\nu = 0$. Такий стрибок не є фізичним.

По-друге, при $T \to 0$ ентропія Казимира-Ліфшиця не прямує до нуля. Подібна нефізічність порушує теорему Нернста (див., наприклад, [135]). Ці очевидні протиріччя показують, що в теорії не враховані якісь важливі фізичні деталі. Для усунення цих протиріч (див., наприклад, роботу [132]) запропоновано вважати $\nu = 0$ у формулі Друде при її використанні в обчисленнях сили Казимира. Однак таке нехтування величиною ν ніким не було обґрунтовано. Тому проблема застосовності моделі для опису сили Казимира є важливою проблемою.

З усього вищесказаного можна зробити висновок, що дуже важливо запропонувати такий експеримент, який дозволив би перевірити придатність моделі Друде. При вирішенні такого завдання можуть виявитися дуже корисними *металеві наноплівки*, з огляду на їх прозорість. В умовах, коли плівка досить тонка, сила Казимира стає чутливою до параметрів матеріалу і, зокрема, до релаксаційної частоти електронів в металі і до її залежності від температури.

Сила Казимира не лише є макроскопічним проявом модуляції мод вакуума, викликаної тілами. Якщо в якості одного з тіл розглядається укремлений атом, що захоплений у магнітній пастці, а в якості другого — тіла, що його оточують, то казимирівська енергія спричинює зміну частот переходів атому, оскільки дипольний момент атому внаслідок переходу змінюється, а казимирівська енергія залежить від його значення. Це є важливою проблемою сучасної спектроскопії.

Однією з найважливіших у спектроскопії конфігурацій є випадок, коли всередині порожнистого волокна, зокрема так званого кагомного волокна, реалізується фотонний кристал, у вузлах якого захоплюються і охолоджуються до наднизьких температур атоми [137, 138]. Таким чином вдається позбавитися багатьох впливів на ширину спектральних ліній, включаючи доплерівський зсув за рахунок теплового руху атомів, зсув за рахунок зіткнень з іншими атомами, а також з зовнішнім випроміненням [139].

У всіх відомих конфігураціях найтонші спектроскопічні виміри на основі волокон, які до цього часу були досягнуті, дозволяють отримати спектральну лінію шириною в кілька МГц. Ця ширина лінії виявляється наслідком зіткнень захоплених теплових молекул або атомів [140, 141] із внутрішньою стінкою волокна або природною шириною лінії атомів [141,142]. Таким чином, час когерентності атомів або молекул, довший десятків наносекунд, у волокнах залишається проблемою. Орієнтуючись на надточну лазерну спектроскопію атомів при відносній похибці 10^{-17} і менше, що розглядається як цільова точність для атомних годинників наступного покоління [143, 144], перспективними є конфігурації на основі саме волокон.

Залежно від відстані між атомами і стінкою, від десятків нм до десятків мкм, взаємодія атома і стінки волокна змінюється від Ван-дер-Ваальсівської до казимирівської і, нарешті, до режиму термостату [145]. Взаємодія Ван-дер-Ваальса зміщує атомні лінії на 10^{-10} від повного зсуву частоти для атомів, що захоплені в полі [137, 142, 146] на відстані порядка десятка нанометрів від нановолокон. Тому актуальним є знайти відстані, для яких зсув частоти, спричинений взаємодією між атомами і стінками, буде меншим за 10^{-17}.

Особливий інтерес представляє дослідження переходу $^1S_0$ — $^3P_1$ атомів ^{88}Sr в одновимірній оптичній гратці, налаштованій на так званий магічний стан, який обмежує атоми поблизу центру волокна та в режимі Лемба-Діка (тобто нехтовно малого впливу повздовжнього руху на ширину ліній) за відсутності світлового зсуву (тобто впливу енергії атома у оптичному потенціалі ловушки на ширину ліній) [142, 143, 147]. Достатньо вузька ширина лінії переходу $\gamma_p = 7{,}5$ кГц [148] дозволяє використовувати її як ефективний зонд для вимірювання взаємодій атом-атом і атом-волокно шляхом аналізу уширення та зсуву спектральних ліній. Добре досліджені зіткнення [149] в цьому випадку дозволяють знаходити зайнятість атомами вузлів гратки через вимірювання зсуву за рахунок зіткнень за допомогою резонансної диполь-дипольної взаємодії. В той же час загальний кутовий момент $J = 1$ верхнього стану дозволяє досліджувати ефекти подвійного променезаломлення волокна шляхом вимірювання тензорного зсуву світла [147].

Ретельно усуваючи зсув за рахунок зіткнень та зсув світла, спричинені подвійним заломленням, можна показати, що на частоту атомного резонансу волокно може не впливати в межах невизначеності $0{,}11$ кГц, що складає $\approx 3 \times 10^{-13}$. Це дозволить проектувати оптичні годинники на основі волокон на переходах $^1S_0$ — $^3P_0$ з шириною декілька мГц [150], де, як очікується, зіткнення і залежність від зсуву світла будуть зменшені більш ніж на 3–7 порядків, залежно від ізотопів, які використовують [151].

Таким чином, вивчення впливу мод вакуума на стан атому за рахунок ефекту Казимира дозволить виявити обмеження на роботу нанопристроїв, зокрема, на точність оптичного атомного годинника.

1.2. Моди у низькорозмірних квантових системах

Перейдемо тепер до аналізу низькорозмірних систем і мод у них. Структура системи мод вакуума, які визначають силу Казимира, розглянуту у попередньому підрозділі, є універсальною, спектр мод є неперервним, і моди не взаємодіють одна з одною. Однак моди у речовині вже не мають цих властивостей, і вже у низькорозмірних квантових системах проявляються ефекти, пов'язані з нелінійністю і дискретністю спектра, а також із взаємодією мод. Одновимірні (1D) системи є особливими з точки зору дослідження кінетики майже інтегрованих квантових систем багатьох тіл, оскільки відомо декілька точних розв'язків [152, 153] і їх можливо використовувати для загальних моделей, де інтегрованість порушена слабко. Зокрема, інтегрованість гарантує, що розсіювання частинок системи N

тіл є рівнозначним послідовності зіткнень парних частинок, і, таким чином, набір вхідних імпульсів для будь-якої події розсіювання мод збігається з набором вихідних імпульсів. Таке недифракційне розсіювання не змінює функції розподілу мод за імпульсами і не може вести систему до рівноваги. Серед одновимірних систем особливу роль відіграє модель Томонага-Латтінжера, що описує квантові електронні системи при наявності сильної взаємодії, огляду якої присвячено наступний пункт. Моди у таких системах, плазмони, представляють інтерес з точки зору багатьох реальних наносистем.

Серед двовимірних систем, мабуть, найширшу увагу дослідників привертає графен — двовимірний алотроп вуглецю. Важливою властивістю цього матеріала є специфічна будова поверхні Фермі, найбільшою особливістю в якій є наявність діраківських точок, що зумовлює цілу плеяду цікавих ефектів, деякі з яких описані далі у цьому підрозділі, а саме у пункті 1.2.2.

1.2.1. Модель Томонага-Латтінжера

Точно розв'язувана модель Томонага-Латтінжера (ТЛ) [154, 155] забезпечила основу для дослідження мод збуджень у одновимірних електронних рідинах, реалізованих у квантових дротах, нанотрубках та крайових станах, див. роботу [46] для нещодавнього огляду та повного списку посилань. Ця модель надзвичайно успішно прогнозувала особливі властивості таких рідин Латтінжера (РЛ), найвизначнішими з яких є степеневі аномалії в тунельній густині станів [156] та ефект поділу спінових зарядів [157]. Однак вона також має деякі серйозні недоліки. В рамках моделі Латтінжера час життя мод нескінченний, що означає відсутність процесів врівноваження. Взаємодії в ідеальному рідинному провіднику Латтінжера не змінюють провідність порівняно з її граничним значенням для невзаємодіючих електронів $G_0 = 2e^2/h$.

Завдяки вбудованій симетрії між дірками та частинками модель Латтінжера не дозволяє описувати такі ефекти, як термоелектрична сила, фотоелектричний відгук тощо. Відродження інтересу до одновимірних електроннних рідин викликане експериментальними результатами, які явно виходять за межі парадигми Латтінжера. Енергетична та просторово розділена тунельна спектроскопія за допомогою квантових дротів [158,159] та локальна термометрія з керованими квантовими крайовими станами Холла [160,161] забезпечили прямі докази термалізації електронних мод в 1D системах. Вимірювання транспорту в дротах з низькою густиною виявили відхилення від квантування ідеальної провідності [162–166] та порушення закону Відемана-Франца (ВФ) [167, 168]. Ці спостереження привернули багато уваги теоретиків та висунули на порядок денний нову концепцію нелінійних РЛ [169, 170], для яких враховується нелінійність закону дисперсії мод. Тому особливий інтерес представляють як мікроскопічні механізми релаксації в узагальненому описі моделі Латтінжера одновимірних електронних рідин, що означає збереження ангармонічних взаємодій між модами, так і спосіб, яким такі рідини передають енергію.

Кейн та Фішер [171] започаткували дослідження теплового транспорту в РЛ. Вони дійшли до наступних висновків. По-перше, в чистій РЛ теплопровідність $\mathcal{K}$ не залежить від взаємодії і збігається з її значенням для випадку відсутності взаємодії,

$$\mathcal{K}_0 = \frac{2\pi^2 T}{3h} \tag{1.24}$$

так що число Лоренца $\mathcal{L} = \mathcal{K}/T\mathcal{G}$ все ще дорівнює $\mathcal{L}_0 = \pi^2/3e^2$ і закон Відемана-Франца (ВФ) справедливий. По-друге, у присутності однієї домішки сильне зворотне розсіювання мод модифікує як $\mathcal{G}$, так і $\mathcal{K}$, так що $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0 = 3/(2\kappa + \kappa^2)$ для параметра взаємодії Латтінжера $1/2 < \kappa < 1$, тоді як число Лоренца розходиться, $\mathcal{L} \propto T^{4-2/\kappa}$ при $T \to 0$ для $\kappa < 1/2$.

Також було передбачено сильне порушення закону ВФ для невпорядкованої РЛ на гратці, коли швидкість розсіювання з ефектами перебросу перевищує домішкове розсіювання [172]. Цю проблему також аналізували в роботах [173–175] в рамках неоднорідної моделі Латтінжера з просторово залежним параметром взаємодії $\kappa(x)$ [176]. Якщо $\kappa(x)$ плавно змінюється на відстанях порядка довжини хвилі Фермі, то моди не зазнають зворотного розсіювання, тому провідність все ще становить $2e^2/h$. Однак моди, що представляють низькоенергетичне збудження рідини, зворотно розсіюються, що сильно змінює величину $\mathcal{K}$. Фізично цей ефект можна порівняти з скінченним часом життя мод, викликаним неоднорідністю [177]. Важливо, що ангармонічні доданки, якими нехтують в рамках моделі Латтінжера, також ведуть до взаємодії мод. Вплив цих двох механізмів розсіювання на кінетику мод дуже різний. Дійсно, в системі, в якій відсутня просторова однорідність, імпульс може бути послаблений розсіюванням на неоднорідності, але самостійно не призводить до теплової рівноваги. Отже, підрахунок теплопровідності реальної нелінійної рідини Латтінжера з урахуванням непружного розсіювання мод є важливою задачею.

Зауважимо також, що у граничному випадку майже впорядкованої РЛ вона фактично переходить у модель вігнерівського кристалу зі збудженнями, що мають лінійний закон дисперсії. Найпростіший спосіб представлення транспорту заряду і тепла в системах з відштовхуванням частинок полягає в розгляді їх в рамках моделі одновимірного кристала Вігнера (КВ) [178, 179]. КВ, реалізований у вуглецевих нанотрубках [180] і квантових дротах [181, 182], являє собою крайній випадок РЛ з параметром взаємодії

$$\kappa = \pi\hbar\rho^2/ms \ll 1, \tag{1.25}$$

де ρ — щільність частинок, m — маса електронів, s — швидкість звуку. При нульовій температурі наближення вігнерівського кристалу приводить до незалежної від взаємодії провідності $\mathcal{G}_0$. Очевидно, що при скінченних температурах термічно активовані моди в вігнерівському кристалі не можуть впливати на електричний транспорт через нелінійність закону дисперсії і закону збереження у одновимірних системах. Насправді такі поправки вимагають розсіювання з перебросом, яке експоненційно пригнічується при низьких температурах і, отже, може бути знехтувано. Однак розсіювання мод може легко уможливити передачу енергії. Врахування в дисертаційній роботі нелінійності закону дисперсії вігнерівського кристалу є важливим кроком у вивченні нелінійної РЛ.

Отже, нелінійність закону дисперсії у одновимірній системі відіграє важливу роль з точки зору процесів передачі енергії і імпульсу у системі. У двовимірних системах, зокрема, графені, це не є настільки критичним, але будова поверхні Фермі є основою, вивчення якої дозволяє визначати характеристики двовимірних систем, що буде показано у наступному пункті.

1.2.2. Зонна структура графена

Незабаром після експериментального відкриття [183] графену дослідження виявили велику кількість нових ефектів, що спостерігаються у наносистемах на основі графену: нетрадиційний квантовий ефект Холла [184]; можливість тестування парадокса Клейна [185]; дзеркальне Андреєвське відбивання та ефект Джозефсона [186, 187]; нові ефекти в електричному полі [188]; електронне лінзування [189]; та інші явища (див., наприклад, останні оглядові роботи [6, 190–197], та посилання у них).

Одним з таких ефектів, який демонструє надзвичайно цікаву і важливу рису електронних мод у графені, діраківських ферміонів, є нечутливість цих мод до зовнішнього електростатичного потенціалу внаслідок так званого парадоксу Клейна [185]. Це явище полягає в тому, що діраківські ферміони можуть проходити з ймовірністю, яка дорівнює одиниці, через класично заборонену зону [198, 199]. Електрони, що рухаються через бар'єр, який розділяє p- і n-допований графен (p-n-контакт), проходять як дірки. При проходженні границі тангенціальна компонента імпульсу зберігається, в той час як нормальна до границі компонента квазічастинки стає протилежною її початковому значенню. Якщо падаючі електрони випускаються з точкового джерела, електрони, що пройшли бар'єр, фокусуються в зображенні джерела. Подібна поведінка аналогічна поведінці фотонів в середовищах з негативним коефіцієнтом заломлення [189]. Такі ефекти можуть зустрічатися в квантових точках в графені, де внутрішні і зовнішні області містять електрони і дірки, відповідно [200]. Таким чином, існує можливість створення квантових точок з потенціальними бар'єрами [201]. Останнім часом спостерігається помітний прогрес у вимірі транспортних властивостей графенових стрічок з налаштованими потенціальними бар'єрами [193, 202, 203]. Дослідження графену також натхнено його потенціальними застосуваннями у наноелектронних пристроях, оскільки прикладене електричне поле може значно змінювати концентрацію електронних мод і мати як електрони, так і дірки як носії заряду з високою рухливістю.

Графен являє собою одноатомний шар, що складається з атомів вуглецю, з'єднаних за допомогою sp^2-зв'язків в гексагональну двовимірну кристалічну решітку, складену з правильних шестикутників, і може бути представлений як композиція бензольних кілець без водневих атомів [204]. Структурна гнучкість графена відображена в його електронних властивостях. sp^2-гібридизація між однією s-орбіталлю і двома p-орбіталями призводить до трикутної плоскої структурі з утворенням σ-зв'язків між атомами вуглецю, розташованими на відстані $a = 1{,}42$ Å. У всіх алотропах σ-зв'язок відповідальний за міцність атомних граток. Незалежна p-орбіталь, перпендикулярна площині структури, може з'єднуватися ковалентно з сусідніми атомами, приводячи до утворення π-зв'язку.

Структура графена не є простою граткою Браве, але може бути представлена як дві взаємопроникні трикутні гратки. Вектори гратки можуть бути записані так:

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{a}{2}(3, \sqrt{3})\,, \qquad \boldsymbol{a_2} = \frac{a}{2}(3, -\sqrt{3})\,. \tag{1.26}$$

Вектори оберненої гратки мають вигляд:

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{2\pi}{3a}(1, \sqrt{3})\,, \qquad \boldsymbol{b_2} = \frac{2\pi}{3a}(1, -\sqrt{3})\,. \tag{1.27}$$

Особливе значення для фізичних властивостей графена мають дві точки, K і K', в кутах зони Брілюена. Вони названі діраківськими точками:

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{2\pi}{3a}, \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a}\right), \qquad \boldsymbol{K}' = \left(\frac{2\pi}{3a}, -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}a}\right). \tag{1.28}$$

Розглянемо зонну структуру графена. Перші роботи про зонну структуру графена були написані П. Р. Уоллесом в 1946 р., де обговорювалось незвичайну напівметалеву поведінку цього матеріалу [205]. На той момент думка про суто двовимірні структури була просто фантазією, і дослідження графену слугувало Уоллесу лише відправною точкою для вивчення графіту як дуже важливого матеріалу для ядерних реакторів в післявоєнну еру. В наступні кілька років була досліджена зонна структура графіту і детально описані електронні властивості цього матеріалу [206, 207], які успішно підтверджувалися експериментальними даними [208–211]. У 1968 р. Шредер та ін. [212] встановили положення електронних і діркових зон в графені, загальноприйняте по сьогоднішній день.

Одним з найбільш важливих аспектів проблеми дослідження графену є те, що його низькоенергетичні моди виявляються безмасовими діраківськими ферміонами. Дисперсійне співвідношення, обчислене в припущенні сильного хімічного зв'язку, має форму [205]:

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = \pm t\sqrt{3 + f(\mathbf{k})} - t' f(\mathbf{k}), \tag{1.29}$$

де

$$f(\mathbf{k}) = 2\cos(\sqrt{3}k_y a) + 4\cos(\sqrt{3}k_y a/2)\cos(3k_x a/2), \tag{1.30}$$

знаки $\pm$ відповідають верхній та нижній енергетичним зонам, $t \approx 2{,}8$ еВ — енергія перескоку електрона на сусідній атом, $t' \approx 0{,}1$ еВ — енергія перескока на атом, наступний за сусідній. Значення t' визначено недостатньо добре, але як показано у [213], $0{,}02t \lesssim t' \lesssim 0{,}2t$ в залежності від параметризації сильного зв'язку. З експериментів по циклотронному резонансу [214] було визначено, що $t' \approx 0{,}1$ еВ.

Хвильова функція електронів з імпульсом, близьким до діраковської точки, може бути представлена у вигляді двохкомпонентного спінора, який описується рівнянням Дірака

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad \hat{H} = -i\hbar v_F \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \hat{V}\,. \tag{1.31}$$

В цьому рівнянні $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y)$ — матриці Паулі, $v_F = 3ta/2\hbar$ — швидкість Фермі, що дорівнює $v_F \simeq 1 \cdot 10^6$ м/с. Це значення було вперше отримано Уоллесом [205]. Таким чином, при низьких енергіях фізика графена схожа на квантову електродинаміку безмасових ферміонів з тим лише винятком, що в графені діраківські моди рухаються зі швидкістю v_F, *в 300 разів меншою за швидкість світла* c. Отже, багато незвичайних властивостей квантової електродинаміки можуть спостерігатися в графені на значно менших швидкостях [185, 215]. Поведінка діраківських мод вельми незвична в порівнянні зі звичайними електронами в металах, що призводить до нових фізичних явищ [216, 217].

Таким чином, через особливості енергетичного спектру *електронні моди у графені мають специфічні* властивості. Саме тому у дисертаційній роботі графен взятий в якості прикладу двовимірної системи, у якій вивчається поширення електронних мод.

1.3. Джозефсонівські моди у шаруватому надпровіднику

Бачимо, що при переході від одиничних мод до мод у одновимірних та двовимірних системах не просто збільшується складність опису їх властивостей, але з'являються нові, особливі ефекти, що притаманні саме цим системам. При об'єднанні декількох шарів система може виявитися сильно анізотропною, а це може спричинити і анізотропію поширення мод у такій системі.

Сильна анізотропія струму у шаруватих надпровідниках призводить до незвичних за своїми властивостями електромагнітних мод. Більш того, відмінність електромагнітних властивостей шаруватого надпровідника при протіканні струму уздовж або поперек шарів не просто зводиться до різних ефективних діелектричних проникностей. Струми в різних напрямках в шаруватих надпровідниках відрізняються за своєю природою: струм уздовж шарів має ту ж природу, що і в об'ємному надпровіднику, і може описуватися, зокрема, лондонівською моделлю, а струм поперек шарів обумовлений слабким джозефсонівським зв'язком між надпровідними шарами [48]. Струм поперек шарів визначається нелінійним зв'язком полів з фазою параметра порядку в надпровіднику, що обумовлює ряд нових для фізики плазми нелінійних явищ. Можна очікувати, що в таких матеріалах можливо спостерігати ефекти, характерні для нелінійної оптики: самофокусування електромагнітних хвиль, стимульована прозорість, ефект зупинки світла та ін. [218, 219]. Характерні частоти мод в шаруватих надпровідниках відповідають терагерцевому діапазону, який дуже важливий з точки зору різних застосувань [220, 221], що визначає не тільки науковий, але і практичний інтерес до джозефсонівських плазмових коливань [222, 223].

1.3.1. Шаруваті надпровідники

Представником природних сильно анізотропних високотемпературних надпровідників є $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$. Він складається з дуже тонких (~ 2 Å) надпровідних шарів $\mathrm{CuO_2}$, що чергуються з більш товстими діелектричними шарами (~ 15 Å) [48].

Природа надпровідності у купратних надпровідниках (Cu-НП) відрізняється від звичайної надпровідності. Куперівська пара у звичайному надпровіднику формується з двох електронів, у яких як сумарне спінове число дорівнює нулю, $S = 0$, так і сумарне орбітальне число теж рівне нулю, $L = 0$. За аналогією з класифікацією електронних оболонок в атомі такий тип спаровування електронів називається s-спаровуванням. На відміну від s-спаровування, вважається експериментально встановленим, що спаровування в Cu-НП має структуру сінглетного

d-спаровування ($S = 0,\ L = 2$) [224–226]. Мікроскопічний механізм цього спаровування до теперішнього часу не цілком ясний, і, швидше за все, він відрізняється від звичайного електрон-фононного механізму притягання і виникає в результаті екранування кулонівської взаємодії між електронами [227, 228]. Однак найбільш важливі риси такого спаровування описуються узагальненою теорією Бардіна-Купера-Шриффера, що відповідає тетрагональній симетрії кристалів Cu-НП і приводить до спаровування з моментом $L = 2$.

Існує велика кількість шаруватих надпровідників, штучно створюваних шляхом твердофазного синтезу або за допомогою молекулярно-пучкової епітаксії, найяскравішими представниками яких є надпровідники на основі заліза (Fe-НП), що являють собою широкий клас високотемпературних надпровідників, надпровідність в яких базується на залізі та елементах V групи (пніктидах) або Se [228].

Взаємодія джозефсонівського тунельного струму, що тече поперек шарів, з електромагнітним полем призводить до існування особливого виду елементарних мод в об'ємі шаруватого надпровідника, так званих джозефсонівських плазмових хвиль (ДПХ) [229]. Наявність же поверхні розділу між шаруватим надпровідником і діелектриком породжує додаткові гілки дисперсійних кривих, що відповідають локалізованим поблизу межі модам.

Нелінійність джозефсонівської плазми призводить до залежності закону дисперсії від амплітуди хвилі [230, 231] і взаємодії локалізованих електромагнітних хвиль із зовнішнім постійним магнітним полем [232–234], відкриваються можливості для спостереження незвичайних для твердотільної плазми ефектів, наприклад, зупинки світла або внутрішнього відбивання. Крім того, збудження локалізованих мод супроводжується резонансними явищами (такими як резонансне посилення прозорості [235], пригнічення дзеркального відбиття [236, 237], трансформація поляризації [238, 239], що мають особливості, пов'язані зі специфікою джозефсонівської плазми.

Поздовжня ε_{ab} і поперечна ε_c компоненти тензора ефективної діелектричної проникності шаруватого надпровідника можуть не просто істотно відрізнятися за величиною, вони можуть мати різні знаки в широкому діапазоні частот, приводячи до негативного заломлення [240] і аномальної дисперсії електромагнітних хвиль [235, 241]. Матеріали з аномальною дисперсією привертають підвищену увагу дослідників після недавніх спостережень в них негативного заломлення мікрохвиль [242] і теоретичного передбачення можливості так званого ідеального фокусування світла [243] (докладніше див. огляд [244]).

Як і хвилі в звичайній плазмі, об'ємні джозефсонівські плазмові хвилі поширюються при частотах, що перевищують порогову частоту [229] — джозефсонівську плазмову частоту ω_J. При цьому в шаруватих надпровідниках, як в матеріалах з одноосної анізотропією, уздовж кожного напряму можуть поширюватися хвилі двох типів [245], звичайні і надзвичайні, поляризації і дисперсійні властивості яких визначаються напрямком їх поширення відносно осі анізотропії, кристалографічної осі **c**.

Крім об'ємних хвиль, на межі шаруватого надпровідника і звичайного діелектрика можуть поширюватися електромагнітні хвилі, локалізовані поблизу границі. У роботах [232, 246] було показано, що вздовж межі розділу шаруватий надпровідник-вакуум, як і вздовж межі звичайної плазми, можуть поширюватися поверхневі моди – поверхневі джозефсонівські плазмові хвилі. Однак, на відміну від звичайної плазми, такі поверхневі хвилі можуть поширюватися з частотами не тільки нижче, але і вище плазмової частоти [240]. Крім того, якщо надпровідні шари перпендикулярні межі розділу, то дисперсійні властивості поверхневих хвиль залежать від напрямку їх поширення [239].

Якщо замість напівнескінченного зразка шаруватого надпровідника розглядається пластина кінцевої товщини, то крім поверхневих хвиль, які затухають в обидві сторони від межі розділу, в зразку можуть поширюватися хвильоводні моди – моди, поле яких осцилює поперек пластини і загасає поза її границями при віддаленні від поверхні. В роботі [247] теоретично вивчені такі хвилі для випадку, коли надпровідні шари паралельні граням пластини. Поширення таких хвиль, очевидно, не залежить від напрямку хвильового вектора в площині пластини.

В роботі [241] розглянуті локалізовані хвилі в пластині, надпровідні шари якої перпендикулярні її поверхням, а напрямок поширення перпендикулярний шарам. Показано, що для таких хвиль в певному частотному діапазоні дисперсійні криві немонотонні, тобто містять ділянки аномальної дисперсії. Як уже зазначалось, дисперсія локалізованих хвиль в такій геометрії буде залежати від напрямку їх поширення. Тому становить інтерес вивчення дисперсійних кривих при довільному напрямку поширення хвиль. Крім того, з експериментальної точки зору може виявитися зручним розгляд не пластини, а довгого зразка, поміщеного в планарний хвилевід, тобто між двома металевими пластинами. В цьому випадку істотно важливим є аналіз саме хвиль з хвильовим вектором, спрямованим під кутом до надпровідних шарів.

1.3.2. Електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику

ДПХ описуються зв'язаними синусоїдальними рівняннями Гордона. Ці рівняння для феноменологічного опису електродинаміки шаруватих надпровідників вперше були запропоновані у роботі [248]. Багато авторів пізніше повторно отримали ці рівняння іншими методами [249–256]. Наприклад, в роботі [256] представлено мікроскопічну теорію для надпровідної фази та динаміки зарядів в системі джозефсонівських контактів, побудовану на функціональному формалізмі Бардіна-Купера-Шриффера. При певних умовах результати цієї теорії дають зв'язані синусоїдальні рівняння Гордона. Хоча ці рівняння не враховують багато факторів (наприклад, d-хвильового спарювання), вони дають не тільки якісно правильний опис ДПХ в шаруватому надпровідники, але і дозволяють робити важливі передбачення. В роботі [257] на основі зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона був запропонований спосіб отримання когерентного випромінювання терагерцових джозефсонівських плазмових хвиль, який пізніше був реалізований в експерименті [258].

Розглянемо шаруватий надпровідник з товщиною діелектричних d і надпровідних s шарів, відповідно. Систему координат обрано таким чином, щоб вісь z збігалася з кристалографічною віссю **c**, а площина xy збігалася з $\mathbf{ab}$ площиною. Також припускаємо, що електричне поле лежить в площині xz, а магнітне поле направлено вздовж осі y, тобто

$$\vec{E} = \{E_x, 0, E_z\}, \quad \vec{H} = \{0, H, 0\}. \tag{1.32}$$

Як відмічалось, струм у різних напрямках в шаруватому надпровіднику має різну природу. Густина струму $J_{x,y}$ уздовж **ab** площини має ту ж природу, що і струми в звичайних надпровідниках, і вона може бути описана в термінах лондонівської моделі. Вона включає в себе густину надструму і густину струму квазічастинок, що виникає в результаті дії електричного поля в напрямку осі x:

$$J_{xl} = \frac{c\Phi_0}{8\pi^2\lambda^2}\left(\frac{\partial\chi_l}{\partial x} - \frac{2\pi}{\Phi_0}A_{xl}\right) + \sigma_{ab}E_{xl}, \tag{1.33}$$

де λ — лондонівська глибина проникнення магнітного поля в масивний надпровідник, A_{xl} — поздовжня компонента векторного потенціалу, σ_{ab} — провідність квазічастинок в надпровідниковому шарі.

Густину ж струму, що протікає між $(l+1)$-м і l-м шарами надпровідника, можна записати у вигляді суми густин джозефсонівського струму куперівських пар і квазічастинкового струму:

$$J_z^{l+1,l} = J_c \sin(\varphi^{l+1,l}) + \sigma_c E_z^{l+1,l}, \tag{1.34}$$

де J_c — максимальна густина джозефсонівського струму.

Згідно з роботами [252, 254], вважається, що надпровідні шари настільки тонкі ($s \ll d$), що зміною фази і електричного поля в напрямку осі z в них можна знехтувати. Тоді для опису електромагнітних полів у шаруватому надпровіднику можна ввести градієнтно-інваріантну різницю фаз параметра порядку між $(l+1)$-

м і l-м надпровідними шарами,

$$\varphi^{l+1,l} = \chi_{(l+1)} - \chi_l - \frac{2\pi}{\Phi_0}\int_l^{l+1} A_z^{l+1,l} dz, \tag{1.35}$$

де χ_l – фаза параметру порядка у l-му шарі, $\Phi_0 = \pi c\hbar/e$ – квант магнітного потоку, e – елементарний заряд, $A_z^{l+1,l}$ – нормальна компонента векторного потенціалу між шарами. Компоненти магнітного и електричного полів у зразку зв'язані з градієнтно-інваріантною різницею фаз рівняннями:

$$\frac{\partial H^{l+1,l}}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\left[J_c \sin(\varphi^{l+1,l}) + \sigma_c E_z^{l+1,l}\right] + \frac{\varepsilon_s}{c}\frac{\partial E_z^{l+1,l}}{\partial t}\,, \tag{1.36}$$

$$\frac{H^{l+1,l} - H^{l,l-1}}{s} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\left(\frac{\partial \chi_l}{\partial x} - \frac{2\pi}{\Phi_0}A_{xl}\right) + \frac{4\pi}{c}\sigma_{ab}E_{xl} + \frac{d}{s}\frac{\varepsilon_s}{c}\frac{\partial E_{xl}}{\partial t}\ . \tag{1.37}$$

В них J_c – критична густина джозефсонівського струму, A_{xl} – тангенціальна компонента векторного потенціалу, σ_{ab} і σ_c – дисипативні провідності квазічастинок вздовж и поперек надпровідних шарів, відповідно, ε_s – діелектрична проникність міжшарових проміжків.

Зв'язок електричного і магнітного полів з векторним потенціалом визначається наступними співвідношеннями:

$$E_{xl} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_{xl}}{\partial t} - \frac{\partial A_{0l}}{\partial x}\ , \tag{1.38}$$

$$E_z^{l+1,l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z^{l+1,l}}{\partial t} - \frac{A_{0(l+1)} - A_{0l}}{D}\ , \tag{1.39}$$

$$H^{l+1,l} = -\frac{\partial A_z^{l+1,l}}{\partial x} - \frac{A_{x(l+1)} - A_{xl}}{D}\ . \tag{1.40}$$

У рівняннях (1.38) – (1.40) позначено: $D = s + d \approx d$ — період надпровідникової структури, A_{0l} — скалярний потенціал в l-м надпровідниковому шарі, який може бути знайдений з рівняння Пуассона.

Використовуючи рівняння (1.39) і припускаючи, що $\int_l^{l+1} A_z^{l+1,l} dz = A_z^{l+1,l} D$, можна отримати співвідношення між компонентою електричного поля упоперек шарів і калібрувально-інваріантною різницею фаз параметра порядку $\varphi^{l+1,l}$,

$$E_z^{l+1,l} = \frac{\Phi_0}{2\pi c D}\frac{\partial\varphi^{l+1,l}}{\partial t} - \frac{\psi_{l+1} - \psi_l}{D}\ , \tag{1.41}$$

де ψ_l – калібрувально-інваріантний скалярний потенціал,

$$\psi_l = \frac{\Phi_0}{2\pi c}\frac{\partial\chi_l}{\partial t} + A_{0l}\,. \tag{1.42}$$

З рівнянь (1.36) – (1.37) можна отримати зв'язані синусоїдальні рівняння Гордона для градієнтно-інваріантної різниці фаз $\varphi^{l+1,l}$,

$$\left(1 - \frac{\lambda_{ab}^2}{d^2}\partial_l^2\right)\left(\ddot{\varphi}^{l+1,l} + \omega_r\dot{\varphi}^{l+1,l} + \omega_{_J}^{\,2}\sin\left(\varphi^{l+1,l}\right)\right) - \frac{c^2}{\varepsilon}\frac{\partial^2\varphi^{l+1,l}}{\partial x^2} = 0. \tag{1.43}$$

В даному рівнянні дискретний оператор другої похідної ∂_l^2 визначається як

$$\partial_l^2 f_l = f_{l+1} + f_{l-1} - 2f_l, \tag{1.44}$$

точка означає диференціювання за часом,

$$\omega_{_J} = \sqrt{\frac{8\pi e d J_c}{\hbar\varepsilon}} \tag{1.45}$$

– джозефсонівська плазмова частота, $\lambda_{ab} = \lambda(d/s)^{1/2}$ – лондонівська глибина проникнення магнітного поля в шаруватий надпровідник в напрямку поперек шарів, і $\omega_r = 4\pi\sigma_c/\varepsilon$ — частота релаксації, пропорційна провідності квазічастинок вздовж кристалографічної осі **c**.

Як показано в роботі [259], провідність квазічастинок уздовж шарів σ_{ab}, яка входить в рівняння (1.37), слід також враховувати. Однак при частотах близьких до джозефсонівської плазмової частоти доданок в рівнянні (1.37), що містить σ_{ab}, виявляється малим в порівнянні з іншими. Він може бути опущений якщо виконується така умова:

$$\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_{_J}^2}\right|\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_c}\frac{\varepsilon\omega_{_J}^2\lambda_{ab}^2}{c^2}\ll 1.$$

Вважаючи просторовий масштаб зміни електромагнітного поля уздовж осі z набагато більшим від товщин надпровідних s та діелектричних d шарів, можна перейти до континуального наближення, в якому синусоїдальні рівняння Гордона зводяться до наступного диференціального рівняння в частинних похідних:

$$\left(1-\lambda_{ab}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\omega_r}{\omega_J^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sin\varphi\right]-\lambda_c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0, \qquad (1.46)$$

де $\lambda_c = c/\omega_J\sqrt{\varepsilon_s}$ має зміст лондонівської глибини проникнення магнітного поля вздовж шарів.

Відзначимо, що рівняння (1.43) отримано в припущенні відсутності порушення електронейтральності в шаруватому надпровіднику. Цим ефектом можна знехтувати в багатьох випадках через малість дебаєвсьного радіуса екранування в порівнянні з лондонівською глибиною проникнення поля в надпровідник.

Наприклад, його роль виявляється досить незначною при частотах, багато менших джозефсонівської плазмової частоти, при $\omega \ll \omega_{_J}$. Однак ефект порушення електронейтральності може відігравати важливу роль у формуванні спектра ДПХ [249, 253, 260–264] і в транспортних властивостях надпровідника [265] при частотах близьких до $\omega_{_J}$. Зокрема, завдяки цьому ефекту виникає нова гілка в спектрі об’ємних ДПХ.

Висновки до розділу 1

- Квантова мода за рахунок контакту із зовнішнім середовищем зазнає затухання і декогеренції, а її стан неминуче стає змішаним, навіть якщо у початковий момент часу система знаходилася у чистому стані. Динаміку систем у такому випадку можна досліджувати за допомогою квантового кінетичного рівняння для матриці густини стану. Вплив оточуючого середовища на такі системи зазвичай складний і не може бути зведений лише до ефективного затухання – додатково необхідно враховувати шуми у системі. Адитивні і частотні шуми грають велику роль у реальних експериментах, зокрема в реєстрах квантових комп'ютерів. Комбінований вплив і шумів, і контакту з термостатом потребує дослідження.

- Одним з прикладів складних впливів на динаміку моди може бути контакт її з деякою квантовою малокубітною системою. Така система, що складається з резонатора і кубіта, представляє інтерес з практичної точки зору, наприклад при зчитуванні інформації з реєстру квантового комп'ютеру. Однак зв'язок резонатора з, наприклад, одним кубітом, не зводиться лише до дії телеграфного шуму частоти, і отже, потребує дослідження. Цей зв'язок є дисперсійним, тобто він модулює енергію кожної з підсистем в залежності від стану іншої. Навіть у класичній системі можна отримати дискретні рівні енергії можливих вимушених коливань, при особливому нелінійному вигляді зовнішньої дії. Такі аргументальні коливання можуть проявляти мультистабільність за деяких параметрів установки, але чим визначаються ймовірності різних станів – є відкритим питанням.

- Вплив мод нульових осциляцій вакуума може бути експериментально досліджений за допомогою ефекту Казимира взаємодії двох тіл у вакуумі. Сила Казимира вивчається понад 70 років і підрахована для багатьох геометрій двох тіл. Однак для реального металу вплив релаксацій у зразку і температурна залежність сили Казимира не є добре вивченими питаннями. Окрім того, сила Казимира для взаємодії тонкої плівки з масивним тілом може бути важливою для вирішення цих питань, оскільки така плівка є напівпрозорою для мод вакуума. Ефект Казимира важливий при проектуванні передових експериментальних схем у метрології, спектроскопії або атомного годинника надвисокої точності, оскільки призводить до зсуву і уширення спектральної полоси охолоджених атомів у світлових пастках.

- Представляє особливий інтерес вивчення електронних мод у одновимірних та двовимірних системах. В одномірній системі взаємодіючих електронів, рідині Латтінжера, закон дисперсії збуджень лінійний. Але така груба модель не дозволяє описувати нерівноважні процеси та потребує уточнення. Врахування нелінійності закону дисперсії дозволяє аналізувати непружні зіткнення мод. Аналіз такої моделі може дозволити знайти теплопровідність одновимірної електронної системи.

● Важливим представником двовимірних квантових систем є графен. Інтерес до нього базується на особливому законі дисперсії збуджень в ньому. Поблизу діраківських точок він нагадує закон дисперсії релятивістських частинок, що використовується в багатьох яскравих ефектах. Поширення мод у графені при наявності зовнішнього потенціалу різного профілю вивчено в недостатній мірі.

● Шаруваті системи мають анізотропні властивості, що призводять до важливих ефектів при поширенні в них мод. Наприклад, шаруваті надпровідники є перспективними матеріалами, бо електромагнітні моди в них, джозефсонівські плазмові хвилі, мають частоти у терагерцовому діапазоні, важливому для багатьох застосувань, зокрема у медицині або при побудові електронних пристроїв у цьому важливому і маловивченому частотному діапазоні. Анізотропія мод у надпровідниках пов’язана з анізотропією струмів у них. Вздовж шарів він має таку ж природу, як і у товстому надпровіднику, а у перпендикулярному шарам напрямку струм має джозефсонівську природу тунельного струму, що визначає особливу нелінійність системи. Незважаючи на бурхливий інтерес до таких систем, поширення локалізованих мод у довільному напрямку по відношенню до шарів системи вивчено у недостатній мірі, а дані про поширення мод у різних конфігураціях пластини і зовнішніх полів не узагальнені.

Таким чином, дослідження поширення, декогеренції і взаємодії мод у квантових системах кількох ступенів вільності, а також низькорозмірних чи шаруватих, представляє інтерес як з загальнофізичної точки зору, так і з погляду різних можливих застосувань. Теоретичному дослідженню таких ефектів і присвячена дана дисертаційна робота.

Розділ 2

ДИНАМІКА КВАНТОВИХ МОД ЗА НАЯВНОСТІ ШУМУ ЧАСТОТИ

У цьому розділі, спираючись на результати праць [8–10], досліджено динаміку квантових мод коливань наноосцилятора чи нанорезонатора, які контактують з деяким термостатом, а також з джерелами шумів.

У підрозділі 2.1 розвинуто теоретичний метод виявлення та знаходження характеристик частотного шуму в коливальних системах. У квантових дворівневих системах шуми частоти призводять до різниці між часами релаксації T_1 і T_2 та їх зазвичай відокремлюють від термічного шуму, використовуючи нелінійний відгук на зовнішнє поле [266]. Ці методи не застосовуються до мод резонаторів, оскільки їх відгук є лінійним. Якщо шум частоти є домінуючим фактором, спектр координати виявляє деякі особливості шуму [68, 69, 71, 267]. Однак у багатьох випадках, що представляють інтерес, він не забезпечує достатньою інформацією та часто не дозволяє навіть виявити шуми частоти взагалі. Наприклад, для широкосмугового гаусового частотного шуму спектр поглинання є лоренцівським, як і у випадку відсутності частотного шуму, навіть якщо його загальна ширина перевищує ширину внаслідок затухання.

У цьому підрозділі показано, як шуми частоти можна вивчити в експерименті, використовуючи те саме вимірювання, яке використовується у стандартних схемах для пошуку спектра поглинання, тобто, вимірювання відгуку осцилятора на білярезонансне збудження (див., наприклад, [69, 71]). Це стосується як класичних, так і квантових осциляторів. Як буде показано, це можна зробити, вивчаючи такі корелятори квадратур, які є особливо чутливими до шуму частоти, а також моментів комплексної амплітуди моди. Вони дозволяють не тільки виявити частотний шум, але й вивчити його статистику як для класичних, так і для квантових коливань.

У підрозділі 2.2 чутливість кореляторів і старших моментів комплексної координати до статистики шуму частоти демонструється на важливих прикладах шуму: гауссівському, пуассонівському та телеграфному, як представника класу марківських шумів. Також проаналізовано корелятори та старші моменти для більш загального випадку довільного слабкого шуму методами теорії послідовних наближень.

У підрозділі 2.3 досліджено вплив телеграфного незбалансованого частотного шуму на властивості електромеханічної моди. Показано, що частотні залежності старших кумулянтів координати при одних і тих же значеннях коефіцієнта затухання мають особливості, які дозволяють відрізнити ефекти, пов'язані з наявністю частотного шуму. Запропонований у підрозділі 2.1 метод виявлення шуму частоти перевіряється експериментально для торсіонного мікрорезонатора, що знаходиться під дією телеграфного шуму частоти (ТШЧ), тобто частота якого стохастично переключається між двома значеннями. Показано, що усереднений за часом амплітудний спектр моди має два піки. Вони зливаються зі зростанням швидкості переключення частоти, а спектр при цьому зазнає звуження.

Також у підрозділі 2.3 показано, що моменти комплексної амплітуди сильно залежать від характеристик частотного шуму. Ця залежність залишається сильною навіть тоді, коли присутній сильний тепловий або детекторний шум. Показано, що саме аналіз старших моментів дозволяє отримати більше інформації щодо характеристик шуму.

2.1. Відділення шуму частоти, що діє на класичну або квантову моду

2.1.1. Рівняння руху для комплексної координати

Розглянемо спочатку класичний осцилятор і будемо вважати, що релаксація енергії осцилятора відбувається завдяки зв'язку з тепловим резервуаром, який моделюємо лінійним по координаті і імпульсу осцилятора гамільтоніаном. Вважаємо його також слабким, так що швидкість затухання $\Gamma \ll \omega_0$, де ω_0 — це власна частота осцилятора при відсутності частотного шуму. Шум модулює частоту так, що фактична частота дорівнює $\omega_0 + \xi(t)$. Будемо вважати, що $\langle \xi(t) \rangle = 0$ і що $\xi(t)$ є стаціонарним процесом. Основний інтерес викликає невеликий шум, так що відхилення частоти від ω_0 невеликі порівняно з ω_0.

З феноменологічної точки зору еволюція моди з одиничною ефективною масою за наявності рушійної сили $F \cos \omega_F t$ описується рівнянням

$$\ddot{q} + 2\Gamma \dot{q} + [\omega_0^2 + 2\omega_0 \xi(t)] q = F \cos \omega_F t + f(t), \tag{2.1}$$

де $f(t)$ — адитивний тепловий шум, середнє значення якого вважається рівним нулю. Ми будемо розглядати цей рух у системі відліку, що осцилює з частотою ω_F на часових масштабах, набагато більших за ω_F^{-1}. У цій системі відліку наближення марківської релаксації квадратур моди є застосовним. Необхідність припущення про омічну дисипацію обговорюється у [87].

Будемо вважати, що типові частоти шуму $\xi(t)$ невеликі порівняно з ω_0. Це виконується для багатьох сучасних систем; зв'язок моди з джерелом такого шуму не призводить до дисипації енергії через нелінійне тертя [268] та до стохастичного параметричного збудження осцилятора [58, 269].

Вважаємо також, що змушені коливання відбуваються поблизу резонансу, тобто частота ω_F близька до ω_0, а саме $|\delta\omega| \ll \omega_0$, де $\delta\omega = \omega_F - \omega_0$. Динаміку осцилятора можна зручно проаналізувати, переходячи від координати q та імпульсу $p = \dot{q}$, до комплексних змінних $u(t), u^*(t)$, що повільно змінюються з часом на масштабах ω_F^{-1} ,

$$\begin{aligned} q(t) &= u \exp(i\omega_F t) + u^* \exp(-i\omega_F t), \\ p(t) &= i\omega_F \left[u \exp(i\omega_F t) - u^* \exp(-i\omega_F t) \right]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Функція $u(t)$ — комплексна амплітуда моди. З рівняння (2.2), $\mathrm{Re}\,u$ та $\mathrm{Im}\,u$ дають квадратури координати осцилятора на частоті ω_F.

На часових масштабах, великих порівняно з часом кореляції термостата та ω_F^{-1}, як мікроскопічна теорія слабкого зв'язку між осцилятором та резервуаром [87, 270, 271], так і феноменологічна модель рівняння (2.1) приводять до рівняння руху для u,

$$\dot{u} \simeq -[\Gamma + i\delta\omega - i\xi(t)]u - \frac{iF}{4\omega_F} + f_u(t), \tag{2.3}$$

де $f_u(t) = -(i/2\omega_F) f(t) \exp(-i\omega_F t)$, а перенормалізацію ω_0 за рахунок контакту з термостатом, яка виникає в мікроскопічній теорії, було включено до ω_0.

На часових масштабах, що значно перевищують час затухання Γ^{-1}, початковий стан осцилятора не впливає, і

$$\begin{gathered} u(t) = (F/4\omega_F)u_F(t) + u_{\mathrm{th}}(t), \\ u_F(t) = \int_{-\infty}^{t} dt_1 \chi^*(t-t_1) \exp\left[i\int_{t_1}^{t} dt_1'\xi(t_1')\right], \\ \chi(t) = i\exp(-\Lambda^* t), \qquad \Lambda \equiv \Lambda(\omega_F) = \Gamma + i\delta\omega. \end{gathered} \tag{2.4}$$

У цьому рівнянні $u_F(t)$ описує змушені коливання; $\chi(t)$ — нормована сприйнятливість осцилятора за відсутності коливань частоти. Доданок u_{th} описує вплив теплового шуму,

$$u_{\mathrm{th}}(t) = i\int_{-\infty}^{t} dt_1 \chi^*(t-t_1) f_u(t_1) \exp\left[i\int_{t_1}^{t} dt_1'\xi(t_1')\right]. \tag{2.5}$$

Нас цікавлять наслідки частотного, а не теплового шуму. Збільшуючи поле F, доданок $\propto u_F(t)$ в $u(t)$, у рівнянні (2.4) можна зробити більше, ніж типове значення u_{th}. Однак, як буде показано, внесок теплового шуму в корелятори $u(t)$ зникає в наближенні, яке використовується для отримання рівняння (2.3), що дозволяє використовувати навіть порівняно слабкі змушуючі поля для вивчення частотного шуму.

2.1.2. Корелятори комплексної координати

Два шуми, що визначають динаміку моди, $f(t)$ і $\xi(t)$, як правило, мають різні масштаби. Шум $f(t)$ є результатом лінійного зв'язку координати і імпульсу q, p з термостатом. Основний вплив на осцилятор відповідає компонентам Фур'є функції $f(t)$ з частотами ω такими, що $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$. При виведенні марківського рівняння руху для $u(t)$, рівняння (2.3), було припущено, що спектр шуму $f(t)$ неперервний при частотах близьких до ω_0 $[87, 270, 271]$, зокрема, ми нехтували зміною спектру для $|\omega - \omega_0| \sim |\delta\omega|, \langle\xi^2(t)\rangle^{1/2}$.

Навпаки, шум $\xi(t)$ надходить або від зовнішнього нерівноважного джерела, або від взаємодії з термостатом, що є квадратичною за q, p, і зв'язує осцилятор зі сторонніми ступенями вільності (див. також наступний розділ дисертаційної роботи).

Важливим наслідком статистичної незалежності $f(t)$ і $\xi(t)$ є така рівність:

$$\langle u_{\mathrm{th}}^n(t)\rangle = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \dots. \tag{2.6}$$

Простий спосіб це побачити — порівняти вирази для $u_{\mathrm{th}}(t)$ і $u_{\mathrm{th}}(t + t_0)$ з довільним t_0. Якщо написати рівняння (2.5) для $u_{\mathrm{th}}(t + t_0)$ і перейти від інтегрування за t_1 і t_1' до $\tilde{t}_1 = t_1 - t_0$ і $\tilde{t}_1' = t_1' - t_0$ відповідно, вираз для $u_{\mathrm{th}}(t + t_0)$ стає тієї ж форми, що і $u_{\mathrm{th}}(t)$, за винятком того, що шуми $f(t)$ і $\xi(t)$ беруться у момент часу, зміщений на t_0, і виникає додатковий множник $\exp(-i\omega_F t_0)$. Для стаціонарного шуму зміна моменту відліку часу не впливає на середні значення, і тому єдина різниця між усередненням $u_{\mathrm{th}}(t)$ та $u_{\mathrm{th}}(t + t_0)$ — множник $\exp(-i\omega_F t_0)$. Однак, оскільки результат усереднення не може залежати від t_0, середні моменти $u_{\mathrm{th}}(t)$ дорівнюють нулю, як і корелятори $\langle u_{\mathrm{th}}(t_1) \dots u_{\mathrm{th}}(t_n)\rangle$.

Виходячи з цього, маємо:

$$\langle u(t_1)\dots u(t_n)\rangle = (F/4\omega_F)^n \langle u_F(t_1)\dots u_F(t_n)\rangle, \tag{2.7}$$

і нижче ми будемо розраховувати корелятори u_F. Вони не залежать від теплового шуму для лінійного осцилятора, і тому вимірювання їх значень негайно виявляє частотний шум. Зауважимо, що корелятор n-го порядку пропорційний n-ому степіню змушуючої сили, що відповідає лінійному відгуку моди.

2.1.3. Квантове формулювання

Отримані вище результати можна негайно поширити на квантовий режим, оскільки відгук квантових та класичних гармонічних осциляторів на білярезонансну зовнішню силу однакові. За відсутності зв'язку з тепловим резервуаром гамільтоніан осцилятора в резонансному полі $F\cos\omega_F t$ за наявності слабкого класичного шуму частоти $\xi(t)$ є

$$H_0 = \hbar[\omega_0 + \xi(t)]a^\dagger a - qF\cos\omega_F t, \tag{2.8}$$

де $a = (2\hbar\omega_0)^{-1/2}(\omega_0 q + ip)$ є оператор знищення для квантового осцилятора.

Ефект зв'язку з термостатом можна зручно проаналізувати в білярезонансному наближенні, якщо перейти до представлення взаємодії з оператором $U(t) = \exp(-i\omega_F a^\dagger a t)$. Коли типові частоти шуму невеликі порівняно з ω_F, отримане рівняння для матриці густини осцилятора ρ_0 для даної реалізації частоти шуму має звичну форму

$$\dot\rho_0 = i[\delta\omega - \xi(t)][a^\dagger a, \rho_0] - \hat\Gamma\rho_0 + i[F' a^\dagger + F'^* a, \rho_0]. \tag{2.9}$$

У цьому рівнянні $F' = (8\hbar\omega_0)^{-1/2}F$; оператор $\hat{\Gamma}$ описує затухання осцилятора,

$$\hat{\Gamma}\rho = \Gamma(\bar{n}+1)(a^\dagger\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a) + \Gamma\bar{n}(aa^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho a + \rho aa^\dagger, \tag{2.10}$$

де $\bar{n} = [\exp(\hbar\omega_0/k_BT) - 1]^{-1}$ — число Планка; як і в класичному аналізі, передбачається, що перенормалізація частоти осцилятора за рахунок приєднання до термостата включена в ω_0. Підкреслимо, що матриця густини ρ_0 не була усереднена за реалізаціями $\xi(t)$, вона змінюється в часі під дією шуму.

Рівняння (2.9) дозволяє виконати квантовомеханічне усереднення для заданих значень $\xi(t)$. Це призводить до ланцюжка рівнянь для моментів $\overline{a^n}(t) \equiv \mathrm{Tr}[a^n\rho_0(t)]$ оператора a,

$$\frac{d}{dt}\overline{a^n} = -n[\Lambda^* + i\xi(t)]\overline{a^n} + inF'\overline{a^{n-1}}, \tag{2.11}$$

де $\Lambda = \Gamma + i\delta\omega$, див. рівняння (2.4). Якщо припустити, що поле F увімкнено адіабатично при $t \to -\infty$, початкова умова для рівняння (2.11) є $\overline{a^n} \to 0$ при $t \to -\infty$. Розв’язком рівняння (2.11) є

$$\overline{a^n}(t) = [\overline{a}(t)]^n\,, \qquad \overline{a}(t) = F'u_F^*(t), \tag{2.12}$$

де $u_F(t)$ задано рівнянням (2.4). Тому усереднення моментів оператора a за реалізаціями $\xi(t)$ можна зробити так само, як і для класичного осцилятора, і результати, обговорені вище, виконуються також у квантовому випадку.

2.2. Визначення характеристик шуму частоти

2.2.1. Білий шум частоти

Явні вирази (2.4) та (2.7) дозволяють аналізувати корелятори комплексної амплітуди для різних типів частотних шумів. Розглянемо кілька моделей шуму, що представляють інтерес для експерименту, і покажемо, як, вимірюючи корелятори, можна вивчити статистику шуму.

Одним з найважливіших є шум із порівняно широким частотним спектром, який приймає майже однакові значення для частот, менших за характерну граничну частоту $\omega_{\rm corr}$ таку, що $\Gamma, |\delta\omega| \ll \omega_{\rm corr} \ll \omega_0$. Такий шум можна вважати δ-корельованим на часових масштабах, великих у порівнянні з ω_0^{-1}.

Прикладами таких шумів є квазіпружне розсіювання фононів або інших збуджень на механічному осциляторі [272, 273]. В цьому випадку шум можна наближено вважати гауссівським, або такий шум може виникати через дискретність електричного струму, що модулює осцилятор, – в цьому випадку він близький до пуассонівського, або він може походити з інших процесів і мати іншу статистику.

Для δ-корельованого шуму зручно робити усереднення в рівнянні (2.7), використовуючи характеристичний функціонал шуму, який можна записати як

$$\mathcal{P}[v(t)] \equiv \left\langle \exp\left[i\int dt v(t)\xi(t)\right]\right\rangle = \exp\left[-\int dt\mu\big(v(t)\big)\right]. \qquad (2.13)$$

Функція $\mu(k)$ визначається статистикою шуму: для гауссівського шуму з нульовим середнім значенням і інтенсивністю D, тобто $K(t-t') = \langle\xi(t)\xi(t')\rangle = 2D\delta(t-t')$, і для пуассонівського шуму з нульовим середнім значенням, площею імпульсу g і частотою імпульсів ν, тобто $\xi(t) = g\sum_n \delta(t-t_n) - g\nu$, маємо відповідно $\mu = \mu_G$ і $\mu = \mu_P$, де [274]

$$\mu_G(k) = Dk^2, \qquad \mu_P(k) = \nu\left(1 - e^{ikg} + ikg\right). \qquad (2.14)$$

Але перш ніж навести результати через функцію $\mu(k)$, розглянемо дещо громіздкі, але корисні для випадку, коли $\mu(k)$ невідома, вирази моментів через кореляційні функції шуму.

Характеристичний функціонал (2.13) для гауссівського шуму $\xi(t)$ задовольняє такому рівнянню,

$$\dot{P}_v = -P_v\ v(t) \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \tilde{K}(t-\tau) v(\tau). \tag{2.15}$$

Перейдемо до Фур'є перетворення корелятора $\tilde{K}(t)$,

$$\tilde{K}(t) = \int d\omega K_\omega \cos(\omega t). \tag{2.16}$$

Для знаходження середнього значення за допомогою характеристичного функціоналу, візьмемо в якості функції $v(t)$ функцію, що приймає значення 0 або 1 (саме така функція дозволить згідно рівнянь (2.4) та (2.7) знайти середнє значення $\langle u \rangle$). Тоді

$$\dot{P}_1 = -P_1 \int d\omega K_\omega \frac{\sin\big(\omega(t-t_1)\big)}{\omega}. \tag{2.17}$$

Розв'язком цього рівняння є

$$P_1 = \exp\left[-\int d\omega \frac{K_\omega}{\omega^2}\Big(1-\cos(\omega(t-t_1))\Big)\right]. \tag{2.18}$$

Розглянемо випадок слабкого гауссівського шуму (див. також наступний підрозділ). Тоді можна отримати такий наближений вираз:

$$\begin{aligned} P_1 \approx 1 - \int d\omega \frac{K_\omega}{\omega^2}\Big(1-\cos(\omega(t-t_1))\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int\int d\omega_1 d\omega_2 \frac{K_{\omega_1}}{\omega_1^2}\frac{K_{\omega_2}}{\omega_2^2}\Big(1-\cos(\omega_1(t-t_1))\Big)\Big(1-\cos(\omega_2(t-t_1))\Big). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Отже, використовуючи ці вирази, можемо знайти середнэ значення координати. Запишемо його у спрощеній формі, опускаючи множник амплітуди зовнішньої сили і вводячи змінну $\Lambda = \Gamma + i\delta\omega$:

$$\langle u \rangle = -i \int_{-\infty}^{0} dt_1 e^{\Lambda t_1} P_1 \approx -\frac{i}{\Lambda} + i \int d\omega \frac{K_\omega}{\Lambda(\Lambda^2 + \omega^2)} -$$
$$-\frac{i}{2} \int \int d\omega_1 d\omega_2 K_{\omega_1} K_{\omega_2} \times$$
$$\times \frac{6\Lambda^4 + 3\Lambda^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{\Lambda(\Lambda^2 + \omega_1^2)(\Lambda^2 + \omega_2^2)(\Lambda^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)(\Lambda^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2)}. \tag{2.20}$$

Для разрахунку другого і третього моментів координати необхідно розрахувати характеристичний функціонал для функцій, що мають дві або три "сходинки". Для них отримано такі вирази:

$$P_2 = \exp\Big[- \int d\omega \frac{K_\omega}{\omega^2} \Big(3 + e^{i\omega(t_1 - t_2)} - 2e^{i\omega(t - t_1)} - 2e^{i\omega(t - t_2)} \Big) \Big], \tag{2.21}$$

$$P_3 = \exp\Big[- \int d\omega \frac{K_\omega}{\omega^2} \Big(6 + e^{i\omega(t_1 - t_2)} + e^{i\omega(t_1 - t_3)} + e^{i\omega(t_2 - t_3)} -$$
$$-3e^{i\omega(t - t_1)} - 3e^{i\omega(t - t_2)} - 3e^{i\omega(t - t_3)} \Big) \Big]. \tag{2.22}$$

Використовуючи їх, отримуємо середнє значення комплексної координати,

$$\langle u \rangle = -i \int_{-\infty}^{0} dt_1 e^{\Lambda t_1} P_1 \approx -\frac{i}{\Lambda} + i \int d\omega K_\omega \frac{1}{\Lambda^2(\Lambda - i\omega)} +$$
$$+\frac{i}{2} \int \int d\omega_1 d\omega_2 K_{\omega_1} K_{\omega_2} \frac{2\Lambda - i(\omega_1 + \omega_2)}{\Lambda \omega_1 \omega_2 (\Lambda - i\omega_1)(\Lambda - i\omega_2)(\Lambda - i(\omega_1 + \omega_2))}, \tag{2.23}$$

а також другий момент,

$$\langle u^2 \rangle = -2 \int_{-\infty}^{0} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{\Lambda(t_1 + t_2)} P_2 \approx$$

$$\approx -\frac{1}{\Lambda^2} + 3\int d\omega K_\omega \frac{1}{\Lambda^2 i\omega(\Lambda - i\omega)} - \int\int d\omega_1 d\omega_2 K_{\omega_1} K_{\omega_2} \times$$
$$\times \frac{-56\Lambda^3 + 68i\Lambda^2(\omega_1+\omega_2) + 18\Lambda(\omega_1^2 + 3\omega_1\omega_2 + \omega_2^2) - 9i\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)}{2\Lambda^2\omega_1\omega_2(\Lambda - i\omega_1)(\Lambda - i\omega_2)(2\Lambda - i\omega_1)(2\Lambda - i\omega_2)(\Lambda - i(\omega_1+\omega_2))}, \quad (2.24)$$

і третій,

$$\langle u^3 \rangle = 6i \int\limits_{-\infty}^{0} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int\limits_{-\infty}^{t_2} dt_3 e^{\Lambda(t_1+t_2+t_3)} P_3 \approx$$
$$\approx \frac{i}{\Lambda^3} - 6\int d\omega K_\omega \frac{1}{\Lambda^3\omega(\Lambda - i\omega)} + \int\int \big[d\omega_1 d\omega_2 K_{\omega_1} K_{\omega_2} \times$$
$$\times \Big(\frac{-100i\Lambda^3 - 130\Lambda^2(\omega_1+\omega_2)}{\Lambda^3\omega_1\omega_2(\Lambda - i\omega_1)(\Lambda - i\omega_2)(2\Lambda - i\omega_1)(2\Lambda - i\omega_2)(\Lambda - i(\omega_1+\omega_2))} +$$
$$+ \frac{3i\Lambda(12\omega_1^2 + 35\omega_1\omega_2 + 12\omega_2^2) + 18\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)}{\Lambda^3\omega_1\omega_2(\Lambda - i\omega_1)(\Lambda - i\omega_2)(2\Lambda - i\omega_1)(2\Lambda - i\omega_2)(\Lambda - i(\omega_1+\omega_2))} \Big) \big]. \quad (2.25)$$

Окрім моментів, для аналізу експериментів мають значення також кумулянти координати. Так, для другого кумулянта маємо:

$$\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2 = \int d\omega K_\omega \frac{1}{\Lambda^2(\Lambda^2 + \omega^2)} +$$
$$+ \int\int \frac{d\omega_1 d\omega_2 K_{\omega_1} K_{\omega_2}}{2\Lambda^4\omega_1\omega_2(\Lambda - i\omega_1)(\Lambda - i\omega_2)(2\Lambda - i\omega_1)(2\Lambda - i\omega_2)(\Lambda - i(\omega_1+\omega_2))} \times$$
$$\times (40\Lambda^5 - 52i\Lambda^4(\omega_1+\omega_2) - 2\Lambda^3(7\omega_1^2 + 17\omega_1\omega_2 + 7\omega_2^2) -$$
$$-5i\Lambda^2\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2) - 2\Lambda\omega_1\omega_2(2\omega_1^2 + 5\omega_1\omega_2 + 2\omega_2^2) + 2i\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1+\omega_2)), \quad (2.26)$$

і для третього:

$$\langle u^3 \rangle - 3\langle u \rangle \langle u^2 \rangle + 2\langle u \rangle^3 =$$
$$= -\int\int \frac{d\omega_1 d\omega_2 K_{\omega_1} K_{\omega_2}}{2\Lambda^5\omega_1\omega_2(\Lambda - i\omega_1)(\Lambda - i\omega_2)(2\Lambda - i\omega_1)(2\Lambda - i\omega_2)(\Lambda - i(\omega_1+\omega_2))} \times$$
$$\times (56i\Lambda^5 + 116\Lambda^4(\omega_1+\omega_2) - 6i\Lambda^3(13\omega_1^2 + 37\omega_1\omega_2 + 13\omega_2^2) -$$
$$-3\Lambda^2(6\omega_1^3 + 49\omega_1^2\omega_2 + 49\omega_1\omega_2^2 + 6\omega_2^3) + 3i\Lambda\omega_1\omega_2(11\omega_1^2 + 26\omega_1\omega_2 + 11\omega_2^2) +$$

$$+12\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1+\omega_2)). \tag{2.27}$$

Ці вирази можна переписати у більш зручній формі, через реальні функції. У наступних виразах інтегрування проводиться у діапазоні від 0 до $+\infty$:

$$\langle u^2\rangle - \langle u\rangle^2 = 2\int d\omega K_\omega \frac{1}{\Lambda^2(\Lambda^2+\omega^2)} - 2\int\int d\omega_1 d\omega_2 K_{\omega_1}K_{\omega_2}\times$$
$$\times\frac{16\Lambda^4+17\Lambda^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+5(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}{\Lambda^2(\Lambda^2+\omega_1^2)(\Lambda^2+\omega_2^2)(\Lambda^2+(\omega_1+\omega_2)^2)(\Lambda^2+(\omega_1-\omega_2)^2)}, \tag{2.28}$$

і для третього кумулянта

$$\langle u^3\rangle - 3\langle u\rangle\langle u^2\rangle + 2\langle u\rangle^3 = 12i\int\int d\omega_1 d\omega_2 K_{\omega_1}K_{\omega_2}\times$$
$$\times\frac{2\Lambda^4+3\Lambda^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}{\Lambda^3(\Lambda^2+\omega_1^2)(\Lambda^2+\omega_2^2)(\Lambda^2+(\omega_1+\omega_2)^2)(\Lambda^2+(\omega_1-\omega_2)^2)}. \tag{2.29}$$

Повернемося до рогляду моментів в термінах функції $\mu(k)$. Для δ-корельованого шуму частоти відгук осцилятора на зовнішню силу як функція відстройки частоти $\delta\omega = \omega_F - \omega_0$ має такий же функціональний вигляд, як і у випадку відсутності шуму. З рівнянь (2.4) і (2.13) маємо

$$\langle u\rangle = (F/4\omega_F)\langle u_F(t)\rangle = -i(F/4\omega_F)(\tilde\Gamma + i\delta\tilde\omega)^{-1},$$
$$\tilde\Gamma = \Gamma + \mathrm{Re}\,\mu(1), \qquad \delta\tilde\omega = \delta\omega + \mathrm{Im}\,\mu(1). \tag{2.30}$$

Шум призводить до розширення спектру відгуку і, як правило, до зміщення частоти осцилятора. І розширення, і зсув частоти визначаються значенням функції μ для $k=1$. Зокрема, для квазібілого шуму приріст напівширини задається інтенсивністю шуму D, що є добре відомим результатом, тоді як для пуассонівського шуму цей приріст становить $\nu(1-\cos g)$, це значення осцилює із збільшенням g і зростає зі швидкістю імпульсу ν.

З рівняння (2.30) випливає, що за окремо взятим спектром осцилятора не можна визначити, чи присутні взагалі в системі частотні шуми. Однак парний корелятор комплексної амплітуди дозволяє ідентифікувати наявність шуму. Розрахунок дає такий вираз для корелятора:

$$\langle u(t)u(0)\rangle - \langle u\rangle^2 = \langle u\rangle^2 \frac{2\mu(1)-\mu(2)}{2\Lambda+\mu(2)} \exp\left[-(\tilde{\Gamma}+i\delta\tilde{\omega})t\right] \qquad (t>0). \tag{2.31}$$

Наявність шуму призводить до того, що $\langle u^2\rangle \neq \langle u\rangle^2$. З рівняння (2.31), дисперсія комплексної амплітуди $u(t)$ пропорційна $\propto 2\mu(1)-\mu(2)$, і отже визначається нелінійністю функції $\mu(k)$. На практиці, для гауссівського шуму маємо

$$2\mu_G(1) - \mu_G(2) = -2D, \tag{2.32}$$

а для пуассонівського шуму

$$2\mu_P(1) - \mu_P(2) = \nu[1-\exp(ig)]^2. \tag{2.33}$$

Часове затухання парного корелятора величини $\delta u(t) = u(t) - \langle u\rangle$ є експоненційним, з показником експоненти $\Lambda + \mu(1) \equiv \tilde{\Gamma} + i\delta\tilde{\omega}$.

Парний корелятор, що визначається рівнянням (2.31), не тільки дозволяє виявити частотний шум там, де його не можна розпізнати за спектром, але також дає уявлення про статистику шуму.

Більше інформації можна отримати з моментів вищого порядку $u(t)$. Тому маємо

$$u_F^n(0) = n! \int_{-\infty}^{0} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n (-i)^n \times$$
$$\times \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\Lambda t_j + i(n+1-j)\int_{t_j}^{t_{j-1}} dt'_j \xi(t'_j)\right]\right\}, \tag{2.34}$$

тоді отримуємо з рівняння (2.13)

$$\langle u^n \rangle = n! \left(\frac{-iF}{4\omega_F} \right)^n \prod_{j=1}^{n} [j\Lambda + \mu(j)]^{-1} . \tag{2.35}$$

З рівняння (2.35), вимірюючи моменти комплексної амплітуди $u(t)$, можна знайти функцію $\mu(k)$ для всіх цілих чисел k, а отже, враховуючи, що ця функція є аналітичною, принаймні, поблизу осі реальних k, знайти цілі $\mu(k)$ і, отже, повну статистику δ-корельованого шуму $\xi(t)$.

2.2.2. Слабкий шум частоти

Наявність не δ-корельованих частотних шумів можна, як правило, безпосередньо побачити в спектрі відгуку осцилятора, якщо шум достатньо сильний. Наприклад, спектр поглинання може мати особливу структуру або стати асиметричним [55, 56, 68, 69, 71, 72]. Ситуація є більш складною, коли шум є порівняно слабким, так що форма спектра слабко змінюється порівняно з кривою Лоренця. Покажемо, що моменти комплексної амплітуди дозволяють виявляти частотні шуми та вивчати їх статистику навіть у цьому випадку.

Будемо виражати моменти через корелятори частотного шуму. Корелятори найнижчого порядку стаціонарного шуму з нульовим середным значенням визначаються такими виразами:

$$\begin{aligned} \Xi_2(\omega) &= (2\pi)^{-1} \int dt e^{i\omega t} \langle \xi(t)\xi(0) \rangle, \\ \Xi_3(\omega_1, \omega_2) &= (2\pi)^{-2} \int dt_1 dt_2 e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} \langle \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(0) \rangle. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Оскільки значення $\xi(t_i)$ для різних t_i комутують одне з одним, маємо:

$$\Xi_2(\omega) = \Xi_2(-\omega), \qquad \Xi_3(\omega_1, \omega_2) = \Xi_3(\omega_2, \omega_1)$$

$$\Xi_3(-\omega_1-\omega_2,\omega_2)=\Xi_3(\omega_1,-\omega_1-\omega_2). \tag{2.37}$$

Розкладаючи рівняння (2.4) для u_F до третього порядку за $\xi(t)$, отримуємо

$$\frac{\langle u\rangle}{\langle u\rangle^{(0)}}\approx 1-\int\frac{d\omega}{\Lambda^2+\omega^2}\Xi_2(\omega)-i\int d\omega_1\,d\omega_2\Xi_3^{(\Lambda)}(\omega_1,\omega_2)\times$$
$$\times\Lambda\left(3\Lambda^2+\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2\right)/3, \tag{2.38}$$

де $\langle u\rangle^{(0)}=-iF/(4\omega_F\Lambda)$ представляє собою комплексну амплітуду, що описує змушені коливання за відсутності шуму частоти, а

$$\Xi_3^{(\Lambda)}(\omega_1,\omega_2)=\frac{\Xi_3(\omega_1,\omega_2)}{(\Lambda^2+\omega_1^2)(\Lambda^2+\omega_2^2)[\Lambda^2+(\omega_1+\omega_2)^2]}. \tag{2.39}$$

З рівняння (2.38) ясно, що до 3-го порядку за $\xi(t)$ вплив частотного шуму на спектр відгуку осцилятора можна описати як перенормування коефіцієнту затухання Γ та власної частоти ω_0, і тому за спектроскопічними даними важко сказати, чи наявний слабкий шум частоти взагалі.

Частотний шум можна виявити вимірюванням вищих моментів комплексної амплітуди. Зберігаючи лише корелятори другого або третього порядку $\xi(t)$, отримуємо для дисперсії комплексної амплітуди

$$\frac{\langle u^2\rangle-\langle u\rangle^2}{\langle u\rangle^2}\approx-\int\frac{d\omega}{\Lambda^2+\omega^2}\Xi_2(\omega)-i\int d\omega_1 d\omega_2\Xi_3^{(\Lambda)}(\omega_1,\omega_2)\times$$
$$\times\left[2\Lambda^3+\Lambda(\omega_1^2+\omega_2^2)+i\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)\right]. \tag{2.40}$$

Тут ми використовували властивості симетрії Ξ_2 і Ξ_3, рівняння (2.37); зверніть увагу, що якщо шум $\xi(t)$ має симетрію відносно обернення часу, доданок, пропорційний $\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)$ в інтегралі в рівнянні (2.40), можна не враховувати.

Для слабкого шуму $\xi(t)$ провідний внесок у дисперсію u дає член другого порядку $\propto\Xi_2$. Щоб виявити ненульовий корелятор шуму 3-го порядку, додатково до дисперсії u слід виміряти 3-й кумулянт u,

$$\frac{\langle u^3\rangle - 3\langle u\rangle\langle u^2\rangle + 2\langle u\rangle^3}{\langle u\rangle^3} \approx -i\int d\omega_1 d\omega_2 \Xi_3^{(\Lambda)}(\omega_1,\omega_2)\times$$
$$\times\left[\Lambda^3 + \Lambda(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_1\omega_2) + i\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)\right]. \qquad (2.41)$$

Бачимо, що у випадку слабкого δ-корельованого шуму рівняння (2.30) – (2.35) узгоджуються з рявняннями (2.38) – (2.41). Однак результати цього підрозділу не обмежуються δ-корельованими шумами.

2.2.3. Марківський шум частоти

Аналіз впливу частотного шуму спрощується у випадку, коли шум є марківським. Такий шум може бути неперервним, як у випадку коливань частоти внаслідок дифузії масивних частинок вздовж нанорезонатора [56, 72, 73], або дискретним, як у випадку випадкового прикріплення або відшарування масивних частинок до механічного резонатора [55, 69, 71], або мати міжрівневі переходи нелінійно зв'язаного з коливальною модою захопленого електрона [275]. В обох випадках розподіл ймовірностей $p(\xi,t)$ описується рівнянням $\dot{p}=\hat{W}p$. Оператор $\hat{W}$ не залежить від часу для стаціонарного процесу. Для неперервного процесу $\xi(t)$, $\hat{W}$ є диференціальним оператором відносно ξ: наприклад, для дифузійного процесу $\xi(t)$ рівняння для p є рівнянням Фоккера-Планка [68]. Для дискретного процесу $\hat{W}$ описує переходи між різними дискретними значеннями ξ, з відповідними ймовірностями переходу.

Замість матриці густини ρ_0, яка залежить від реалізації шуму $\xi(t)$, для марківського процесу $\xi(t)$ зручно ввести матрицю густини $\rho(\xi,t)$, яка залишається оператором щодо змінних осцилятора, але також залежить від ξ як змінної. Для неперервного процесу $\xi(t)$ маємо $\rho(\xi,t)=\langle\rho_0(t)\delta\big(\xi-\xi(t)\big)\rangle_\xi$, де $\langle\ldots\rangle_\xi$ означає усереднення за реалізаціями $\xi(t)$. Для дискретного $\xi(t)$ слід використовувати ті самі визначення, але з дельта-символом Кронекера замість δ -функції.

Рівняння для $\rho(\xi, t)$ є очевидним наслідком рівняння (2.9),

$$\dot{\rho} = i[\delta\omega - \xi][a^\dagger a, \rho] - \hat{\Gamma}\rho + \hat{W}\rho + i[F'a^\dagger + F'^* a, \rho], \qquad \rho \equiv \rho(\xi, t). \tag{2.42}$$

У моделі, яку ми обговорюємо, відсутня обернена дія осцилятора на джерело частотного шуму, і тому оператор $\hat{W}$ не залежить від динамічних змінних осцилятора. Тоді можна одразу написати систему рівнянь для моментів $A(n, \xi, t) = \mathrm{Tr}\,[a^n \rho(\xi, t)]$ оператора a, які тепер будуть функціями випадкової величини ξ, а не функціоналами $\xi(t)$,

$$\begin{aligned} \partial_t A(n, \xi, t) = -n[\Lambda^* + i\xi]A(n, \xi, t) + inF'A(n-1, \xi, t) + \hat{W}A(n, \xi, t), \\ \langle a^n(t)\rangle = \int d\xi A(n, \xi, t) \end{aligned} \tag{2.43}$$

(для дискретного шуму інтеграл за $d\xi$ слід замінити сумою).

Для $n = 1$ стаціонарний розв'язок рівняння (2.43) обговорювався раніше для кількох моделей частотних шумів [71, 72]. Як функція відстройки частоти $\delta\omega$, середнє значення $\langle a\rangle$ дає спектр відгуку осцилятора на резонансну змушуючу силу. Як уже згадувалося вище, у випадках, коли шум $\xi(t)$ є сильним порівняно з Γ (але все ще слабким порівняно з ω_0), це може суттєво змінити спектр порівняно з випадком $\xi = 0$, що дає можливість виявити наявність шуму та знайти деякі його характеристики.

Вивчаючи моменти комплексної координати $\langle a^n\rangle$, можна отримати набагато більше інформації про частотний шум, ніж просто зі спектру. Зазначимо, що функції $A(n, \xi, t)$ у стаціонарному режимі можна сприймати як «часткові моменти» осцилятора для даної власної частоти $\omega_0 + \xi$. Рівняння (2.43) показує, що функції $A(n, \xi, t)$ для різних ξ пов'язані оператором $\hat{W}$. Це прямий аналог ефекту інтерференції часткових спектрів осцилятора, що вивчався у роботах [71, 271].

Ми розглянемо як приклад моменти $\langle a^n\rangle$ для телеграфного шуму. Цей шум приймає два значення ξ_k $(k = 1, 2)$, між якими він випадково перемикається зі швидкістями W_{12} і W_{21}. Відповідно, у стаціонарному режимі $A(n, \xi) \equiv A(n, \xi, t)$ має дві складові, $A(n, \xi_1)$ і $A(n, \xi_2)$, які можна розглядати як складові вектора $\mathbf{A}(n)$; оператор $\hat{W}$ стає матрицею 2×2, і рівняння (2.43) може бути записано як

$$\hat{M}(n)\mathbf{A}(n) = inF'\mathbf{A}(n-1), \qquad \hat{M}(n) = n(\Lambda^* + i\bar{\xi})\hat{I} + in\xi_c\hat{\sigma}_z + \hat{W}, \tag{2.44}$$

де $\hat{I}$ і $\hat{\sigma}_z$ — одинична матриця і матриця Паулі відповідно, а

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} W_{12} & -W_{21} \\ -W_{12} & W_{21} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\xi} = (\xi_1 + \xi_2)/2; \tag{2.45}$$

$\xi_c = (\xi_1 - \xi_2)/2$ є амплітудою частотного шуму.

Рівняння (2.44) має простий розв'язок

$$\mathbf{A}(n) = (iF')^n \prod_{k=n}^{1} \hat{M}^{-1}(k)\mathbf{A}(0), \tag{2.46}$$

де $\mathbf{A}(0) = (W_{21}/W, W_{12}/W)$, а $W = W_{12} + W_{21}$ є сумарна швидкість переключення.

Для амплітуди шуму $|\xi_c| \gg W, \Gamma$ спектр поглинання осцилятора, який задається виразом Im $[A(1, \xi_1) + A(1, \xi_2)]$, має два чіткі піки. З іншого боку, для $|\xi_c| \lesssim \max \Gamma, W$ піки не розділяються, а спектр має один пік, [68, 276], що ускладнює ідентифікацію наявності частотного шуму. Моменти комплексної амплітуди вигідні в цьому відношенні, як обговорюється в наступному пункті.

2.2.4. Порівняння різних видів шуму частоти

Тепер ми порівняємо вплив різних видів частотних шумів на моменти комплексної амплітуди. Ми розглядаємо три найпоширеніші види шуму, широкосмуговий гауссівський, пуассонівський та телеграфний шуми; в останньому випадку ми вибрали симетричний шум з $W_{12} = W_{21}$ і $\xi_2 = -\xi_1$. На рис. 2.1 показана залежність другого моменту комплексної амплітуди, нормованого на квадрат середньої амплітуди, від частоти змушуючої сили. Його отримано з рівнянь (2.35) та (2.46). Якщо шум частоти відсутній, ми маємо $\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2 = 1$. За наявності шуму відношення $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ може бути меншим або більшим за 1. Як видно з рис. 2.1, це відношення відображає резонансну залежність від частоти поля. Його значення найсильніше відрізняється від 1 поблизу резонансу, де $\omega_F = \omega_0$. Як і слід було очікувати, $1 - |\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ зростає із збільшенням інтенсивності шуму.

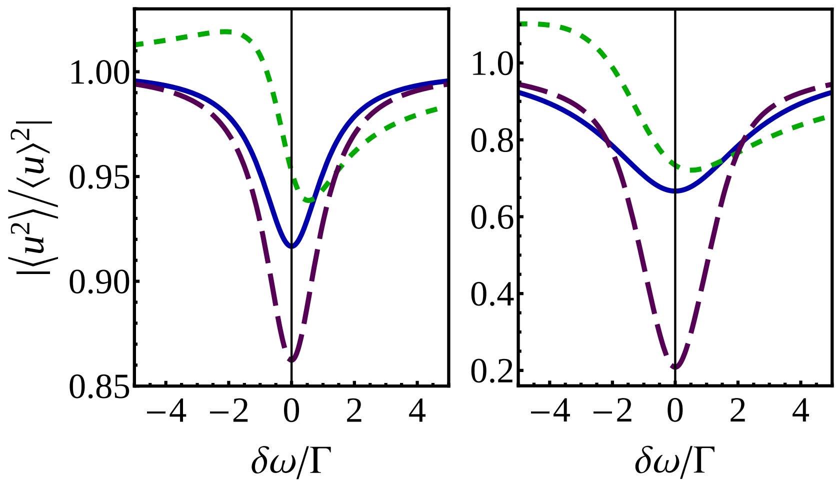

Рис. 2.1. Нормований другий момент комплексної амплітуди змушених коливань u як функція відстройки частоти змушуючої сили $\delta\omega = \omega_F - \omega_0$ для гауссівського (суцільні криві), пуассонівського (пунктирні) та телеграфного (штрихові) шумів. Параметри: $D/\Gamma = 0{,}1$ (ліва панель) та $D/\Gamma = 1$ (права панель), $g = 1$, $\nu g^2/2 = D$, $W_{12} = W_{21} = D$, $\xi_c^2 = 2D^2$.

Для слабкого шуму $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ лінійно змінюється з інтенсивністю шуму, а його відхилення від одиниці,

$$|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2| - 1 \approx \mathrm{Re}\left[(\langle u^2\rangle - \langle u\rangle^2)/\langle u\rangle^2\right] \tag{2.47}$$

задається рівнянням (2.40). З усіх видів шумів, що ми розглянули, тільки для пуассонівського шуму маємо $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2| > 1$. Цікавою особливістю цього шуму є те, що навіть при $\langle\xi(t)\rangle = 0$, тобто коли ω_0 є середньою частотою осцилятора, частота змушуючої сили при якій потужність, що поглинається, є максимальною, тобто, при якій Im u^* максимальна як функція ω_F, визначається з умови $\omega_F - \omega_0 = -\nu(g - \sin g)$, як можна бачити з рівняння (2.30). Цей зсув максимуму спектру поглинання зображено на вставці рис. 2.2, де показана залежність нормованої комплексної амплітуди $\mathrm{Im}\,\langle u_F^*\rangle = (4\omega_F/F)\,\mathrm{Im}\,\langle u^*\rangle$ від частоти змушуючої сили для різних видів шуму частоти. Тип ліній і параметри шумів ті ж, що і для основної панелі рисунку.

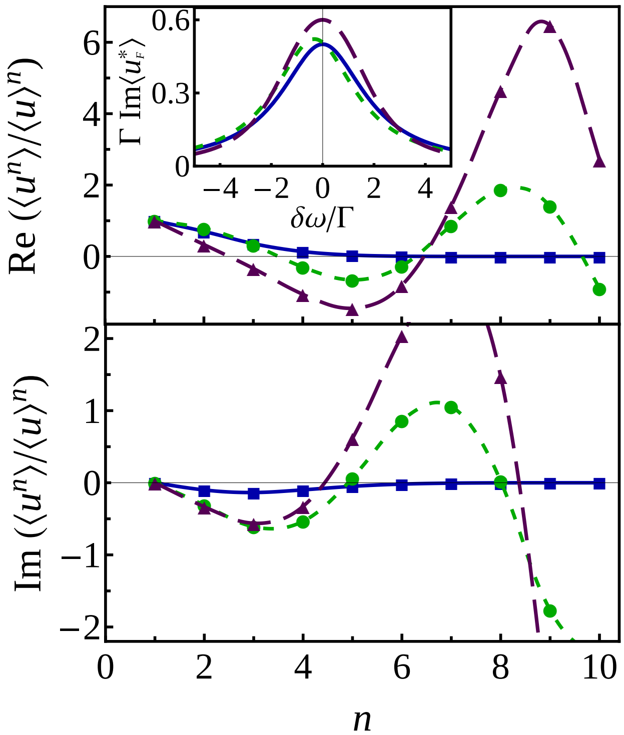

Рис. 2.2. Реальна частина (верхня панель) та уявна частина (нижня панель) нормованих моментів комплексної амплітуди змушених коливань для гауссівського (■), пуассонівського (●) та телеграфного (▲) шумів. Параметри: $\delta\omega/\Gamma = -1$, решта параметрів такі ж як для правої панелі рис. 2.1.

Рисунки 2.2 та 2.3 показують моменти вищого порядку комплексної амплітуди для двох значень відстройки частоти, $\delta\omega/\Gamma = -1$ і для точного резонансу, $\delta\omega = 0$. Спектри поглинання осцилятора для вибраних параметрів показані на вставках. Для гауссівського та пуассонівського частотних шумів ці спектри є лоренцевськими, і тому про наявність шуму не можна зробити висновок із спектру. Для телеграфного шуму спектр не є лоренцевським, але виявляється близьким до лоренцевської кривої, навіть незважаючи на те, що ширина спектрального піку збільшена майже удвічі в цьому випадку. У той же час моменти комплексної амплітуди однозначно демонструють наявність шуму.

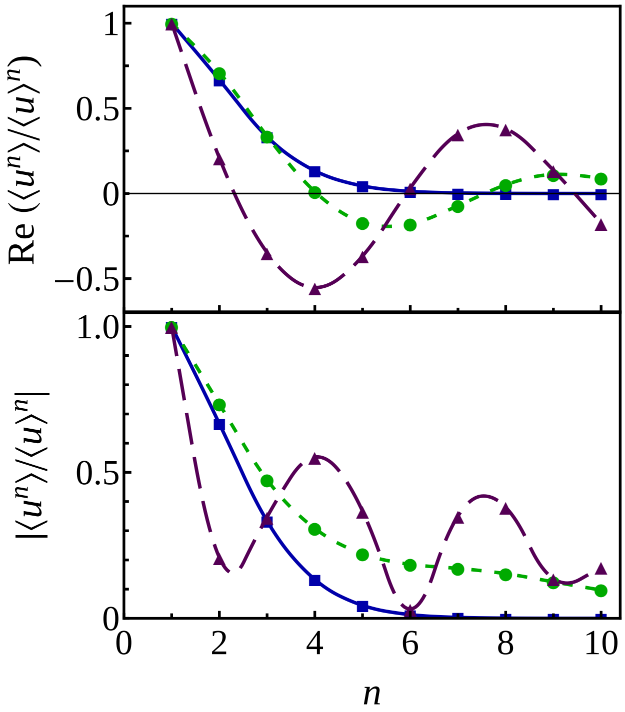

Рис. 2.3. Дійсна частина (верхня панель) та абсолютне значення нормованих моментів комплексної амплітуди змушених коливань при резонансі (нижня панель). Параметри: $\delta\omega = 0$, решта параметрів такі ж, як на рис. 2.2.

Залежність нормованих моментів від його порядку є немонотонною, що є дуже специфічним і помітно відрізняє різні типи шумів. Це видно як в реальній, так і в уявній частинах моментів, а також в їх абсолютних значеннях. На рис. 2.3 не показані уявні частини моментів в умовах точного резонансу, оскільки вони в цьому випадку приймають малі значення. Також видно, що для гауссівського шуму моменти зменшуються швидше, ніж для інших шумів, які вивчаються, як і слід було очікувати з рівняння (2.35).

Зауважимо, що вимірювання моментів і кореляторів комплексної амплітуди можуть бути здійснені за допомогою стандартного гомодинного детектування, в якому квадратури зміщення осцилятора реєструються як функція часу [270, 277]. Можна вважати таке вимірювання нелінійним, оскільки моменти пропорційні відповідним степеням амплітуди змушуючої сили; однак, як зазначалося вище, відгук гармонічного осцилятора залишається лінійним.

2.2.5. Вплив нелінійності на старші моменти координати осцилятора

Оскільки в багатьох реальних експериментах режим нелінійності наступає при вже невеликих амплітудах, важливим є аналіз внеску нелінійності в старші моменти координати. Розглянемо осцилятор у таких же наближеннях, як і у попередніх пунктах, але вже з урахуванням нелінійного доданку,

$$H = \hbar\omega_0 a^+ a - (a + a^+)F\cos\omega_F t + \alpha a^+ a a^+ a. \tag{2.48}$$

Слід зазначити, що нелінійний доданок до гамільтоніану вибраний пропорційним четвертому порядку операторів квантового осцилятора, оскільки непарні ступені операторів осцилятора дадуть нульовий внесок після усереднення по швидким осциляціям.

Для отримання виразів для старших моментів комплексної координати осцилятора знову використовується квантове кінетичне рівняння, що описує еволюцію матриці густини

$$\dot{\rho} = i\delta\omega\big[a^+ a, \rho\big] - \hat{\Gamma}\rho + iF\big[a^+ + a, \rho\big] - i\alpha\big[a^+ a a^+ a, \rho\big], \tag{2.49}$$

у якому останній доданок відповідає нелінійній поправці.

Для визначення старших моментів $\overline{a^n} = \mathrm{Tr}(\rho a^n)$ домножаємо квантове кінетичне рівняння зліва на a^n, після чого розраховуємо слід від кожного з доданків. Для цього користуємося комутаційними співвідношеннями для бозе-операторів $[a^n, a] = na^{n-1}$ і $[a, a^+] = 1$, а також виконуємо циклічні перестановки операторів під оператором сліда. В результаті отримуємо рівняння для a^n:

$$\frac{d}{dt}\overline{a^n} = i\delta\omega n\overline{a^n} - \Gamma n\overline{a^n} + iFn\overline{a^{n-1}} + i\alpha n(n+2)\overline{a^n} - 2i\alpha n\overline{a^{n+1}a^+}. \tag{2.50}$$

Так як в рівнянні для старших моментів комплексної амплітуди n – го порядку є нелінійні доданки, що пропорційні $\overline{a^{n+1}a^{+}}$, то необхідно записати аналогічні рівняння для $a^{n+1}a^{+}$:

$$\frac{d}{dt}\overline{a^{n+1}a^{+}} = i\delta\omega n\overline{a^{n+1}a^{+}} - \Gamma(n+2)\overline{a^{n+1}a^{+}} + 2\Gamma(n+1)\overline{a^{n}}+ \\ +2\Gamma\overline{n}(n+1)\overline{a^{n}} + iF(n+1)\overline{a^{n}a^{+}} - iF^{*}\overline{a^{n+1}}. \quad (2.51)$$

Слід зауважити, що у даному рівнянні ми знехтували нелінійними доданками, бо після підстановки отриманих виразів у основне рівняння вони матимуть другий порядок малості по α. Таким чином отримано систему диференціальних рівнянь, яка у стаціонарному випадку, $d\overline{a^{n}}/dt = 0$, матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} in\delta\omega\overline{a^{n}} - \Gamma n\overline{a^{n}} + inF\overline{a^{n-1}} + in(n+2)\alpha\overline{a^{n}} - 2in\alpha\overline{a^{n+1}a^{+}} = 0 \\ in\delta\omega\overline{a^{n+1}a^{+}} - \Gamma(n+2)\overline{a^{n+1}a^{+}} + 2(n+1)\Gamma(\overline{n}+1)\overline{a^{n}}+ \\ \qquad +i(n+1)F\overline{a^{n}a^{+}} - iF^{*}\overline{a^{n+1}} = 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Будемо знаходити розв'язки системи диференціальних рівнянь у лінійному наближенні за малим параметром нелінійності коливань осцилятора α,

$$\begin{cases} \overline{a^{n}} \equiv a_{n} = a_{n}^{(0)} + \alpha a_{n}^{(1)} \\ \overline{a^{n}a^{+}} \equiv b_{n} = b_{n}^{(0)} + \alpha b_{n}^{(1)}. \end{cases} \quad (2.53)$$

Користуючись лінійним наближенням, яке було запропоновано вище, отримуємо такі рекурентні співвідношення:

$$\begin{cases} a_{n}^{(0)} = \dfrac{iFa_{n-1}^{(0)}}{\Gamma - i\delta\omega} \\ b_{n+1}^{(0)} = \dfrac{1}{in\delta\omega - \Gamma(n+2)}\big[- i(n+1)Fb_{n}^{(0)} + iFa_{n+1}^{(0)} - \\ \qquad -2(n+1)\Gamma(\overline{n}+1)a_{n}^{(0)}\big], \end{cases} \quad (2.54)$$

а також

$$a_n^1 = \frac{i}{i\delta\omega - \Gamma}\big[2b_{n+1}^{(0)} - (n+2)a_n^{(0)} - Fa_{n-1}^{(0)}\big]. \tag{2.55}$$

Їх можна розв'язати аналітично. При $n = 0$ маємо:

$$b_1^{(0)} = \frac{F^2}{\Gamma^2 + \delta\omega^2} + (\overline{n} + 1). \tag{2.56}$$

Для старших моментів

$$\begin{aligned} b_n^{(0)} = \frac{(iF)^{n-1}(\Gamma - i\delta\omega)^{-n}(F^2 + n(\overline{n}+1)(\Gamma^2 + \delta\omega^2)}{\Gamma + i\delta\omega} = \\ = a_{n-1}^{(0)}\left[\frac{F^2}{\Gamma^2 + \delta\omega^2} + n(\overline{n}+1)\right]. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Тоді із комутаційних співвідношень отримаємо:

$$a_n^{(1)} = -\frac{ina_n^{(0)}}{2(\Gamma - i\delta\omega)}\left[\frac{4F^2}{\Gamma^2 + \delta\omega^2} + (2(n+3)(\overline{n}+1) - (n+5)\right], \tag{2.58}$$

а для старших моменти комплексної амплітуди осцилятора у випадку нелінійних коливань отримаємо такий вигляд:

$$\begin{aligned} \overline{a^n} = a_n^{(0)} + \alpha a_n^{(1)} = \frac{(iF)^n}{(\Gamma - i\delta\omega)^n}\times \\ \times\left[1 - \alpha\frac{in}{2(\Gamma - i\delta\omega)}\Big(\frac{4F^2}{\Gamma^2 + \delta\omega^2} + (2(n+3)(\bar{n}+1) - (n+5))\Big)\right]. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Важливим для експериментів, в яких нелінійний режим може наступити вже при незначних амплітудах, є можливість відрізнити впливи нелінійності та різних частотних шумів на коливання осцилятора. Для цього за отриманими раніше аналітичними виразами для старших моментів комплексної амплітуди були побудовані їх залежності від відстройки частоти. Далі всі криві, що відображають нелінійні коливання, будуть відображені чорними пунктирними кривими, а за наявності частотного шуму — кольоровими (гауссівський шум – синім, пуассонівський шум – зеленим, телеграфний шум – фіолетовим).

Як видно з рис. 2.4, панель а, залежності моменту другого порядку, що відповідають дії частотного шуму, мають різну поведінку для даних параметрів. Тому розрахунок другого моменту дає можливість детектувати частотні шуми навіть при нелінійних коливаннях осцилятора.

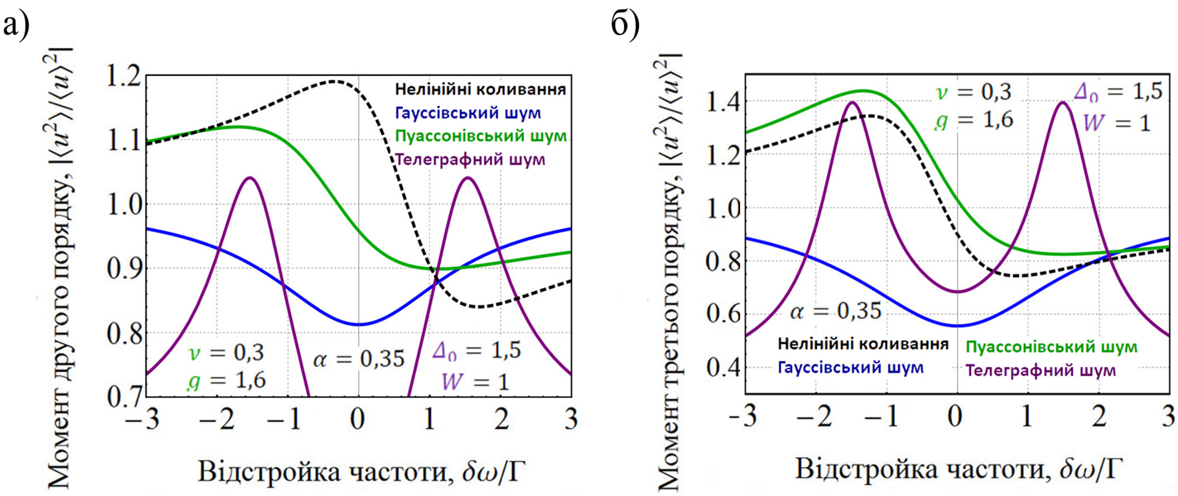

Рис. 2.4. Залежність моменту другого порядку (панель а) і третього моменту комплексної координати осцилятора (панель б) від відстройки частоти при дії шумів частоти і для нелінійних коливань.

Для деяких параметрів коливань, другі моменти комплексної координати у випадку нелінійних коливань та під час дії, наприклад, пуассонівського шуму можуть збігатися. Така ситуація продемонстрована на рис. 2.5. Для вирішення цієї проблеми знову пропонується використання моментів комплексної амплітуди вищих порядків, наприклад, третього, див. рис. 2.4, панель б.

Можна зробити висновок, що якщо для даних параметрів системи значення старшого моменту другого порядку співпадають для випадків дії частотного шуму та нелінійності, то моменти третього, або вищих, порядків будуть відрізнятися, що дозволить детектування шуму. Як видно з рис. 2.6, весь набір старших моментів має суттєво різний вигляд для випадку нелінійності і різних шумів.

Щоб яскравіше показати різницю ефектів нелінійності і частотного шуму, використаємо отриманий раніше вираз (2.59) для старшого моменту комплексної амплітуди для знаходження кумулянтів $\kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2$ і $\kappa_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$.

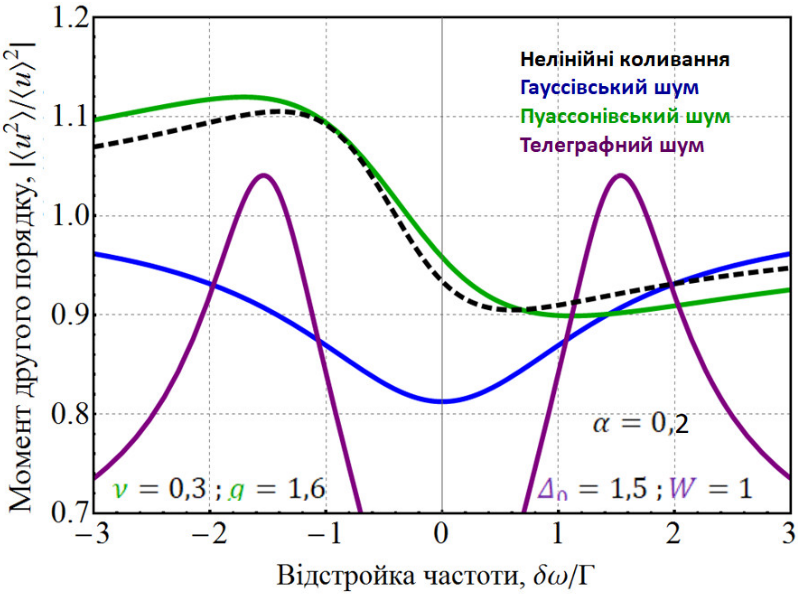

Рис. 2.5. Злиття кривих залежності моменту другого порядку для ефектів пуассонівського шуму і нелінійності від відстройки частоти.

Для кумулянтів другого та третього порядків у випадку дії у системі, наприклад, пуассонівського шуму маємо:

$$\begin{cases} \kappa_2 = \dfrac{\nu(e^{ig}-1)^2}{2\Gamma + \nu(2ig + 1 - e^{2ig})} \\ \kappa_3 = \dfrac{2\nu(e^{ig}-1)^3(\Gamma + \nu(e^{2ig} + ig - 1))}{(2\Gamma + \nu(2ig + 1 - e^{2ig}))(3\Gamma + \nu(3ig + 1 - e^{3ig}))} \end{cases}. \tag{2.60}$$

У випадку нелінійних коливань кумулянт другого порядку визначається формулою:

$$\kappa_2 = \alpha \frac{i}{(\Gamma - i\delta\omega)}(2\overline{n} + 1). \tag{2.61}$$

Кумулянт третього порядку буде пропорційним $\kappa_3 \sim \alpha^2$, тобто у лінійному наближенні він прямуватиме до нуля. Це і даватиме можливість відрізняти частотні шуми та нелінійність. Можна побачити, що всі чотири залежності для другого кумулянта демонструють однакову поведінку в залежності від відстройки частоти, маючи піки поблизу нуля (див. рис. 2.7, панель а).

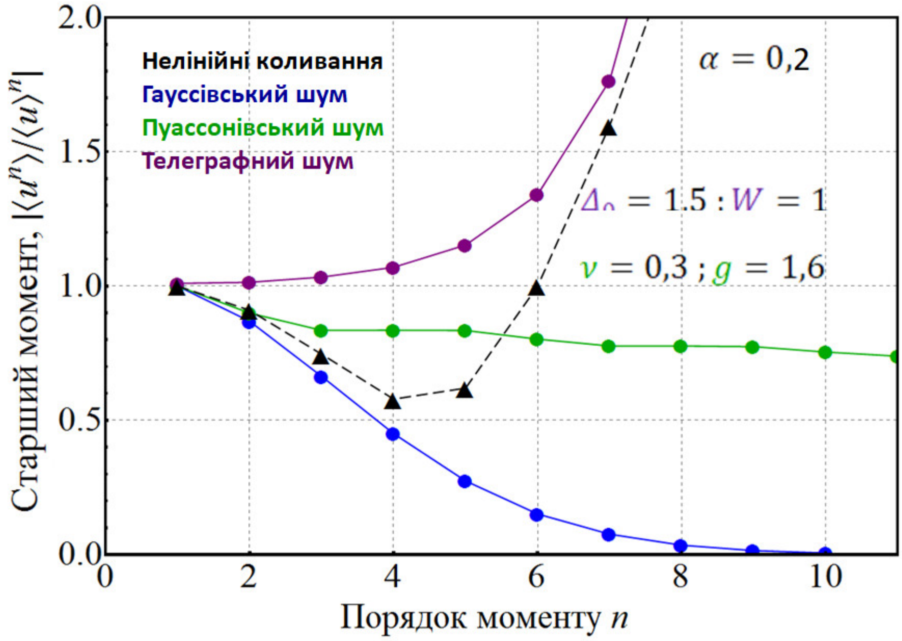

Рис. 2.6. Залежність старших моментів від їх порядку у випадку дії шумів частоти і для нелінійних коливань.

Тому використання кумулянту другого порядку не даватиме можливості розрізняти дію шумів та нелінійності у системі, на відміну від кумулянту третього і більш старших порядків.

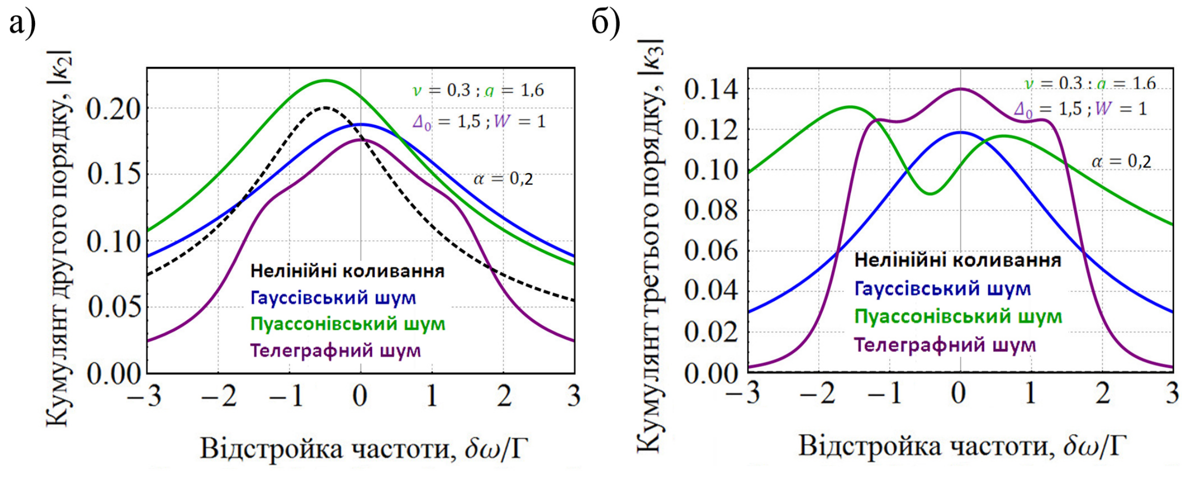

Рис. 2.7. Залежність кумулянту другого (панель а) та третього (панель б) порядку від відстройки частоти у випадку дії шумів частоти і для нелінійних коливань.

На рис. 2.7, панель б, видно, що у випадку нелінійних коливань кумулянт третього порядку практично дорівнює нулю, на відміну від кумулянтів у випадках дії різноманітних шумів. Тому підрахунок кумулянтів третього і вищих порядків дає можливість визначати який саме ефект впливає на коливання осцилятора.

2.3. Телеграфний шум частоти

2.3.1. Основні рівняння для комплексної координати моди

Перейдемо до детальнішого вивчення телеграфного шуму і перевірки запропонованих теоретичних методів в експерименті. Розпочнемо з теоретичного вивчення впливу телеграфного частотного шуму на моменти комплексної координати осцилятора.

Розглядається осцилятор, координату якого позначимо q, власну частоту ω_0. Нас буде цікавити його комплексна координата

$$u = \frac{q - i\dot{q}/\omega_0}{\sqrt{2}}. \tag{2.62}$$

Осцилятор збуджується зовнішньої гармонічною силою амплітуди F (віднесеної до маси осцилятора) і частоти ω_F. Ключовим параметром, що визначає коливання осцилятора, є відстройка частоти $\delta\omega = \omega_F - \omega_0$. Початкова фаза змушуючої сили не суттєва в цій задачі і буде вважатися нульовою (так що F дійсна).

Вважаємо, що чутливість осцилятора досить висока, як це характерно для сучасних нано- і мікроосциляторів, про які йшла мова в огляді літератури. Тоді відстройка частоти $\delta\omega$, константа загасання γ, амплітуда F змушуючої сили а також частотні шуми вважаємо малими в порівнянні з власною частотою. Це дозволяє перейти в систему відліку, що здійснює швидкі осциляції з частотою ω_F, і розглядати задачу в цій системі, нехтуючи осциляціями на подвоєній власній частоті і розглядаючи тільки повільну еволюцію системи на часових проміжках порядку $\delta\omega^{-1}$.

У цій системі функція Гамільтона осцилятора має вигляд

$$H = \Big(-\delta\omega + \xi(t) \Big) |u|^2 + F \Big(u + u^* \Big) + H_i, \tag{2.63}$$

де $\xi(t)$ — досліджуваний частотний шум, а H_i — енергія взаємодії з термостатом, яка і задає загасання коливань осцилятора. Шум $\xi(t)$ ми будемо вважати стаціонарним, так що статистичні властивості координати осцилятора не залежать від часу.

Рівняння руху для координати, яке відповідає функції Гамільтона (2.63), має вигляд

$$\dot{u} = -i \Big(\delta\omega - \xi(t) \Big) u - \gamma u - iF. \tag{2.64}$$

Його розв'язок можна записати у вигляді

$$u = iF \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t_1 \exp \Bigg(-(\gamma + i\delta\omega)(t - t_1) + i \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}\tau \xi(\tau) \Bigg). \tag{2.65}$$

Цей вираз, як і раніше, залежить від випадкового процесу $\xi(t)$, частотного шуму, що діє на осцилятор. Тому наступним кроком є усереднення виразу (2.65) за реалізаціями $\xi(t)$.

При усередненні відокремлюємо в підінтегральному виразі експоненту, що містить $\xi(t)$, усереднюємо її, а потім підставляємо отриманий вираз в інтеграл і отримуємо середнє значення комплексної координати осцилятора. Якщо ж нашим завданням є знаходження моменту k-го порядку координати

$$M_k = \left\langle u^k \right\rangle, \tag{2.66}$$

спочатку необхідно підвести рівняння (2.65) в k-ий степінь, представивши його у вигляді кратного інтеграла, знову зробити усереднення, а потім інтегрування.

Аналогічну процедуру необхідно зробити і для розрахунку кореляційної функції. При усередненні k-го степеня координати інтервали інтегрування $\xi(t)$ можуть перекриватися. Тому, якщо представляти добуток експонент під усередненням у вигляді однієї експоненти, ми отримаємо в її показнику інтеграл із ступінчастою функцією $v(t)$, яка може приймати цілочисельні значення від 0 до k. Питання про усереднення зводиться до усереднення характеристичного функціоналу шуму,

$$\Phi_t[v] = \left[\exp\left\{i\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t_2 v(t_2)\xi(t_2)\right\}\right]. \tag{2.67}$$

Саме він визначає будь-які статистичні властивості не тільки самого шуму, але і комплексної координати осцилятора. Таким чином, знання цього функціоналу для різних типів шумів дозволяє детектувати їх, а також визначати їх параметри.

Телеграфний шум являє собою випадковий процес, який приймає два значення (наприклад, $\pm\Delta$), зміна між якими відбувається в випадкові моменти часу (це означає, що власна частота осцилятора дискретно змінюється між значеннями $\omega_0 - \Delta$ і $\omega_0 + \Delta$). Телеграфний шум є окремим випадком дискретних марківських шумів, про які коротко йшлося у пункті 1.2.3. Для них, як вказувалося, ймовірність випадкової величини прийняти деяке значення в кожен наступний момент часу залежить тільки від її значення в попередній момент, але не залежить від усіх попередніх станів.

Як зазначалося у пункті 2.2.3, для континуального процесу це означає, що умовна ймовірність задовольняє такому диференціальному рівнянню першого порядку:

$$\frac{\partial p(\xi, t|\xi_0 t_0)}{\partial t} = \hat{W} p(\xi, t|\xi_0, t_0), \tag{2.68}$$

де $\hat{W}$ — лінійний оператор, який діє на ξ і характеризує даний марківський шум. У разі телеграфного шуму, який може приймати лише два значення, цей оператор має вигляд (2.45), тут ми перепишемо його в термінах двох параметрів W_0 і α, якими удобно характеризувати шум:

$$\hat{W} = -\frac{1}{2}W_0 \begin{pmatrix} \alpha & -1+\alpha \\ -\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.69}$$

Два параметри, що характеризують його, α і W_0, задають міру незбалансованості і частоту переходів між двома станами. Зауважимо також, що іншим прикладом марківських шумів є випадкова адсорбція/десорбція молекул до поверхні осцилятора.

Для марківських шумів можна написати в загальному випадку диференціальне рівняння першого порядку для знаходження допоміжного характеристичного функціоналу $\Psi_{t,\xi}[v]$, визначеного таким чином:

$$\Psi_{t,\xi}[v] = \left\langle \partial(\xi - \xi(t)) \exp\left\{ i \int_{t_1}^{t} \mathrm{dt}_2\, v(t_2)\xi(t_2) \right\} \right\rangle. \tag{2.70}$$

Воно має вигляд:

$$\frac{\partial \Psi_{t,\xi}[v]}{\partial t} = i\xi v(t)\Psi_{t,\xi}[v] - \hat{W}\hat{\Psi}_{t,\xi}[v]. \tag{2.71}$$

З його допомогою можна визначити функціонал $\Psi_{t,\xi}[v]$, а потім і шуканий функціонал $\Phi_t[v] = \int \mathrm{d}\xi \Psi_{t,\xi}[v]$.

Знаючи характеристичний функціонал, отримуємо основні формули для знаходження моментів:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= iF\tilde{p}(\hat{\Gamma} + \hat{W})^{-1}p, \\ \langle u^2 \rangle &= 2(-iF)^2\tilde{p}\left(2\hat{\Gamma} + \hat{W}\right)^{-1}\left(\hat{\Gamma} + \hat{W}\right)^{-1}p, \\ \langle u^k \rangle &= k!(-iF)^k\tilde{p}\prod_{j=k}^{1}\left(j\hat{\Gamma} + \hat{W}\right)^{-1}p, \end{aligned} \tag{2.72}$$

де $p = (1/2, 1/2), \tilde{p} = (1,1)$ — правий і лівий власні вектори матриці $\hat{W}$, що відповідають нульовому власному числу, а $\hat{\Gamma}$ — діагональна матриця з елементами $\gamma + i\delta\omega \pm i\Delta$. Цей результат узгоджується з формулою (2.46). Для кореляційної функції аналогічно отримаємо:

$$K_t = (\langle u(t)u(0)\rangle = 2\left(-iF\right)^2 \tilde{p}e^{-(\hat{\Gamma}+\hat{W})t}\left(2\hat{\Gamma}+\hat{W}\right)^{-1}\left(\hat{\Gamma}+\hat{W}\right)^{-1}p+$$
$$+\left(-iF\right)^2 \tilde{p}\int_0^t \mathrm{d}t_1 e^{-(\hat{\Gamma}+\hat{W})(t-t_1)}e{-}\hat{W}t_1\left(\hat{\Gamma}+\hat{W}\right)^{-1}p. \tag{2.73}$$

Очевидно, що і коррелятор, і моменти пропорційні відповідним степеням зовнішньої сили, що відображає лінійність відгуку осцилятора. Замість моментів нас будуть цікавити кумулянти комплексної координати осцилятора, віднесені до відповідних степенів середнього значення координати. Саме ці величини, а не самі моменти, звертаються в нуль за відсутності шуму, і тому детектування кумулянтів дозволяє з упевненістю говорити про наявність шумів в системі.

2.3.2. Аналіз другого і третього моментів

Покажемо, що дослідження саме старших моментів необхідно для можливості детектування і визначення характеристик телеграфного частотного шуму. Для збалансованого шуму ($\alpha = 0,5$) з (2.72) отримаємо асимптотичний вираз для уявної частини середнього значення комплексної координати осцилятора, що традиційно використовується для аналізу її як випадкової величини:

$$\mathrm{Im}\langle u\rangle = -\frac{\Delta^2 W_0 F}{W_0^2\delta\omega^2 + (\delta\omega^2-\Delta^2)^2}, \qquad \gamma \ll W_0. \tag{2.74}$$

Видно, що ця залежність відрізняється від стандартної лоренцівської,

$$\mathrm{Im}\langle u\rangle = -\frac{\gamma F}{\gamma^2+\delta\omega^2}, \qquad \Delta = 0, \tag{2.75}$$

характерної для відсутності шуму: на ній є два піки, що відповідають двом частотам. Проте, ці піки зливаються в один, якщо частота стрибків стає більшою, ніж їх амплітуда, $W_0 > \Delta$, приводячи з подальшим зростанням частоти перескоків до так званого звуження спектральної лінії. Крім того, навіть мале тертя призводить до того, що два піки зливаються, а крива, що виходить, добре апроксимується лоренцівською. Це означає, що при отриманні експериментальних даних частотний шум не вдасться відрізнити від звичайного загасання.

На рис. 2.8 наведені результати чисельного розрахунку уявної частини середньої координати для незбалансованого шуму, де при терті всього $\gamma = 0,05W_0$ вже неможливо відрізнити криві від лоренцівських. На вставці наведено спектри координати, тобто Фур'є-перетворення кореляційної функції 2.73, в разі збалансованого шуму. Бачимо, що і по ним визначити наявність шуму досить складно.

Як покажемо нижче, в старших моментах особливості, пов'язані зі стрибками частоти, виявляються більш яскраво. Тому вони більш чутливі до шуму частоти. Другий момент, який визначається виразом (2.72), не дорівнює нулю за відсутності шуму,

$$|\langle u^2 \rangle| = \frac{F^2}{\gamma^2 + \delta\omega^2}, \tag{2.76}$$

що робить складним його детектування. Однак другий кумулянт при цьому дорівнює нулю. При наявності ж шуму він дорівнює:

$$\kappa_2 = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle u \rangle^2} - 1 = -\frac{\Delta^2}{W_0 + \Gamma} \times \frac{2\Delta^2 + (W_0 + \Gamma)(W_0 + 2\Gamma)}{2\Delta^2 + \Gamma(W_0 + 2\Gamma)}, \tag{2.77}$$

де $\Gamma = \gamma + i\delta\omega$. Другий кумулянт, таким чином, дозволяє виявити шум. Його модуль, $|\kappa_2|$, з урахуванням (2.77), у випадку малої амплітуди шуму, $\Delta \ll W_0$

асимптотично дорівнює

$$|\kappa_2| = \frac{\Delta^2}{W_0\sqrt{\left(\gamma + 2\Delta^2/W_0\right)^2 + \delta\omega^2}}. \tag{2.78}$$

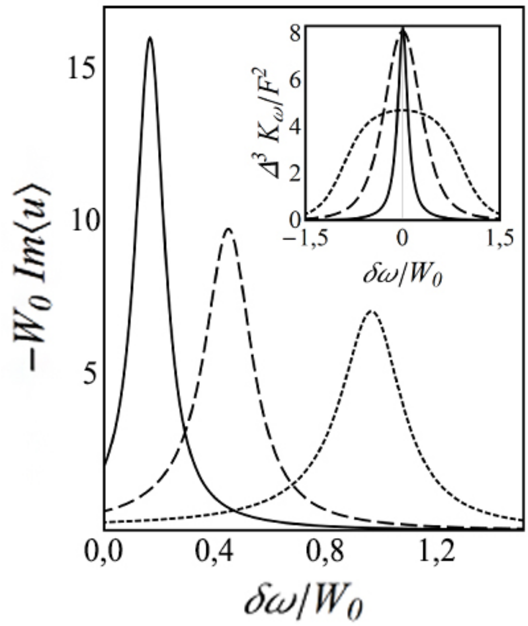

Рис. 2.8. Залежність уявної частини $\mathrm{Im}\langle u\rangle$ середнього значення комплексної координати осцилятора від відстройки частоти $\delta\omega$. Параметри: $\alpha = 0{,}1$, $\Delta/W_0 = 0{,}2$ (суцільна лінія), $0{,}5$ (штрихова лінія) і $1{,}0$ (короткі штрихи).

Цей вираз показує, що шум високої частоти фактично збільшує ширину лінії. Але, на відміну від середнього значення, ненульове значення кумулянта вже говорить про те, що в системі є шум. Ця ситуація відповідає суцільній кривій на рис. 2.9.

Якщо ж амплітуда і частота шуму виявляються одного порядку, другий кумулянт асимптотично по слабкому затуханню y має вигляд:

$$|\kappa_2| = \frac{\Delta^2}{W_0^2 + \delta\omega^2}\sqrt{1 + \frac{4W_0^2(\Delta^2 + \delta\omega^2)}{W_0^2\delta\omega^2 + (\Delta^2 - \delta\omega^2)^2}}. \tag{2.79}$$

Ця ситуація відповідає штриховим кривим на рис. 2.9. Залежно від співвідношення δ і W_0 може спостерігатися і два, і три максимуми, положення і висота

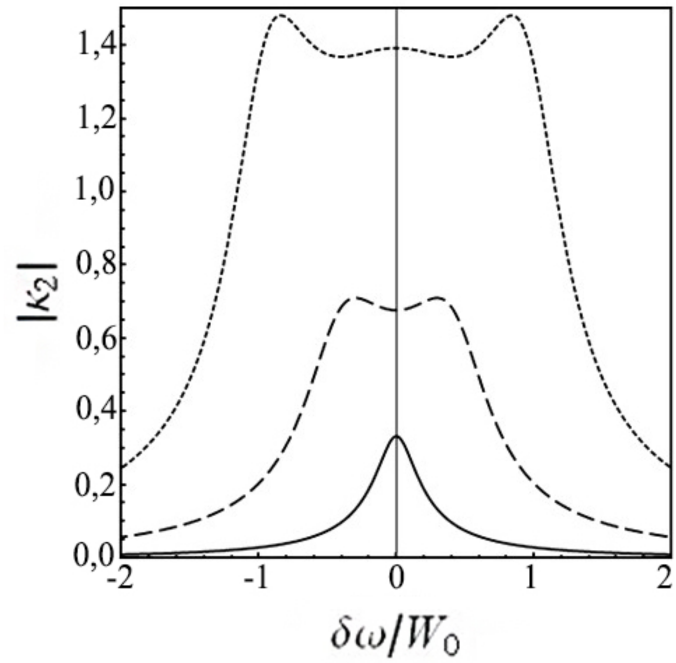

Рис. 2.9. Залежність модуля другого кумулянта $|\kappa_2|$ від відстройки частоти $\delta\omega$ змушуючої сили для збалансованого шуму. Параметри: $\Delta/W_0 = 0{,}2$ (суцільна лінія), $0{,}5$ (штрихова лінія) і 1 (короткі штрихи), $\gamma = 0{,}05W_0$

яких дозволяє визначити характеристики шуму.

Частота осцилятора в розглянутому випадку збалансованого шуму з однаковою ймовірністю приймає значення $\omega_0 \pm \Delta$. У той же час цікавим є і інший випадок, коли частота відхиляється від одного зі своїх значень з малою ймовірністю. Така ситуація відповідає малому α. В цьому випадку з формули (2.72) асимптотично отримуємо:

$$|\kappa_2| = \frac{4\Delta^2 W_0 \alpha}{(W_0^2 + 4(\delta\omega + \Delta)^2)\sqrt{\gamma^2 + (\delta\omega - \Delta)^2}}. \tag{2.80}$$

Результати чисельного розрахунку другого кумулянта в цій ситуації наведені на рис. 2.10 і рис. 2.11. Як випливає з (2.80), ширина правого піку на рис. 2.10, що відповідає $\delta\omega = \Delta$, визначається γ і практично не залежить від шуму.

Висота цього піку, як і ширина, при досить малих амплітудах шуму практично перестає змінюватися при зміні Δ/W_0. Це видно на рис. 2.11, де тоном сірого показаний модуль другого кумулянта, світліші ділянки відповідають

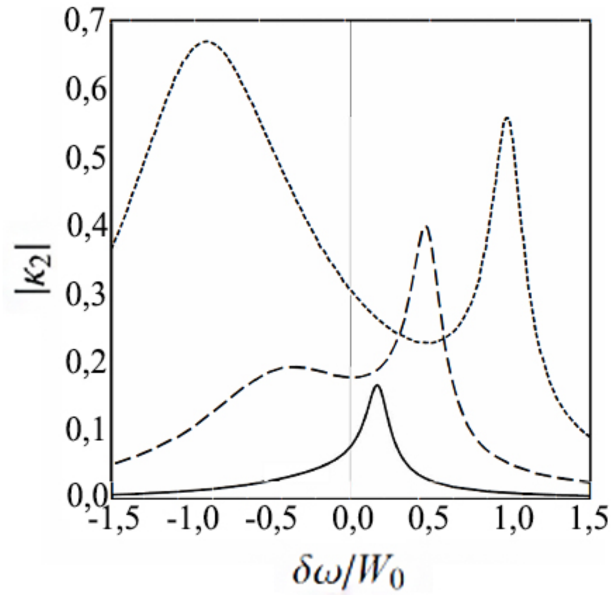

Рис. 2.10. Залежність модуля другого кумулянта $|\kappa_2|$ від відстройки частоти змушуючої сили для незбалансованого шуму з $\alpha = 0{,}1$. Параметри такі ж, як для рис. 2.8

великим значенням $|\kappa_2|$. Світла лінія в правій половині діаграми відповідає цьому максимуму. Її ширина і тон не змінюються при зміні співвідношення між амплітудою і частотою шуму. Лівий пік на рис. 2.10 при зміні параметрів шуму змінює свою висоту і ширину, за що відповідає перший резонансний множник в (2.80). На рис. 2.11 він відповідає розширенню світлої частини в лівій половині діаграми. Таким чином, поведінка двох піків різна, що також дозволяє судити про параметри шуму.

Зауважимо також, що другий кумулянт може відрізнятися від нуля в результаті не тільки дії шумів частоти, а й переходу в нелінійний режим, як було розглянуто у попередньому пункті. Наприклад, для нелінійної поправки $\delta H = \beta|u|^4$ до функції Гамільтона (2.63) другий кумулянт дорівнює

$$|\kappa_2| = \frac{2\delta\omega\beta F^2}{\gamma(\gamma + i\delta\omega)(2\gamma + i\delta\omega)(3\gamma + i\delta\omega)}. \tag{2.81}$$

Виділити його внесок можна за характерною залежністю від частоти (або варіюючи амплітуду змушуючої сили).

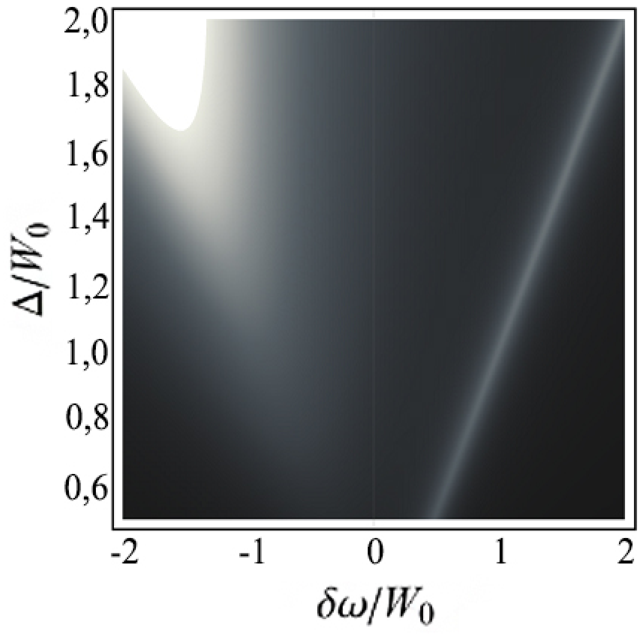

Рис. 2.11. Діаграма значень модуля другого кумулянта $|\kappa_2|$ (тон сірого) для різних значень відстройки частоти $\delta\omega$ змушуючої сили і співвідношення амплітуди і частоти незбалансованого шуму з $\alpha = 0{,}1$. Параметри такі ж, як для рис. 2.8.

Використання старших моментів дозволяє легше розрізняти частотний шум на фоні загасання. На рис. 2.12 наведені криві залежності модуля третього кумулянта від відстройки частоти. На цих кривих ще більше піків, вони стають ще більш помітними при тому ж коефіцієнті затухання. Аналогічно формулі (2.80), для третього кумулянта асимптотично справедливо:

$$|\kappa_2| = \frac{96\Delta^4\alpha}{\left(W_0^2 + 9(\delta\omega+\Delta)^2\right)^{3/2}\sqrt{\gamma^2+(\delta\omega-\Delta)^2}}. \tag{2.82}$$

Ширина і висота правого піку залежать від загасання, а лівого — від параметрів шуму. Звичайно, з ростом α і правий пік починає залежати від шуму, але відмінність характеру поведінки для двох піків в різних діапазонах параметрів може бути використана для визначення окремо коефіцієнта загасання і параметрів шуму.

Зауважимо також, що крім модуля кумулянта доцільно досліджувати і його дійсну або уявну частини. На рис. 2.13 показані для тих же параметрів залежності

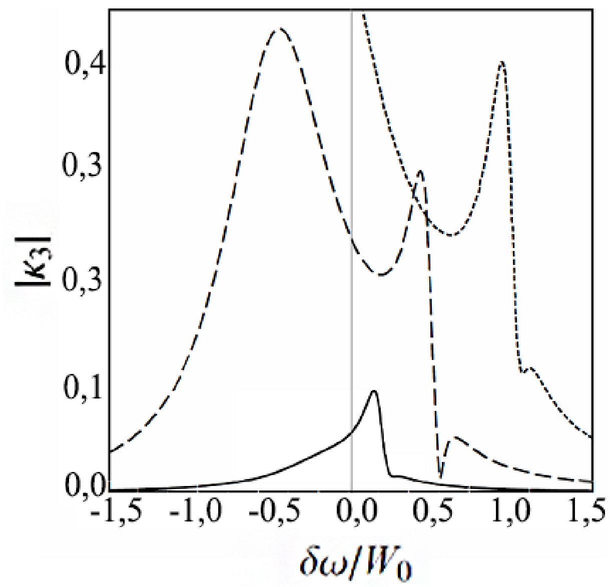

Рис. 2.12. Залежність модуля третього кумулянта $|\kappa_3|$ від відстройки частоти $\delta\omega$ змушуючої сили для незбалансованого шуму. Параметр $\alpha = 0{,}1$, решта параметрів такі ж, як для рис. 2.8.

уявної частини третього кумулянту від відстройки частоти. Видно, що криві ще більше різняться для різних параметрів частотного шуму.

2.3.3. Схема експерименту з мікромеханічним торсіонним осцилятором

Перейдемо до аналізу експериментів, які демонструють можливість виявлення шуму власної частоти осцилятора, коли частотний шум є телеграфним. Використовуючи резонансно керований мікромеханічний осцилятор, покажемо, що усереднений за часом амплітудний вібраційний спектр має два піки.

Вони зливаються зі зростаючою швидкістю перемикання частоти, про що йшлося у попередньому пункті, і спектр зазнає аналог ефекту динамічного звуження. Також показано, що моменти комплексної амплітуди сильно залежать від характеристик частотних шумів. Ця залежність залишається справедливою навіть тоді, коли присутній сильний тепловий шум або шум детектора.

Експеримент проводився з мікромеханічним крутильним осцилятором. Коли

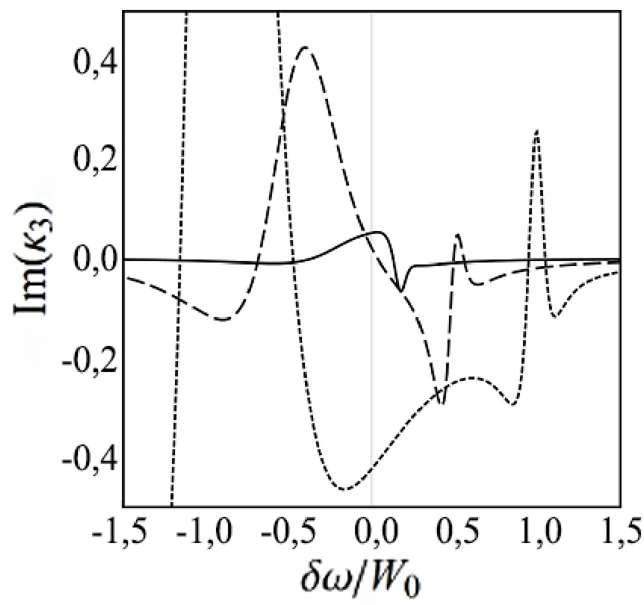

Рис. 2.13. Залежність уявної частини третього кумулянта $\mathrm{Im}(\kappa_3)$ від відстройки частоти $\delta\omega$ змушуючої сили для незбалансованого шуму. Параметр $\alpha = 0{,}1$, решта параметрів такі ж, як для рис. 2.8

осцилятор зазнає дію телеграфного частотного шуму (ТШЧ), його частота випадково перескакує між двома значеннями, $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta/2$. Різниця між двома частотами Δ і швидкість стрибка W вибираються набагато меншими, ніж власна частота. Ми реєструємо комплексну амплітуду коливань u у відповідь на синусоїдальну змушуючу силу. Коли Δ більша за константу загасання Γ, амплітудний спектр $|\langle u\rangle|$ складається з двох чітких піків для малого W ($\langle\ldots\rangle$ означає усереднене за часом значення). Зі збільшенням W два піки зливаються в один пік, демонструючи спектральне розширення з наступним звуженням аналогічно динамічному звуженню [278, 279]. Для $\Delta \sim \max\,(\Gamma, W)$ розширення невелике, що ускладнює ідентифікацію існування частотних шумів виключно за звичайним спектром відгуку на періодичне збудження. Ми демонструємо, що відхилення вищих моментів комплексної амплітуди $\langle u^n\rangle$ від степенів усередненої комплексної амплітуди $\langle u\rangle^n$ однозначно вказує на наявність частотних шумів. Форми спектрів $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ і $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$ сильно залежать від W і ТШЧ, добре узгоджуючись з теорією. Важливо, що цей метод вивчення характеристик частотного шуму залишається дійсним навіть за наявності сильного теплового або детекторного шуму, коли звичайні схеми не виявляють існування частотного шуму. Це не вимагає приведення осцилятора до великих коливальних амплітуд, і таким чином уникаються проблеми, пов'язані з нелінійністю осцилятора.

Торсіонний осцилятор у цьому експерименті складається з високолегованої полікристалічної кремнієвої пластини з розмірами 200 мкм $\times$ 200 мкм $\times$ 3,5 мкм, підвішеної двома крутильними стрижнями (36 мкм $\times$ 4 мкм $\times$ 2 мкм в середині протилежних сторін (див. рис. 2.14, панель а). Два електроди розташовані під пластиною, по одному з кожного боку торсіонних стрижнів. Щілина між верхньою пластиною та електродами створюється шляхом травлення 2 мкм шару оксиду кремнію.

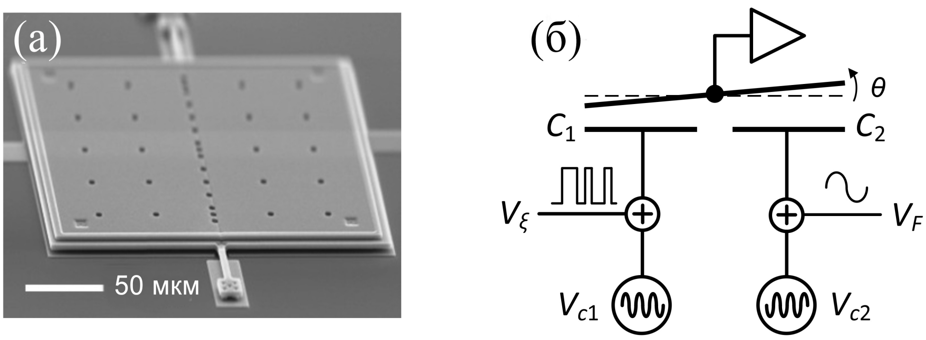

Рис. 2.14. Скануюча електронна мікрофотографія мікромеханічного крутильного осцилятора (панель а) та схема поперечного перерізу пристрою і вимірювальної установки (панель б)

Кут повороту θ пластини знаходиться шляхом вимірювання різниці ємностей [130], C_1 і C_2 між верхньою пластиною і двома нижніми електродами (рис. 2.14, панель б). Два сигнали змінної напруги із зсувом фаз 180° (V_{c1} і V_{c2}) на частоті ω_{carrier} (зазвичай $2{,}5 \times 10^7$ рад/с $\gg \omega_0$) прикладаються відповідно до двох нижніх електродів. При відхиленні пластини C_1 збільшується, а C_2 зменшується. Для малих обертань амплітуда змінної напруги на частоті ω_{carrier} на верхній пластині пропорційна $C_1 - C_2$, яка, в свою чергу, пропорційна θ. Підсилювач на частоті ω_{carrier} вимірює напругу змінного струму на верхній пластині, отримуючи сигнал, пропорційний $\theta(t)$. Всі вимірювання виконувалися при температурі 77 K і тиску $< 10^{-5}$ Торр.

Рівняння руху верхньої пластини задається рівнянням

$$\ddot{\theta} + 2\Gamma\dot{\theta} + [\omega_0 + \xi(t)]^2\theta = F\cos(\omega_F t) + f_{\text{th}}(t). \tag{2.83}$$

Доданок $F\cos(\omega_F t)$ являє собою періодичний електростатичний момент, що генерується синусоїдальною напругою V_F (амплітуда 100 мкВ) додатково до постійної напруги ($-0{,}1$ В), прикладеної до електроду справа. Значення ω_F вибрано так, щоб бути близьким до власної частоти $\omega_0 = 134\,024{,}383$ рад/с за відсутності частотних шумів $\xi(t)$. Значення F залишалося малим, так що коливання залишалися лінійними. Параметр $\Gamma = 0{,}35$ рад/с — константа загасання, а f_{th} — тепловий шум. Для вимірювання амплітуди коливань сигнал з виходу першого блокувального підсилювача (пропорційний $\theta(t)$, як описано раніше) подається на другий блокуючий підсилювач. Вихідні сигнали другого блокувального підсилювача *X(t)* та *Y(t)* дають амплітуду коливань у фазі та протифазі з періодичним рушійним моментом відповідно.

Зміни резонансної частоти $\xi(t)$ ($\ll \omega_0$) викликаються напругою V_ξ (рис. 2.15, панель а), прикладеною до лівого електрода, ефектом пом'якшення жорсткості, пов'язаним з градієнтом електростатичної сили. На рисунку 2.15, панель б, показана амплітуда коливань як функція $\delta\omega = \omega_F - \omega_0$. Синя та червона криві отримані, коли ξ залишається незмінним у часі, при значеннях $\pm\Delta/2$, де $\Delta = 1{,}665$ рад/с, що відповідає напрузі постійного струму $V_1 = 0$ В і $V_2 = -28$ мВ відповідно, прикладеної до лівого електрода.

Далі ми замінюємо постійні напруги сигналом напруги, який відповідає телеграфному шуму, що перемикається між двома напругами V_1 та V_2, так що власна частота осцилятора випадково стрибає між двома значеннями $\omega_0 \pm \Delta/2$.

Сигнал напруги телеграфного шуму генерується тригером *J-K*, викликаним гауссівським шумом, який створюється посиленням шуму Джонсона резистора 50 Ом. Перемикання тригера відбувається, коли гауссівський шум перевищує поріг. Тому швидкість перемикання *W* регулюється інтенсивністю гауссівського шуму.

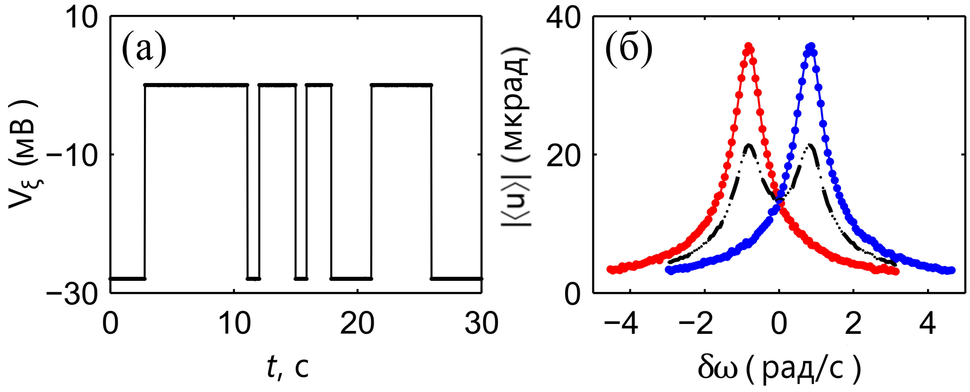

Рис. 2.15. Типова напруга телеграфного шуму, яка подається на лівий електрод (панель а) та амплітудні спектри осцилятора $|\langle u\rangle|$ із зсувами власної частоти $\xi = \pm\Delta/2$ (панель б).

Для всіх вимірювань, представлених тут, значення W вибирається як мінімум у 296 разів меншим, ніж власна частота. Перевірено, що часові інтервали між переключенням тригера є випадковими і підпорядковуються статистиці Пуассона. Також використовується фільтр RC для збільшення часу наростання ступенів напруги до $\tau = 0{,}011$ мс $(1/\omega_0 < \tau \ll 1/W)$.

При аналізі зручно знову розглядати рух осцилятора в системі, що осцилює, і ввести комплексну амплітуду коливань $u = X + iY$, яка задається рівняннями:

$$\theta(t) = u\exp(i\omega_F t) + u^*\exp(-i\omega_F t),$$
$$\frac{d\theta(t)}{dt} = i\omega_F[u\exp(i\omega_F t) - u^*\exp(-i\omega_F t)]. \tag{2.84}$$

В експерименті $X(t)$ і $Y(t)$ — це амплітуди коливань, які знаходяться у фазі та протифазі з періодичним змушуючим моментом відповідно, вимірювані другим підсилювачем. Вплив різних типів частотних шумів на усереднене за часом значення $|\langle u\rangle|$ та вищі моменти $|\langle u^n\rangle|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ було докладно описано в підрозділі 2.2, а загальні рівняння для телеграфного шуму роглянуті у пункті 2.2.3. Тут ми застосовуємо цю теорію до частотного шуму, що використовується в експерименті, врівноваженого шуму з параметром $W = 2W_{12} = 2W_{21}$. Значення $|\langle u^n\rangle|$ можна отримати з рівняння (2.46).

За відсутності частотних шумів, $|\langle u \rangle|$ є квадратним коренем з функції Лоренця (див. рис. 2.15, панель б). Коли на осцилятор діє ТШЧ, найбільш інтуїтивним є випадок $W/\Delta \ll 1$, де або інтервал між двома частотами великий, або швидкість перемикання мала. В цьому випадку осцилятор тримається в одному з двох станів коливань з чітко визначеними амплітудами та фазами між послідовними змінами частоти. Очікується, що амплітудний спектр є зваженою сумою двох незалежних амплітудних спектрів, при цьому ваги пропорційні ймовірностям зайнятості двох станів (обидві вони становлять $1/2$ для використовуваного тут телеграфного шуму). На рис. 2.15, панель б, штрих-пунктирна крива є середнім значенням червоної та синьої кривих. Оскільки $\Delta \sim 4{,}8\Gamma$, два піки можна чітко виділити. Зі збільшенням W/Δ спектр $|\langle u \rangle|$ еволюціонує нетривіально.

2.3.4. Результати вимірювання моментів комплексної координати

Рисунок 2.16, панель а, показує результати вимірювання $|\langle u \rangle|$ як функції частоти зовнішньої сили ω_F, коли осцилятор знаходиться під дією ТШЧ з фіксованою Δ, але з різними швидкостями перемикання W. Час вимірювання для кожної частоти вибирається достатньо довгим (включаючи понад 300 перемикань), щоб точно визначити усереднені за часом значення u.

При $W/\Delta = 0{,}05$ рад/с, два піки чітко розрізняються, як передбачалося (див. залежність, позначена ($\triangleright$) на рис. 2.16, панель а). Однак із збільшенням W проста картина, описана вище, втрачає силу. Для $W/\Delta = 2{,}36$ рад/с два піки зливаються в один пік шириною менше Δ (залежність, позначена (■)).

Як і передбачалося в попередніх пунктах, часткові спектри зливаються і детектувати шум неможливо. Інтуїтивне розуміння полягає в тому, що для того, щоб розрізнити два піки, розділені величиною Δ, потрібно вимірювати на протязі часу, що перевищує $1/\Delta$. Коли $W \gg \Delta, \Gamma$, час перебування в одному стані недостатньо довгий, щоб осцилятор розрізняв два стани, і спектр стає єдиним піком з центром в ω_0, ширина якого розширена відносно ширини лінії Γ за відсутності частотних шумів. В результаті частотний шум призводить до дифузії фази осцилятора.

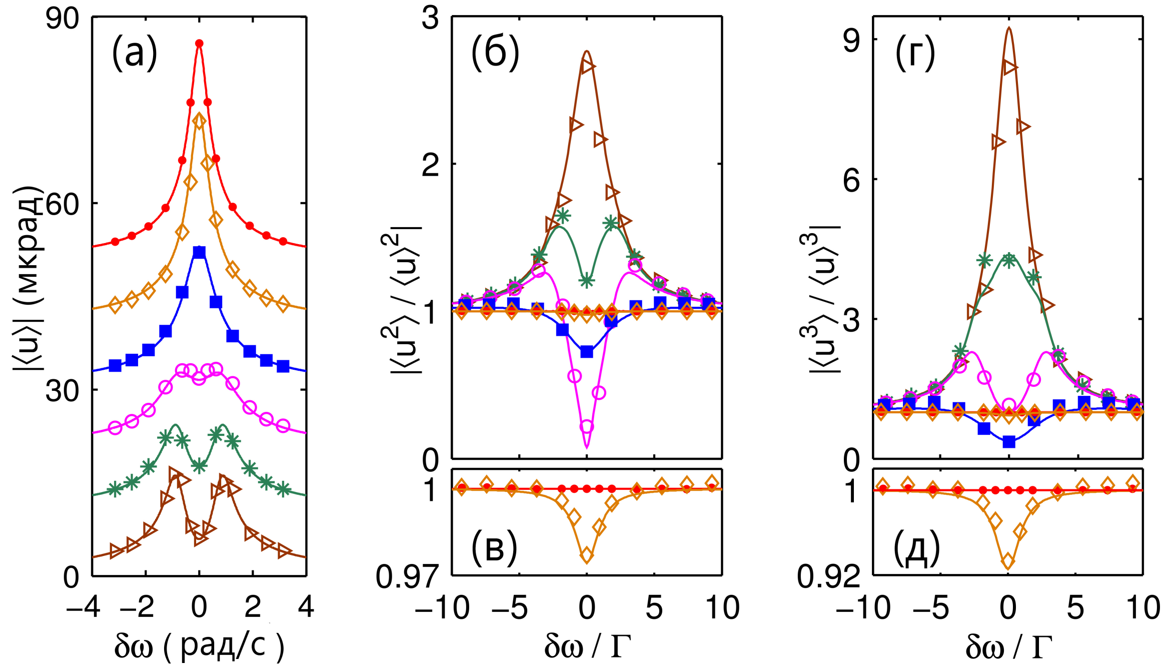

Рис. 2.16. Результати вимірювань спектрів усередненої комплексної амплітуди $|\langle u\rangle|$ осцилятора під дією ТШЧ (зміщені послідовно на 10 мкрад) з різними W/Δ (панель а), моменту другого порядку $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ (панель б) і моменту третього порядку $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$ (панель г), а також ці залежності у збільшеному масштабі (панелі в та д). Параметри: $\Delta = 1{,}665$ рад/с, $W/\Delta = 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}45;\ 2{,}36;\ 26$ і 43 рад/с (відповідно $\triangleright$, $*$, $\circ$, $\blacksquare$, $\diamond$, і $\bullet$).

По мірі збільшення W/Δ до $43{,}26$ рад/с, одинарний пік продовжує звужуватися (залежність, позначена ($\diamond$) на рис. 2.16, панель а). У цій межі осцилятор більше не може реагувати на швидкі зміни резонансної частоти. Коливання виникають так, ніби резонансна частота утримується на постійному, усередненому за часом значенні. Це сценарій, аналогічний динамічному звуженню в ядерному магнітному резонансі, де атоми зазнають дифузію в рідинах [278, 279]. Коли амплітуда спектральної модуляції набагато менша, ніж обернений час кореляції модуляції, атоми відчувають усереднене магнітне поле, а ширина резонансної лінії становиться меншою порівняно з випадком, коли атоми нерухомі. На рис. 2.16, панель а, лінії – це обчислений амплітудний спектр на основі рівняння (2.46). Бачимо хорошу збіжність між вимірюванням і теорією для всіх значень W/Δ.

Далі розглядемо вплив ТШЧ на усереднені другий та третій моменти. Графікі на рис. 2.16, панелі б та г, показують криві для $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ і $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$ відповідно, що відповідає тим самим значенням параметрів, що і на рис. 2.16, панель а. Рисунки 2.16, панелі в та д, збільшують область, де коефіцієнти близькі до 1. Як показують залежності, позначені (●), за відсутності зовнішніх частотних шумів обидва коефіцієнти дорівнюють 1 в межах експериментальної невизначеності. У присутності ТШЧ вони відхиляються від 1. Форма спектрів визначається параметрами Δ і W. При $W/\Delta = 0{,}05$ рад/с, спектр $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ має один пік з центром у ω_0, а вся крива перевищує 1 (залежність, позначена (▷)). Зі збільшенням W спектр опускається нижче 1 з двома максимумами по боках. Коли W збільшується за Δ і Γ, коефіцієнт наближається до 1. Спектри $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$ еволюціонують якісно подібним чином. Це добре узгоджується з теоретичними розрахунками (суцільні лінії) на рис. 2.16, панелі б–д.

2.3.5. Вплив теплового шуму, шуму детектора та часу вимірювання

Для великих швидкостей переключання частот на рис. 2.16 спектр $|\langle u\rangle|$ має один пік навіть при наявності ТШЧ, в той час як $\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ і $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$ значно відхиляються від 1. У таких випадках аналіз моментів u вищих порядків дозволяє однозначно ідентифікувати існування частотного шуму, навіть коли тепловий шум або шум детектора є сильним. На рисунку 2.17, панель а, зображено усереднений амплітудний спектр осцилятора для відносно слабких частотних шумів ($\Delta = 0{,}5\Gamma$ і $W/\Delta = 1{,}76$ рад/с). Спектр трохи розширений, але все ще добре апроксимується квадратним коренем з лоренцівської функції, даючи ширину, яка усього на $4{,}6\%$ більша за внутрішню константу загасання Γ. Вивчаючи лише ширину амплітудного спектра, неможливо відокремити вплив частотного шуму від затухання. Щоб виявити існування частотних шумів, звичайний метод включає дослідження складного розподілу амплітуди у фазовому просторі X-Y. На рисунку 2.17, панель б, показано три різні розподіли, коли ω_F встановлено рівним ω_0. Для червоних точок амплітуда руху F дорівнює нулю, а шум зовнішньої частоти відсутній. Показання підсилювача реєструються кожні 33 мс з постійною часу 300 мс. Кінцева ширина розподілу пов'язана з тепломеханічними коливаннями ($\sim$ 0,2 мкрад) осцилятора при 77 К. Коли F знову увімкнено, розподіл зміщується вздовж вертикальної осі так, що він центрується на від'ємних значеннях Y, оскільки середня фаза коливань відстає від навантаження на $\pi/2$ при резонансі. Обидва розподіли мають кругову форму через фазово-випадковий характер теплового шуму. Коли вводиться ТШЧ, розподіл стає подовженим у напрямку X. Таке анізотропне розширення відрізняється від того, що пов'язане з тепловим шумом. Загалом, воно служить сигналом наявності частотних шумів.

Цей метод виділення вкладу шуму частоти стає непридатним, коли тепловий шум в системі великий. На рис. 2.17, панель в, показані результати вимірювань для збільшеного амплітудного шуму приблизно в 1000 разів, тоді як зовнішні частотні шуми залишаються незмінними. Частотний шум призводить до додаткового анізотропного розширення у фазовому просторі X-Y, крім того, що викликається тепловим шумом.

Для розподілу на рис. 2.17, панель в, за наявності частотного шуму та періодичного руху, розширення в розподілі через частотний шум в основному маскується шумом детектора. Рисунок 2.17, панель в, показує, що ідентифікувати частотний шум стає значно складніше, перевіряючи розподіл у фазовому просторі X-Y, коли тепловий шум, або шум детектора великі.

Криві на рис. 2.18, панель а, отримані для тих самих експериментальних умов і при тій же частоті шуму, що і на рис. 2.17, і відповідають спектрам нормованого другого моменту $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$.

Залежності, позначені (•) та (○) на рис. 2.18, панель а, відповідають виміряним значенням для детекторних шумів великої (рис. 2.17, панель в) та малої (рис. 2.17, панель б) амплітуд відповідно. Щоб зменшити статистичну похибку, час усереднення для даних, що відповідають (•), вибирається в чотири рази довшим за час вимірювання для даних, показаних (○). Обидві криві добре

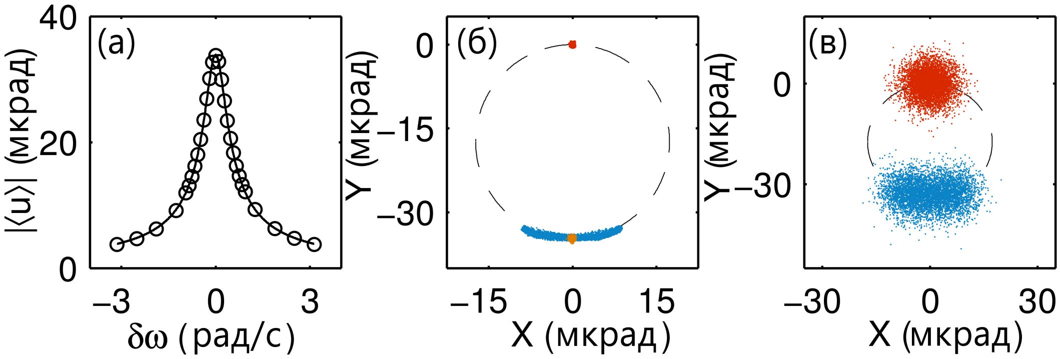

Рис. 2.17. Амплітудний спектр при слабкому частотному шумі (панель а), розподіл комплексної координати на фазовій діаграмі X – Y (панель б) і розподіл при збільшенні амплітуди шуму детектора у 1000 разів (панель в).

узгоджуються з передбаченням теорії (2.46), показаним суцільною лінією. На рисунку 2.18, панель б, показано подібний графік для величини $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$. Вимірювання підтверджують думку, що відхилення моментів $|\langle u^n\rangle/\langle u\rangle^n|$ старших порядків від одиниці залишаються надійним показником наявності частотного шуму, навіть коли тепловий шум та/або шум детектора сильний.

Для всіх даних, представлених у цій роботі, час вимірювання вибирається набагато довшим, ніж обернена швидкість перемикання, так що усереднені за часом значення u та вищі моменти визначені точно. У цьому обмеженні передбачені форми ліній спектрів $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ та $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$ не залежать від часу вимірювання. В експериментах, де присутній тепловий шум або шум детектора, може знадобитися додатково збільшити час вимірювання для точного вимірювання цих коефіцієнтів.

Нарешті відмітимо, що експериментальний аналіз спектрів вищих моментів комплексної амплітуди не обмежується лише телеграфним шумом частоти. На рисунках 2.18, панель а, та 2.18, панель б, пунктирною лінією показано передбачувані залежності для величин $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ і $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$, коли частотний шум $\xi(t)$ є гауссівським. Тут інтенсивність D гауссівського частотного шуму обрана $\Delta/2\sqrt{2}$, де $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = 2D\delta(t-t')$, щоб телеграфний і гауссівський шуми мали однакову дисперсію. На обох панелях рис. 2.18, нормовані моменти для гауссівського шуму відхиляються від одиниці, але помітно відрізняються від телеграфного шуму. Вони

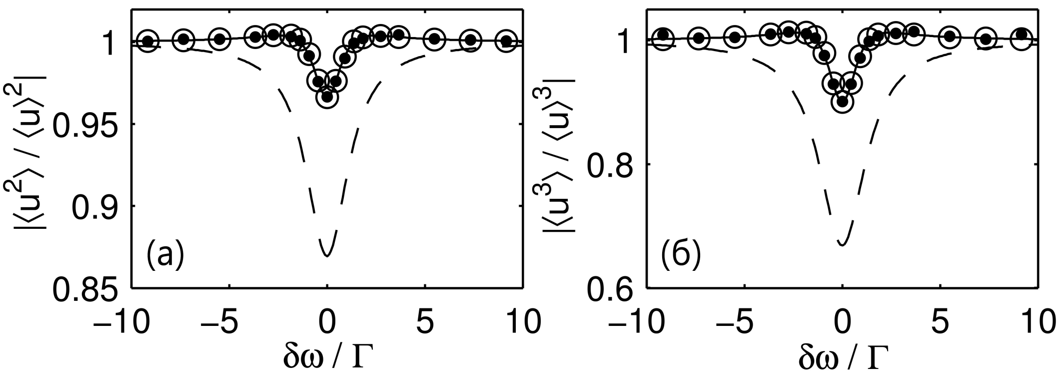

Рис. 2.18. Спектри нормованого другого моменту $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ (панель а) і третього моменту, $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$ (панель б) для тих же самих експериментальних умов і при тій же частоті шуму, що на рис. 2.17.

залишаються меншими за одиницю у всьому діапазоні $\delta\omega$, досягаючи мінімуму при $\delta\omega = 0$. На відміну від цього, для вимірювань у випадку телеграфного шуму, (рис. 2.16, панелі б та г, рис. 2.18, панелі а та б), існує певний діапазон $\delta\omega$, де коефіцієнти перевищують 1. Окрім детектування частотного шуму, аналіз вищих моментів u може виявитися корисним для вивчення характеристик шуму.

Тепловий рух шуму осцилятора та/або детектора у схемі вимірювання часто заважає ідентифікувати існування частотного шуму за допомогою звичайних методів, таких як вимірювання кільцевого відхилення коливань. Вище експериментально продемонстровано, що вимірюючи нормовані моменти старших порядків $|\langle u^2\rangle/\langle u\rangle^2|$ або $|\langle u^3\rangle/\langle u\rangle^3|$, можна виявити існування частотного шуму, навіть коли шум детектора сильний. Наведемо пояснення, чому аналіз саме моментів комплексної координати не залежить від теплового та/або детекторного шуму.

При експериментальному вимірюванні u записаний сигнал може бути представлений так:

$$u = (X + \Delta X) + i(Y + \Delta Y). \tag{2.85}$$

ΔX та ΔY походить від теплового або детекторного шуму. Вони мають нульове середнє значення і є некорельованими між собою, а також з X і Y, якщо і осцилятор, і схема зчитування залишаються лінійними. За умови, що здійснено достатнє усереднення, $|\langle u\rangle^n|$ дорівнює $|\langle X+iY\rangle^n|$. Момент комплексної координати, $|\langle u^n\rangle|$, містить перехресні множники ΔX, ΔY, X, і Y. Наприклад, розглянемо випадок $n=2$, виміряний у нашому експерименті:

$$\langle[(X+\Delta X)+i(Y+\Delta Y)]^2\rangle = \langle X^2\rangle - \langle Y^2\rangle + 2(\langle X\rangle\langle\Delta X\rangle -$$
$$-\langle Y\rangle\langle\Delta Y\rangle) + (\langle(\Delta X)^2\rangle - \langle(\Delta Y)^2\rangle) +$$
$$+i(\langle X\rangle\langle Y\rangle + \langle\Delta X\rangle\langle Y\rangle + \langle\Delta Y\rangle\langle X\rangle + \langle\Delta X\rangle\langle\Delta Y\rangle). \tag{2.86}$$

Усі доданки з $\langle\Delta X\rangle$ або $\langle\Delta Y\rangle$ в середньому дорівнюють нулю. Оскільки ΔX і ΔY через тепловий або детекторний шум мають однаковий розподіл, $\langle(\Delta X)^2\rangle = \langle(\Delta Y)^2\rangle$. Тому $|\langle u^2\rangle|$ ідентичний випадку, коли тепловий або детекторний шум відсутні. Як правило, фазовий шум включається у вищі моменти, тоді як додатковий шум, такий як тепловий або детекторний шум, – ні. В результаті, при достатньому усередненні, вищі моменти можуть бути використані для виявлення існування частотних шумів.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації, написаному по матеріалам праць [8–10]:

- Розвинуто теоретичний метод детектування частотного шуму, що діє на класичну або квантову моду, який базується на аналізі статистичних моментів старших порядків комплексної амплітуди вимушених коливань. Крім того, таким чином може бути виявлена статистика шуму. Статистичні моменти мають характерну залежність від частоти змушуючої сили, порядку моменту і дуже чутливі до статистики шуму. Це проілюстровано на прикладах гауссівського та пуассонівських шумів із смугою пропускання, яка значно перевищує швидкість затухання осцилятора, а також телеграфних шумів. Отримано явні вирази для моментів комплексної амплітуди у випадку широкосмугового шуму з довільною статистикою.

- Розроблена загальна методика розрахунку моментів старших порядків для марківського шуму, яка зводить задачу до системи лінійних рівнянь. Отримані явні результати для дисперсії та третього кумулянта комплексної амплітуди для довільного слабкого шуму; третій кумулянт амплітуди в цьому випадку пропорційний третьому кумулянту шуму. Навіть для слабкого частотного шуму запропонований спосіб дозволяє виявити його незалежно від інтенсивності теплового шуму в осциляторі. Результати стосуються як класичних, так і квантових осциляторів.

- На прикладі телеграфного шуму продемонстровано, як на відміну від загальноприйнятої методики детектування шумів, вивчення саме старших кумулянтов комплексної координати осцилятора дозволяє відокремити ефекти, пов'язані з частотним шумом. Показано, що частотні залежності старших кумулянтов координати при одних і тих же значеннях коефіцієнта загасання містять більше особливостей, що може бути використано для визначення параметрів шуму. Вивчено два важливих випадки: коли ймовірності двох власних частот резонатора, обумовлених шумом, практично рівні, і коли вони сильно розрізняються.

- Запропоновано і реалізовано експериментальну перевірку того, що присутність телеграфного шуму частоти можна ідентифікувати за статистичними моментами старших порядків комплексної амплітуди повільно затухаючого навантаженого мікромеханічного осцилятора. Коли або інтервал між двома частотами великий, або швидкість перемикання мала, усереднений за часом амплітудний спектр має два піки. Вони зливаються зі зростанням швидкості переключення частоти, і пік звужується. Також показано, що моменти старших порядків комплексної амплітуди сильно залежать від характеристик частотного шуму. Подібний аналіз старших моментів особливо корисний для виявлення існування частотного шуму, коли тепловий або детекторний шум сильний. Більше того, запропонований метод аналізу шуму частоти може бути безпосередньо застосований до інших лінійних резонаторів з високими коефіцієнтами добротності, що використовують джозефсонівські переходи [60] та оптичні порожнини [280].

Результати, викладені у даному розділі дисертації, можуть бути використані: в теорії наномеханічних осциляторів; при обробці даних, одержуваних пристроями, заснованими на джозефсонівських контактах; в квантових комп’ютерах; при оцінці точності роботи атомного годинника.

Розділ 3

МУЛЬТИСТАБІЛЬНІСТЬ КОЛИВАНЬ КВАНТОВИХ І КЛАСИЧНИХ СИСТЕМ

У даному розділі, заснованому на роботах [11, 12], вивчається взаємодія вібраційної системи з зовнішніми системами, що може призводити до мультистабільності її станів. Джерелом телеграфного шуму, розглянутого у розділі 2, може бути контакт з дворівневою системою, і у підрозділі 3.1 досліджується резонансно збуджена гармонічна мода, дисперсійно пов'язана з квантовою дворівневою системою. Розглядаються режими, коли міжрівнева відстань для дворівневої системи значно перевищує частоту моди, і розробляється квантовий адіабатичний підхід для аналізу динаміки. В рамках теорії середнього поля, дисперсійний зв'язок призводить до взаємної настройки моди та системи, які знаходяться у режимі, що є близьким до резонансу, та, у свою чергу, призводить до мультистабільності. У важливому випадку, коли система має два енергетичні рівні і збуджується поблизу резонансу, мода може мати до трьох метастабільних станів. Неадіабатичні квантові шуми, пов'язані зі спонтанними переходами в дворівневій системі, призводять до переходу між метастабільними станами.

Мультистабільність станів вимушених коливань може виникати не тільки внаслідок контакту квантових систем, але і у класичних системах, якщо вони зв'язані аргументальним зв'язком з швидкоосцилюючим локальним зовнішнім полем. У підрозділі 3.2 на прикладі маятника Дубошинського вивчаються так звані аргументальні коливання, тобто коливальні процеси в класичній системі з квантованими амплітудами. Виводиться точне рівняння руху маятника, яке має швидкоосцилюючі розв'язки з різною амплітудою. Показано теоретично і перевіряється чисельним моделюванням, що значення стабільних амплітуд залежать від *парності* силового поля. Виводиться рівняння огинаючої, яке можна використовувати для прогнозування встановлення амплітуди. Розглядається фазова площина маятника, яка містить атрактори, кожен з яких відповідає стабільній амплітуді. Усереднення за фактично неконтрольованим параметром початкової фази швидкоосцилюючого поля дає можливість отримати функцію розподілу за дискретними рівнями енергії, тобто ймовірності стабілізації певного енергетичного рівня.

3.1. Мультистабільність моди, дисперсійно зв'язаної з квантовою дворівневою системою

3.1.1. Самоузгоджені стани моди і квантової системи

Почнемо із контакту між модою і квантовою системою, що має кілька рівнів, наприклад дворівневою системою. Ми розглядаємо моду $\mathcal{M}$ (гармонічний осцилятор), пов'язану з динамічною квантовою системою $\mathcal{S}$. Мода і система також пов'язані з окремими термостатами і знаходяться під дією періодичних полів. Зв'язки вважаються слабкими в тому сенсі, що енергія зв'язку мала в порівнянні з міжрівневою різницею енергій. Іншими словами, ширина рівнів енергії моди та енергій Рабі мала в порівнянні з відстанню між рівнями. Передбачається, що дія зовнішнього поля є майже резонансною і буде описана в системі відліку, що коливається з частотою змушуючої сили.

На відміну від знаменитої моделі Джейнса-Каммінгса [270, 281, 282], тут інтервали між рівнями для моди і системи значно відрізняються. Для дисперсійної взаємодії $\mathcal{M} - \mathcal{S}$ основним ефектом є не обмін енергією, а зміна відстаней між рівнями залежно від сукупного стану, що відбувається вже в першому порядку за константою зв'язку. Напівкласично, ця ситуація може спричинити мультистабільність у відгуку на змушуюче поле наступним чином.

Для заданих параметрів змушуючого поля комбінована система може самостійно підтримувати або змушені коливання великої амплітуди моди $\mathcal{M}$ (при цьому ефективна частота моди налаштовується або на точний резонанс зі змушуючим полем через дисперсійний зв'язок), або відбуваються коливання малої амплітуди на частоті, далекій від резонансу зі змушуючим полем. У кожному випадку амплітуда вібрації моди $\mathcal{M}$ визначає міжрівневу частоту системи $\mathcal{S}$. Якщо система $\mathcal{S}$ знаходиться під дією періодичного поля, це визначає її стаціонарний стан. Завдяки дисперсійному зв'язку це встановлення частоти осцилятора і системи відбувається самоузгоджено, що і призводить до мультистабільності, продемонстрованої на рис. 3.1. Ордината показує стаціонарне число зайнятості моди $\mu_{\rm st}$ (амплітуда квадрату моди становить $2\hbar\mu_{\rm st}/m_{_M}\omega_{_M}$, де $m_{_M}$ і $\omega_{_M}$ – це маса і частота моди відповідно). Абсциса показує нормовану квадратичну амплітуду змушуючої сили $F_{_M}^2$. І мода, і система резонансно збуджуються. У системі відліку, що осцилює на частоті змушуючої сили, модель описується рівняннями (3.6), (3.9) та (3.11). Відношення швидкості релаксації дворівневої системи $\Gamma_{_S} \equiv (2\tau_{_S})^{-1}$ до швидкості релаксації моди $\Gamma_{_M} \equiv \tau_{_M}^{-1}$ дорівнює 30. Вставка відноситься до $(\omega_{F_M} - \omega_{_M})/\Gamma_{_M} = 0,3,$ і в цьому випадку система є бістабільною. Нестабільні стани відображаються пунктирними лініями. Чорна вертикальна пунктирна лінія показує величину змушуючої сили, що використовується на рис. 3.2 нижче. В класичних системах мультистабільність і динамічний хаос вивчались для ефективного дисперсійного зв'язку нелінійних осциляторів [283, 284].

Теорія середнього поля описує напівкласичну багатостабільність системи $\mathcal{M}+\mathcal{S}$, але не враховує ролі коливань. Класичні та квантові коливання неминуче виникають разом із розслабленням як наслідком зчеплення з термостатом. У багатостабільних системах коливання викликають міжштатне перемикання навіть при нульовій температурі.

Цікаво, що там, де дисперсійний зв'язок слабкий, мультистабільності очевидно немає; однак там, де він сильний, також не існує мультистабільності, оскільки швидкість перемикання стає порівнянною зі швидкістю релаксації, і тоді саме поняття мультистабільності втрачає сенс. Далі ми знаходимо відповідний діапазон сили зв'язку.

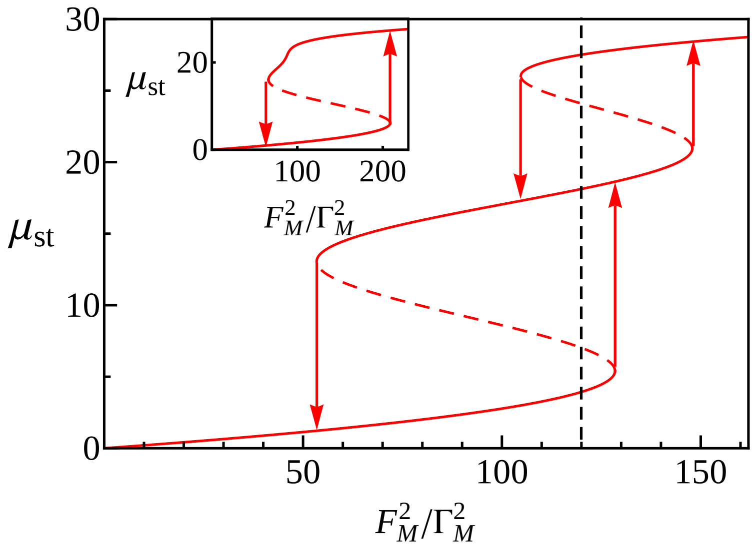

Рис. 3.1. Залежність енергії моди, дисперсійно зв'язаної з дворівневою системою, від нормованої амплітуди змушуючої сили. Параметри: $F_S/\Gamma_S = 24$, $(\omega_{F_M} - \omega_M)/\Gamma_M = 1$, $(\omega_{F_S} - \omega_S)/\Gamma_S = -10$.

Пропонується загальне формулювання теорії середнього поля у важливому випадку, коли типовий час релаксації τ_S системи $\mathcal{S}$ значно менший, ніж час релаксації τ_M моди.

3.1.1.1. Основні рівняння

Формально, дисперсійний гамільтоніан зв'язку $H_i(\hat{M}, \hat{S})$ є функцією оператора моди $\hat{M}$ та оператора системи $\hat{S}$, які комутують з гамільтоніанами моди і системи за відсутності збудження. Наприклад, $\hat{M}$ може бути числом зайнятості моди, $a^\dagger a$, де a та $a^\dagger$ є операторами знищення і народження, тоді як, якщо динамічна система — це спін у статичному магнітному полі B_z, $\hat{S}$ може бути спіновим оператором s_z. Ця форма зв'язку забезпечує, що H_i не залежить від часу у представленні взаємодії.

Для ілюстрації ми розглянемо моду, зв'язану з дворівневою системою (ДРС), кожна з яких збуджується своїм власним майже резонансним полем (з $\hbar = 1$):

$$H_S = \omega_S s_z - s_x F_S \cos \omega_{F_S} t,$$
$$H_M = \omega_M a^\dagger a - (a + a^\dagger) F_M \cos \omega_{F_M} t. \tag{3.1}$$

Тут $s_{x,z} = \sigma_{x,z}/2$, де $\sigma_{x,z}$ — матриці Паулі, які діють на ДРС. Для майже резонансних збуджень відстройки частот вводяться згідно з

$$\delta\omega_M = \omega_{F_M} - \omega_M, \quad \delta\omega_S = \omega_{F_S} - \omega_S, \tag{3.2}$$

для частот збудження по відношенню до частот переходів ω_M and ω_S. Відстройки вважаються малими в порівнянні з самими перехідними частотами та їх різницею: $|\delta\omega_M|, |\delta\omega_S| \ll \omega_M, \omega_S, |\omega_M - \omega_S|$. Порівняння з $|\omega_M - \omega_S|$, зокрема, виправдовує апроксимацію, коли враховується лише дисперсійний зв'язок.

Найпростішою формою дисперсійного зв'язку моди і ДРС є $H_i = V a^\dagger a s_z$, який ми зараз розглядаємо. Переходимо до представлення взаємодії, використовуючи унітарне перетворення

$$U(t) = \exp(-i\omega_{F_M} a^\dagger a t - i\omega_{F_S} s_z t). \tag{3.3}$$

Нехтуючи швидко осцилюючими доданками, пропорційними амплітудам змушуючих сил F_S, F_M, ми записуємо перетворений гамільтоніан,

$$\tilde{H} = \left[U^\dagger(t) \left(H_M + H_S + H_i \right) U(t) - i U^\dagger(t) \dot{U}(t) \right]_{\text{вз.}} \tag{3.4}$$

у наступному вигляді:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_M + \tilde{H}_S + \tilde{H}_i, \tag{3.5}$$

з гамільтоніанами

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_M &= -\delta\omega_M a^\dagger a - \frac{1}{2}F_M(a + a^\dagger),\\
\tilde{H}_S &= -\delta\omega_S s_z - \frac{1}{4}F_S(s_+ + s_-),\\
\tilde{H}_i &= V a^\dagger a s_z.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Модель (3.6) описує, зокрема, дисперсійний зв'язок порожнинної моди з дворівневим атомом у порожнині або з ефективно дворівневим джозефсонівським переходом у ланцюзі, що вивчалися у багатьох експериментах, див., наприклад, [93,285,286] та посилання в них. Загальніше, H_i може набути більш складної форми. Зокрема, зв'язок не повинен бути лінійним за $a^\dagger a$. Подібним чином, коли система $\mathcal{S}$ має більше двох рівнів, гамільтоніан зв'язку може включати також більш складні комбінації операторів системи. Ми загалом характеризуватимемо енергію дисперсійного зв'язку параметром V, навіть коли зв'язок має форму, відмінну від $\tilde{H}_i$ в рівнянні (3.6); вважаємо $|V| \ll \omega_S, \omega_M, |\omega_S - \omega_M|$.

Для того, щоб описати динаміку за наявності дисипації, ми розглянемо матрицю густини ρ зв'язаної моди та системи. Припускаючи марківську динаміку при переході до повільного часу, тобто для часів, набагато більших за $\omega_M^{-1}, \omega_S^{-1}, |\omega_M - \omega_S|^{-1}$, ми можемо записати рівняння руху для ρ у представленні взаємодії у такому вигляді:

$$
\dot{\rho} = \hat{L}\rho \equiv \hat{L}_M\rho + \hat{L}_S\rho + i[\rho, \tilde{H}_i]. \tag{3.7}
$$

Тут $\hat{L}_M$ і $\hat{L}_S$ є операторами Ліувілля або супероператорами. У [287] розглядається динаміка моди та системи, з врахуванням контакту з термостатами, але ізольованих одна від одної.

Нижче ми розраховуємо матрицю густини в системі, де оператори $\hat{M}$ and $\hat{S}$ діагональні. Важливо те, що ρ повинна залишатися ермітовою в ході своєї еволюції згідно рівняння (3.7). Як наслідок, для будь-якого оператора моди та системи $\hat{O}_{MS}$,

$$(\hat{L}\hat{O}_{MS})^\dagger = \hat{L}\hat{O}^\dagger_{MS}. \tag{3.8}$$

Ця умова стосується також $\hat{L}_M$ та $\hat{L}_S$, взятих окремо.

У часто використовуваній моделі дисипації, де зв'язок моди з термостатом вважається лінійним за операторами $a, a^\dagger$, в головному наближенні за цією взаємодією [270]:

$$\hat{L}_M\rho = -\Gamma_M[(\bar{n}+1)(a^\dagger a\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a) + \bar{n}(aa^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho a + \rho aa^\dagger)] + i[\rho, \tilde{H}_M], \tag{3.9}$$

де $\bar{n} \equiv \bar{n}(\omega_M)$, $\bar{n}(\omega) = [\exp(\omega/k_BT) - 1]^{-1}$ — число Планка, а Γ_M — швидкість затухання. Зазначимо, що рівняння (3.9) не обмежується описом омічної дисипації; при мікроскопічному виведенні передбачається, що $\Gamma_M \ll \omega_M$ і $|d\Gamma_M/d\omega_M| \ll 1$, див. розділ 1. Ми вважаємо, що перенормування параметрів моди внаслідок зв'язку з термостатом включено у значення параметрів.

Будемо користуватися простою формою рівнянь релаксації для дворівневої системи, рівнянь Блоха. У цьому випадку оператор $\hat{L}_S\rho$ в рівнянні (3.7) має той самий вигляд, що і $\hat{L}_M\rho$, за винятком того, що:

(а) коефіцієнт затухання Γ_M повинен бути замінений параметром Γ_S, який фактично задає час декогеренції дворівневої системи, $\tau_S^{-1} = 2\Gamma_S(2\bar{n}_S + 1)$, де $\bar{n}_S = \bar{n}(\omega_S)$ – число Планка;

(б) оператори a і $a^\dagger$ у операторі затухання повинні бути замінені на s_- і s_+ відповідно, $s_\pm = s_x \pm is_y$;

(в) гамільтоніан $\tilde{H}_M$ слід замінити на $\tilde{H}_S$. Крім того, ми включаємо додаткове поперечне затухання у вигляді доданка $-\Gamma_\perp(\rho - 4s_z\rho s_z)/2$ у $\hat{L}_s\rho$.

3.1.1.2. Відгук моди і квантової системи

Побудуємо евристичну напівкількісну картину мультистабільності адіабатичного середнього поля для дисперсійного зв'язку з ДРС; обґрунтування та умови застосовності випливають із загального аналізу у пункті 3.1.3. Припустимо, що мода знаходиться у стані $|m\rangle$ з $\langle m|\tilde{H}_i|m\rangle = Vms_z$. Для моди в цьому стані відстройка ефективної частоти ДРС від частоти змушуючої сили задається станом моди,

$$\delta\omega_S(m) = \delta\omega_S - Vm, \tag{3.10}$$

як видно з рівнянь (3.5) і (3.6). В адіабатичному наближенні ми розглядаємо динаміку дворівневої системи, припускаючи, що ця відстройка частоти не залежить від часу. Використовуючи добре відомий результат для цієї задачі, див., наприклад, [288], отримуємо середнє значення s_z для заданого значення m:

$$\begin{aligned} &\langle s_z\rangle_S = -\Gamma_S\left[2\Gamma_S(2\bar{n}_S+1) + \frac{1}{4}\frac{\gamma F_S^2}{\gamma^2+\delta\omega_S(m)^2}\right]^{-1}, \\ &\gamma = \Gamma_S(2\bar{n}_S+1)+\Gamma_\perp, \end{aligned} \tag{3.11}$$

де γ - швидкість затухання спінових компонент $s_\pm$.

Завдяки гамільтоніану взаємодії $\tilde{H}_i$ в рівняннях (3.5) і (3.6), середня міжрівнева відстань ДРС $\langle s_z\rangle_S$ змінює стан моди, змінюючи її частоту на $\nu(m) \equiv V\langle s_z\rangle_S$.

Важливо, що частота моди залежить від ступеня збудження, m. Така залежність характерна для нелінійних мод. Тут це відбувається від резонансної накачки ДРС. У свою чергу, типові значення m в стабільному стані визначають відстройку ДРС від зовнішньої сили $F_S\cos\omega_{F_S}t$, яка діє на неї,

$$\delta\omega_S(m) \equiv \omega_{F_S} - \omega_S - Vm, \tag{3.12}$$

таким чином визначаючи $\langle s_z \rangle_S$.

Взаємне підстроювання моди та дворівневої системи на резонанс призводить до мультистабільності сукупної системи. Дійсно, стаціонарне середнє число зайнятості резонансно навантаженого гармонічного осцилятора задається звичним виразом

$$m_{\mathrm{st}} = \frac{1}{4} F_M^2 / \left[\Gamma_M^2 + (\omega_{F_M} - \omega_M)^2 \right] . \tag{3.13}$$

Враховуючи залежність частоти моди від ступеня її збудження, m, отримуємо співвідношення для стаціонарного стану системи:

$$m_{\mathrm{st}} = \frac{1}{4} F_M^2 / \left\{ \Gamma_M^2 + [\omega_{F_M} - \omega_M - \nu(m_{\mathrm{st}})]^2 \right\}. \tag{3.14}$$

Отримана система нелінійних рівнянь (3.11) та (3.14) може мати кілька розв’язків. Прикладом може служити залежність квадрата амплітуди коливань моди (що дорівнює $2\hbar m_{\mathrm{st}}/\omega_M$ для одиничної маси) від зовнішньої сили, яка показана на рис. 3.1. Насправді наведена величина є значенням усередненої змінної μ_{st} у квазістаціонарному вігнерівському розподілі за числами занять m моди; вона задана рівнянням (3.46), яке для розглянутої моделі збігається з рівнянням (3.14) і обґрунтовує вищезазначені якісні аргументи.

Для вибраних параметрів моди вона може мати до трьох стабільних станів одночасно. У наближенні середнього поля, де квантовими та класичними коливаннями нехтують (роль флуктуацій з’ясовується у пункті 3.1.4), ця мультистабільність призводить до гістерезису з багаторазовим перемиканням між стабільними гілками при варіювання параметрів системи (тут — змушуюча сила).

Природу мультистабільності можна зрозуміти з графічного розв’язку рівнянь (3.11) та (3.14), проілюстрованих на рис. 3.2. Суцільні лінії на цьому рисунку показують резонансну залежність нормованої міжрівневої відстані ДРС $\langle s_z \rangle_S$, заданої рівнянням (3.11), як функцію числа зайнятості моди, що розглядається як неперервна змінна $\mu = m$; для зручності, замість $\langle s_z \rangle_S$ на абсцисі показано нормований зсув частоти $-\nu(\mu) = -V\langle s_z \rangle_S$, відлічений від $\delta\omega_M \equiv \omega_{F_M} - \omega_M$ та масштабований на Γ_M. Резонанс є наслідком підстроювання частоти ДРС $\delta\omega_S(\mu)$, яка є лінійною за величиною μ. Пунктирна лінія показує резонансну залежність нормованого квадрату амплітуди координати моди $\mu = m_{\rm st}$ від відстройки частоти моди $\omega_{F_M} - \omega_M - \nu(\mu)$ згідно рівняння (3.14).

Зауважимо, що завжди є непарна кількість перетинань; для зеленої кривої вона дорівнює 1, і перетин відбувається для невеликих μ поза діапазоном, показаним на рис. 3.2. Ця мода відповідає єдиному стабільному стану модульованої складової системи.

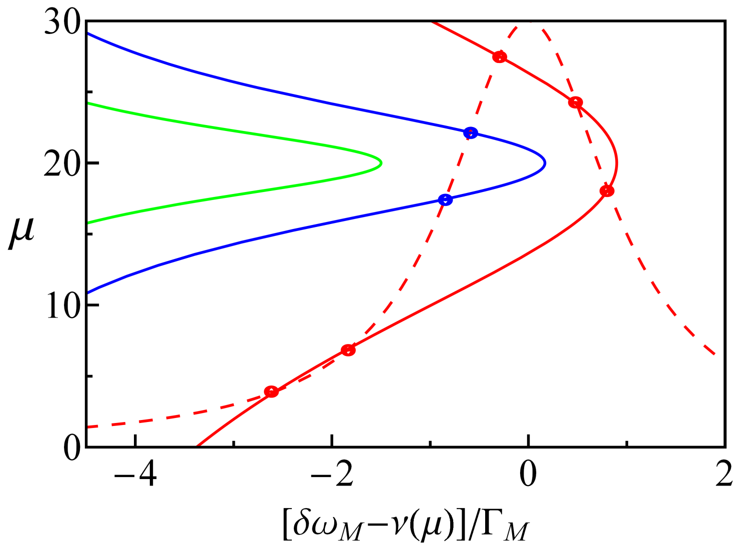

Рис. 3.2. Діаграма, що пояснює природу мультистабільності для дисперсійного зв'язку. Параметри: $F_S/\Gamma_S = 4$ (крайня ліва зелена крива), 8 (середня, синя) і 24 (крайня права, червона).

Випадок 3-х перетинів (синя крива) відповідає бістабільності, тоді як 5 перетинів (червона крива) відповідає стійкості. Розуміння цієї закономірності випливає з аналізу кривих біфуркації у підпункту 3.1.3.2. Вертикальна штрихова пряма відповідає значенню $F_M^2/\Gamma_M^2 = 120$ на рис. 3.1. Для від'ємних $\delta\omega_M - \nu(\mu)$ поза діапазоном графіку пунктирна лінія перетинає сині та зелені суцільні лінії, забезпечуючи низькоамплітудні розв'язки.

Можливість бістабільності відгуку механічної моди на резонансну модуляцію в ситуації, коли мода пов'язана з іншою системою (наприклад, масивна класична частинка, що дифундує вздовж механічного резонатора), розглядалася раніше [72]. Такий зв'язок подібний до дисперсійного зв'язку, оскільки дифузія змінює частоту моди і, в свою чергу, піддається впливу вібрацій. Однак, на відміну від [72], наведений нижче аналіз є повністю квантовим, загальним, оскільки він не обмежується певним механізмом зв'язку, передбачення середнього поля в данному випадку відрізняються (наприклад, тристабільність), і головне, клас систем, на які розповсюджуються результати, набагато ширший.

У наступному пунті отримані рівняння руху для матриці густини мод та введено адіабатичне наближення, яке дозволяє виділити головні вклади рівнянь.

3.1.2. Адіабатичне наближення

Основне припущення аналізу полягає в тому, що час релаксації τ_S системи $\mathcal{S}$ вважається набагато меншим, ніж час релаксації τ_M моди (який задається Γ_M^{-1} для моделі (3.9)). Ми використовуємо цей поділ часових шкал для вирішення рівняння (3.7) в адіабатичному наближенні: спочатку ми вирішуємо їх для еволюції системи $\mathcal{S}$ для фіксованого стану моди, а потім вивчаємо, як отримані квазістаціонарні стани $\mathcal{S}$ впливають на динаміку моди через зв'язок $\tilde{H}_i$. Пізніше ми побачимо, як квантові коливання $\mathcal{S}$ призводять до перемикання між метастабільними станами моди. Формально будемо вважати, що енергія дисперсійного зв'язку задовольняє $|V| \ll \tau_S^{-1}$, хоча фактичною умовою застосовності є $V^2\tau_S \ll \tau_M^{-1}$, як буде показано нижче.

3.1.2.1. Динаміка квантової системи

Для початку розглянемо випадок, коли мода встановлюється у власному стані $|m\rangle$ оператора $\hat{M}$: $\hat{M}|m\rangle = m|m\rangle$. Спільна матриця густини системи і моди задається тензорним добутком $\rho = \rho_S \otimes |m\rangle\langle m|$. Якщо ми нехтуємо динамікою повільної моди, породженою ліувілівським доданком $\hat{L}_M$ в рівнянні (3.7), зведена матриця густини ρ_S системи $\mathcal{S}$ визначається згідно

$$\dot{\rho}_S = \hat{\Lambda}_m \rho_S, \quad \hat{\Lambda}_m \hat{O} = \hat{L}_S \hat{O} + i[\hat{O}, \hat{H}_i(m)], \tag{3.15}$$

де $\hat{O}$ і $\hat{H}_i(m)$ — оператори, що діють лише на $\mathcal{S}$. Оскільки гамільтоніан дисперсійного зв'язку $\tilde{H}_i$ комутує з оператором $\hat{M}$, тут воно діє на спінові змінні через свою проекцію на вибраний стан моди $|m\rangle$, $\hat{H}_i(m) = \langle m|\tilde{H}_i|m\rangle$. Ми використаємо розв'язок рівняння (3.15) як основу для побудови розв'язку повної задачі, рівняння (3.7).

Ми розв'язуємо рівняння (3.15), вводячи праві власні оператори $\{\chi_m^\alpha\}$ супероператора $\hat{\Lambda}_m$:

$$\hat{\Lambda}_m \chi_m^\alpha = -\lambda_m^\alpha \chi_m^\alpha. \tag{3.16}$$

Зверніть увагу, що з рівняння (3.8) видно, що

$$(\hat{\Lambda}_m \chi_m^\alpha)^\dagger = \hat{\Lambda}_m (\chi_m^\alpha)^\dagger. \tag{3.17}$$

Отже, якщо χ_m^α є власним оператором $\hat{\Lambda}_m$ із власним значенням $-\lambda_m^\alpha$, то $(\chi_m^\alpha)^\dagger$ також є власним оператором із власним значенням $(-\lambda_m^\alpha)^*$. Власні оператори χ_m^α із дійсними власними значеннями можуть бути вибрані ермітовими.

Якщо система $\mathcal{S}$ має N_S станів ($N_S = 2$ для ДРС), оператори χ_m^α становлять $N_S \times N_S$ матриць. Оскільки супероператор $\hat{\Lambda}_m$ в рівнянні (3.16) не комутує зі своїм спряженим оператором, немає гарантії, що набір власних векторів (операторів) $\{\chi_m^\alpha\}$ утворює повний набір для системи $\mathcal{S}$. Зокрема, за точно вибраних умов рівняння (3.16) може мати менше N_S^2 лінійно незалежних розв'язків, і для вирішення динамічної задачі потрібні додаткові кроки (3.15). Тут ми не будемо розглядати такі випадки, припускаючи, що оператор $\hat{\Lambda}_m$ діагоналізується. Ця умова загалом виконується для задач, що становлять інтерес, включаючи конкретні приклади, розглянуті нижче. Крім того, ми не будемо розглядати інший структурно нестабільний випадок, коли деякі власні значення λ_m^α збігаються, оскільки таке виродження знімається нескінченно малою зміною параметрів $\hat{\Lambda}_m$.

Оскільки рівняння (3.15) описує затухання системи S, то власні значення λ_m^α мають невід'ємні дійсні частини. Одне з цих власних значень (з $\alpha = 0$, для конкретності) дорівнює нулю, що відповідає стаціонарному стану системи $\mathcal{S}$ для моди в стані $|m\rangle$. Мінімальне значення Re $\lambda_m^{\alpha>0}$ – це швидкість затухання системи $\mathcal{S}$ для даного $|m\rangle$. Час релаксації τ_S задається максимальним значенням $[\mathrm{Re}\ \lambda_m^{\alpha>0}]^{-1}$, розрахованим для характеристики m.

Визначимо внутрішній добуток в системі $\mathcal{S}$ операторів $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ як

$$\langle \hat{O}_1, \hat{O}_2 \rangle = \mathrm{Tr}_S[\hat{O}_1^\dagger \hat{O}_2], \tag{3.18}$$

де слід Tr_S береться тільки за станами системи $\mathcal{S}$. Вираз

$$\langle \hat{O}_1, \hat{\Lambda}_m \hat{O}_2 \rangle = \mathrm{Tr}_S[\hat{O}_1^\dagger \hat{\Lambda}_m \hat{O}_2] \tag{3.19}$$

визначає, як супер оператор $\hat{\Lambda}_m$ діє вліво (у цьому випадку на оператор $\hat{O}_1^\dagger$); він також визначає спряжений супероператор $\hat{\Lambda}_m^\dagger$ співвідношенням $(\hat{O}^\dagger \hat{\Lambda}_m)^\dagger = \hat{\Lambda}_m^\dagger O$.

«Ліві» власні оператори $\{\chi_{\alpha m}^\dagger\}$ з $\hat{\Lambda}_m$, які ми позначаємо нижніми індексами, визначаються рівняннями

$$\chi_{\alpha m}^\dagger \hat{\Lambda}_m = -\lambda_{\alpha m} \chi_{\alpha m}^\dagger. \tag{3.20}$$

Ліве та праве *власні значення* $\hat{\Lambda}_m$ збігаються: з рівнянь (3.16) та (3.20) маємо $\lambda_m^\alpha = \lambda_{\alpha m}$. Однак лівий та правий *власні оператори* не є ермітово спряженими. Невиродженість спектра передбачає відношення ортонормованості

$$\langle \chi_{\alpha m}, \chi_m^\beta \rangle = \mathrm{Tr}_S[\chi_{\alpha m}^\dagger \chi_m^\beta] = \delta_{\alpha\beta}, \tag{3.21}$$

де ми ввели додаткову умову нормалізації $\mathrm{Tr}_S[\chi^\dagger_{\alpha m}\chi^\alpha_m] = 1$. Співвідношення ортогональності (3.21) справедливе лише для власних операторів, що відповідають *такому ж* стану моди $|m\rangle$. Це буде важливо нижче, коли ми розглянемо еволюцію із загальними модами, не діагональними за m.

За час свого затухання система $\mathcal{S}$ досягає квазістаціонарного стану для даного стану моди $|m\rangle$. Зведена матриця густини $\mathcal{S}$ у стаціонарному стані задається правим власним оператором χ^0_m, що відповідає нульовому власному значенню $\lambda^0_m = 0$. Зверніть увагу, що властивість еволюції, незмінність сліду, диктує, щоб $\mathrm{Tr}_S[\hat{\Lambda}_m\hat{O}] = 0$, для будь-якого $\hat{O}$. Вставивши оператор ідентичності $\hat{I}_S$ ліворуч від $\hat{\Lambda}_m$, ми бачимо, що $\hat{I}_S$ є лівим власним вектором $\hat{\Lambda}_m$ із власним значенням 0. Отже, ми встановлюємо $\chi^\dagger_{0m} = \hat{I}_S$ так, щоб умова ортонормованості (3.21) давала $\mathrm{Tr}_S\chi^0_m = 1$. Це дуже корисна властивість, яку буде використано нижче.

3.1.2.2. Динаміка моди

Тепер використовуємо розв'язок попереднього підпункту, щоб розробити повну теорію зв'язаної динаміки. Мета — отримати рівняння замкнутої форми для матриці густини коливальної моди (див. рівняння (3.28)–(3.33)).

Для початку для кожного α ми збираємо набір власних операторів $\{\chi^\alpha_m\}$, разом з відповідними проекторами на моди стану $\{|m\rangle\langle m|\}$, щоб сформувати єдиний оператор

$$\chi^\alpha = \sum_m \chi^\alpha_m \otimes |m\rangle\langle m|, \tag{3.22}$$

який діє на змінні як $\mathcal{S}$ так і $\mathcal{M}$. Аналогічно визначаємо

$$\chi^\dagger_\alpha = \sum_m \chi^\dagger_{\alpha m} \otimes |m\rangle\langle m|. \tag{3.23}$$

Пишемо повний оператор густини як

$$\rho = \rho_1 + \rho_1^\dagger, \qquad \dot{\rho}_1 = \hat{L}\rho_1, \qquad \rho_1 = \sum_\alpha \chi^\alpha p_\alpha, \tag{3.24}$$

де оператор

$$p_\alpha = \sum_{m,m'} p_\alpha^{mm'} |m\rangle\langle m'| \tag{3.25}$$

діє лише на моду $\mathcal{M}$. Зверніть увагу, що χ^α в рівнянні (3.22) та p_α в рівнянні (3.25) не комутують. Тому порядок операторів у визначенні ρ_1 в рівнянні (3.24) є важливим. У явній формі ми маємо

$$\rho_1 = \sum_{m,m'} \sum_\alpha p_\alpha^{mm'} \chi_m^\alpha \otimes |m\rangle\langle m'|. \tag{3.26}$$

Набір комплексних параметрів $\{p_\alpha^{mm'}\}$, для $\alpha = 0, \ldots, N_S^2 - 1$ і $m, m' = 0, 1, 2, \ldots$, повністю визначає матрицю густини сукупної системи. Асиметрія рівняння (3.26), яка полягає у тому, що χ_m^α присутній у рівнянні, а $\chi_{m'}^\alpha$ — ні, знімається, якщо дописати ρ_1 до його спряженого набору при формуванні повної матриці густини ρ.

Для ρ_1 в формі (3.26) матриця густини залежить від часу через коефіцієнти $\{p_\alpha^{mm'}(t)\}$. Ця параметризація виявляється зручною для аналізу повільної динаміки моди. Таким чином, нижче ми переформулюємо головне рівняння (3.7) у систему рівнянь для операторів $\{p_\alpha(t)\}$.

Динамічне рівняння для p_α отримується підстановкою ρ_1 у рівняння $\dot{\rho}_1 = \hat{L}\rho_1$. Потім ми проектуємо частину p_α, помноживши зліва на $\chi_\alpha^\dagger$ і беручи слід за змінними системи $\mathcal{S}$. Використовуючи відношення

$$\langle m|\hat{L}_S(\chi^\alpha p_\alpha) + i[\chi^\alpha p_\alpha, \tilde{H}_i]|m'\rangle = (\hat{\Lambda}_m \chi_m^\alpha) p_\alpha^{mm'} + i\chi_m^\alpha \langle m|[p_\alpha, \tilde{H}_i]|m'\rangle, \tag{3.27}$$

що є результатом рівняння (3.15), а також рівняння (3.16) для $\hat{\Lambda}_m \chi_m^\alpha$, отримуємо:

$$\dot{p}_\alpha = -\lambda^\alpha p_\alpha + \hat{L}_M p_\alpha + i \sum_\beta \hat{\nu}_{\alpha\beta} p_\beta - \sum_\beta \hat{k}_{\alpha\beta} p_\beta, \tag{3.28}$$

з

$$\lambda^\alpha = \sum_m \lambda_m^\alpha |m\rangle\langle m|, \tag{3.29}$$

$$\hat{\nu}_{\alpha\beta} p_\beta = \mathrm{Tr}_S \left(\chi_\alpha^\dagger \chi^\beta \left[p_\beta, \tilde{H}_i \right] \right), \tag{3.30}$$

$$\hat{k}_{\alpha\beta} p_\beta = \delta_{\alpha\beta} \hat{L}_M p_\beta - \mathrm{Tr}_S \left[\chi_\alpha^\dagger \hat{L}_M (\chi^\beta p_\beta) \right]. \tag{3.31}$$

Тут $\hat{\nu}_{\alpha\beta}$ і $\hat{k}_{\alpha\beta}$ є супер операторами. Обидва вони є результатом дисперсійного зв'язку $\mathcal{M} - \mathcal{S}$. Для $\hat{\nu}_{\alpha\beta}$ це очевидно, оскільки цей доданок явно містить гамільтоніан зв'язку $\tilde{H}_i$ і дорівнює нулю, де енергія зв'язку $V \to 0$. Доданок $\propto \hat{k}_{\alpha\beta}$ виникає тому, що власні оператори $\{\chi_m^\alpha\}$, що характеризують динаміку системи $\mathcal{S}$, залежать від стану моди m через зв'язок. Як наслідок, супероператор $\hat{L}_M$, що описує розсіювання моди $\mathcal{M}$, не комутує з χ^α, тобто,

$$\hat{L}_M (\chi^\beta p_\beta) \neq \chi^\beta \hat{L}_M p_\beta. \tag{3.32}$$

Зазначимо, що оскільки $\boldsymbol{\chi}_0^\dagger = \hat{I}_S$, ми маємо $\hat{k}_{0\beta} p_\beta = 0$. Крім того, оскільки $\hat{k}_{\alpha\beta}$ виникає від затухання моди, його значення становить величину порядка $\propto \tau_M^{-1}$.

Цікавить ефективна нелінійна динаміка моди, що описується еволюцією її зведеної матриці густини $\rho_M = \mathrm{Tr}_S \rho$. Оскільки $\mathrm{Tr}_S \chi_m^\alpha = 0$, для всіх $\alpha \neq 0$, маємо

$$\rho_M(t) = p_0(t) + p_0^\dagger(t). \tag{3.33}$$

Однак, як видно з рівняння (3.28), еволюція p_0 пов'язана з поведінкою всіх $p_{\alpha > 0}$. Таким чином, щоб знайти ρ_M, ми повинні вивчити повний набір пов'язаних динамічних рівнянь.

Якщо, як ми припускаємо, швидкість релаксації τ_S^{-1} системи $\mathcal{S}$ велика порівняно із швидкістю релаксації τ_M^{-1} та параметром зв'язку в $\tilde{H}_i$, часова еволюція p_0, описана рівнянням (3.28), якісно відрізняється від еволюції операторів $p_{\alpha>0}$. Еволюція p_0 визначається модою оператора $\hat{L}_M$ і $\tilde{H}_i$, і тому затухання p_0 характеризується часом τ_M. На відміну від цього, швидкість релаксації p_α для $\alpha \neq 0$ визначається значеннями $\mathrm{Re}\,\lambda_m^\alpha \geq \tau_S^{-1}$. Тому з часом τ_S всі оператори $p_{\alpha>0}$ наближаються до квазістаціонарних розв'язків рівняння (3.28) для $\alpha > 0$, розрахованих для значення p_0. Більше того, елементи матриці $\{p_{\alpha>0}^{mm'}\}$ стають малими порівняно з елементами матриці p_0. Це є наслідком того, що $\hat{k}_{\alpha\beta} \propto \tau_M^{-1}$ і $\hat{\nu}_{\alpha\beta} \propto V$, і як ми припускаємо, $\mathrm{Re}[\lambda_m^{\alpha>0}]$ є великим у порівнянні з $\tau_M^{-1}, |V|$; як ми побачимо нижче, фактичне обмеження на $|V|$ є значно слабшим.

3.1.3. Наближення середнього поля

У цьому пункті нас цікавить режим, коли типові амплітуди коливань великі, так що динаміка коливальної моди є напівкласичною. Тоді стан моди може бути описаний її амплітудою та фазою, які, в свою чергу, можуть бути введені за допомогою представлення Вігнера матриці густини. Почнемо аналіз з припущення, що флуктуації невеликі і їх можна не враховувати. Тут ми виводимо детерміновані рівняння руху для амплітуди та фази та знаходимо стійкі стани. Далі вивчаємо виникнення мультистабільності та знаходимо діаграми біфуркації, які дають взаємозв'язок між частотою та силою накачки, коли змінюється кількість стабільних станів. Динаміка вібраційної моди поблизу точок біфуркації визначається повільними змінними і має просту універсальну форму.

3.1.3.1. Напівкласичне наближення для моди і стаціонарні стани

Оператор p_0 представляє головний інтерес, оскільки він визначає матрицю густини моди (3.33). Виходячи з аргументів попереднього пункту, для часів $t \gg \tau_S$, в головному наближенні за параметром τ_S/τ_M, його часова еволюція визначається рівняннями

$$\hat{\Lambda}_m \chi_m^0 = 0, \qquad \dot{p}_0 = \hat{L}_M p_0 + i\hat{\nu}_{00} p_0. \tag{3.34}$$

Фізична картина, що стоїть за рівнянням (3.34), полягає в тому, що система $\mathcal{S}$ досягає квазірівноваги з розподілом χ_m^0 для даного стану m моди, а потім мода (і система) повільно еволюціонує до нового стаціонарного стану, заданого рівнянням

$$\hat{L}_M p_0 + i\hat{\nu}_{00} p_0 = 0. \tag{3.35}$$

Супероператор $\hat{\nu}_{00}$, який описує вплив зв'язку з $\mathcal{S}$ на динаміку моди, має просту форму. Дійсно, $\chi_{0m}^\dagger = \hat{I}_S$, тоді як χ_m^0 дає стаціонарну матрицю густини для системи $\mathcal{S}$ у випадку моди, що знаходиться в стані $|m\rangle$. Зокрема, для двох станів моди $|m\rangle$ і $|m'\rangle$, з

$$m, m' \gg 1, \qquad |m - m'| \ll m, \tag{3.36}$$

рівняння (3.22) і (3.29) дають головне наближення за $(m - m')$:

$$\begin{gathered} \langle m|\hat{\nu}_{00} p_0|m'\rangle \approx (m' - m)\nu(m)\, p_0^{mm'}, \\ \nu(m) \equiv \langle \partial_m \hat{H}_i(m)\rangle_S, \end{gathered} \tag{3.37}$$

де

$$\langle \hat{O}(m)\rangle_S \equiv \mathrm{Tr}_S[\chi_m^0 \hat{O}(m)] \tag{3.38}$$

є середнім значенням у стаціонарному стані системи $\mathcal{S}$, що виконується для моди в заданому стані m і

$$\partial_m \hat{H}_i(m) \approx \hat{H}_i(m+1) - \hat{H}_i(m) \approx \hat{H}_i(m) - \hat{H}_i(m-1). \tag{3.39}$$

Величина $\nu(m)$ характеризує зміну міжрівневої відстані моди внаслідок її зв'язку із системою $\mathcal{S}$. Ця зміна впливає на розподіл за станами моди $|m\rangle$ в зовнішньому полі шляхом налаштування моди ближче або далі від резонансу. У свою чергу, це впливає на розподіл системи χ_m^0, яка сама визначає $\nu(m)$. Саме цей механізм призводить до мультистабільності відгуку в наближенні середнього поля.

Будемо вважати, що навантаження моди є досить сильним, щоб вона збуджувалась до станів з $m \gg 1$. Як буде перевірено нижче, характерна ширина розподілу за m тоді мала в порівнянні з характерним значенням m. Зручно писати $p_0^{mm'}$ і

$$\rho_M^{mm'} = \langle m|p_0 + p_0^\dagger|m'\rangle \tag{3.40}$$

у представленні Вігнера,

$$\begin{aligned} p_0(\mu,\phi) &= \sum_{m,m'} p_0^{mm'} \delta_{\mu,(m+m')/2} e^{i(m-m')\phi}, \\ \rho_M(\mu,\phi) &= \sum_{m,m'} \rho_M^{mm'} \delta_{\mu,(m+m')/2} e^{i(m-m')\phi}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

У розглянутому випадку параметр «центру мас» $\mu = (m+m')/2$ приймає велике значення, $\mu \gg 1$, і основний внесок у $p_0(\mu,\phi)$ походить від доданків з $|m-m'| \ll \mu$.

В рівнянні (3.34) для елементів матриці $p_0^{mm'}$ можна замінити на $p_0(\mu,\phi)$, враховуючи рівняння (3.41), і використовувати напівкласичне наближення, в якому μ є квазінеперервним. Подібний аналіз можна зробити для оператора $p_0^\dagger$. Це дозволяє обчислити матрицю густини моди $\rho_M(\mu,\phi)$.

З умови нормалізації, в напівкласичному наближенні рівняння для ρ_M має мати вигляд рівняння неперервності

$$\partial_t \rho_M(\mu, \phi) = -\partial_\mu j_\mu - \partial_\phi j_\phi. \tag{3.42}$$

Тут $\mathbf{j} \equiv (j_\mu, j_\phi)$ — струм ймовірності у змінних (μ, ϕ). В наближенні (3.37) воно визначається операторами $\hat{L}_M$ і $\nu(\mu)$, з $\mu \approx m$. Як правило, він має доданок, пропорційний до $\rho_M(\mu, \phi)$, але не містить похідних від ρ_M, дифузійну частину, яка містить перші похідні, і похідні вищих порядків. Розкладання за порядком похідних — це розкладання за $1/\mu$, і більше того, в $\mu^{-1}\tau_S/\tau_M$, як це буде також видно з прикладу нижче. Зазначимо, що це не класична границя. Коефіцієнт дифузії має внесок від квантових коливань, які будуть домінуючими у прикладі нижче. Очевидно, що динаміка системи $\mathcal{S}$ суто квантова.

Для першого порядку за $1/\mu$, слід дотримуватися в $\mathbf{j}$ лише умови $\propto \rho_M$, тобто $\mathbf{j}(\mu, \phi) \approx \mathbf{K}(\mu, \phi)\rho_M(\mu, \phi)$. Вектор $\mathbf{K} = (K_\mu, K_\phi)$ має значення сили, що рухає моду, у системі що розглядається. З урахуванням явної форми $\hat{L}_M$ і $\hat{\nu}_{00}$, з рівнянь (3.34) – (3.41) отримаємо

$$\begin{aligned} K_\mu &\approx -f_{\rm diss}(\mu) - F_M \mu^{1/2} \sin\phi, \\ K_\phi &\approx -(F_M/2)\mu^{-1/2}\cos\phi - \delta\omega_M + \nu(\mu). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Функція $f_{\rm diss}(\mu) \propto \tau_M^{-1}$ описує ефект розсіювання моди. Для розсіювання, заданого стандартним оператором лінійного тертя (3.9), маємо $f_{\rm diss}(\mu) = 2\Gamma_M \mu$.

У більш загальному випадку залежність від μ може бути більш складною. Однак важливо, що, оскільки в нашій моделі оператор дисипації не залежить від навантаження, термостат сам по собі не має необхідної фази вібрації, і, отже, $f_{\rm diss}$ не залежить від ϕ. Зв'язок з термостатом призводить до дифузії фази, декогеренції, однак у цьому пункті ми не розглядаємо дифузію (це буде розглянуто пізніше), а відповідні умови відсутні в рівнянні (3.43).

Наближення $\mathbf{j} = \mathbf{K}\rho_M$ відповідає наближенню середнього поля. Рівняння руху середнього поля для змінних μ і ϕ є

$$\dot{\mu} = K_\mu, \qquad \dot{\phi} = K_\phi. \tag{3.44}$$

Вони можуть мати стаціонарні розв'язки $\mathbf{K} = \mathbf{0}$, які описують стаціонарні стани змушених коливань моди. В принципі, рівняння руху типу (3.44) також можуть мати періодичні розв'язки, які відповідають періодичним коливанням у осцилюючій системі. Однак для таких розв'язків потрібно $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{K} > 0$ хоча б десь у фазовому просторі. З рівняння (3.43), вираз

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{K} = -df_{\mathrm{diss}}/d\mu \tag{3.45}$$

має такий самий вигляд, як за відсутності навантаження, коли єдиним стаціонарним станом є $\mu = 0$, а тому $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{K} < 0$. Положення стаціонарних станів μ_{st} за наявності модуляції задаються

$$G(\mu_{\mathrm{st}}) = F_M^2, \qquad G(\mu) = \mu^{-1} f_{\mathrm{diss}}^2(\mu) + 4\mu[\nu(\mu) - \delta\omega_M]^2. \tag{3.46}$$

З рівняння (3.44), стаціонарний стан (3.46) є стабільним, якщо $dG/d\mu > 0$. За відсутності модуляції стан $\mu = 0$ (тобто стан нульової амплітуди) стабільний з фізичних міркувань, і, отже, умова $dG/d\mu > 0$ завжди виконується для малих μ; цілком загалом $f_{\mathrm{diss}} \propto \mu$ для $\mu \to 0$. Якщо функція $G(\mu)$ є монотонною, рівняння (3.46) має один розв'язок, і мода має лише один стабільний стан змушених коливань для всіх амплітуд модуляції F_M.

3.1.3.2. Багатостабільність змушених коливань

Для немонотонних $G(\mu)$ мода може мати кілька стабільних коливальних станів для даного F_M, тобто може спостерігатися бі- або мультистабільність. Приклад, коли $\nu(\mu)$ задається зв'язком з дворівневою системою, показаний на рис. 3.1. Як правило, для великих μ функція $G(\mu)$ зростає з ростом μ, за винятком випадку, коли $|\delta\omega_M - \nu(\mu)|$ зменшується принаймні так швидко, як $\mu^{-1/2}$, а $f_{\rm diss}^2/\mu$ також не збільшується з μ. Тоді, оскільки $dG/d\mu > 0$ як для малого, так і для великого μ, він може мати лише парну кількість нулів. Ці нулі дають положення сідлових точок біфуркації μ_B,

$$dG/d\mu = 0, \qquad \mu = \mu_B. \tag{3.47}$$

Як видно з рівнянь (3.46) і (3.47), якщо амплітуда навантаження F_M налаштована на біфуркаційне значення $F_M^{(B)} = G(\mu_B)^{1/2}$, для $\mu = \mu_B$ (і для відповідних ϕ_B, заданих рівнянням $\mathbf{K} = \mathbf{0}$) стабільні та нестабільні стаціонарні стани зливаються, $\dot{\mu} = \dot{\phi} = 0$. Таким чином, кількість співіснуючих стабільних станів змінюється на одиницю, коли F_M переходить через $F_M^{(B)}$.

Значення $\mu_{\rm st}$ у стабільних станах залежать від сили руху, що діє на моду, F_M. Таким чином, ми розглядаємо гілки стабільних станів як функції F_M. Ці гілки зливаються з гілками нестабільних станів у точках біфуркації (3.47). Випадок, коли є дві гілки стабільного стану і одна гілка нестабільних станів, відповідає вібраційній бістабільності та знайомій S-подібній залежності амплітуди вібрації моди від амплітуди сили [289]. Для моделі дисперсійно зв'язаної моди та ДРС, що обговорюється у підпункті 3.1.3.2, ця залежність показана на вставці рис. 3.1. В області бістабільності $G(\mu)$ має два екстремуми. Якщо $G(\mu)$ має чотири екстремуми для заданого набору параметрів поля модуляції, мода має три стабільні стани, як видно на головній панелі рис. 3.1.

Самі біфуркаційні значення $F_M^{(B)}$ залежать від інших параметрів системи, зокрема від відстройки частоти сили $\delta\omega_M$. Відповідні криві біфуркації показані на рис. 3.3. Кожного разу, коли будь-яку з цих кривих перетинають змінні параметри (F_M або $\delta\omega_M$), кількість стабільних та нестабільних станів змінюється на одиницю. Дані відносяться до моди, дисперсійно зв'язаної з дворівневою системою, з гамільтоніаном (3.6) і з дисипацією, описаною лінійним тертям (3.9). Права пунктирна лінія показує значення $\delta\omega_M$, де система є стабільною з різними значеннямиF_M; це $\delta\omega_M$ відповідає основній частині рис. 3.1. Ліва пунктирна лінія показує $\delta\omega_M$, використану на вставці рис. 3.1.

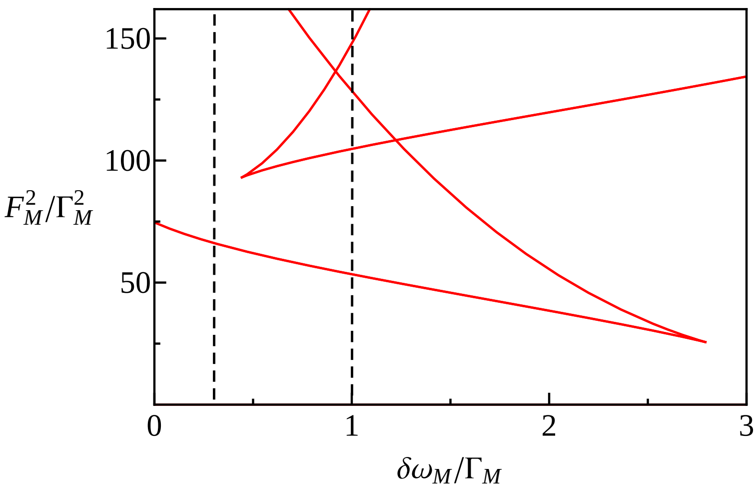

Рис. 3.3. Біфуркаційна діаграма, що показує залежність біфуркаційного значення сили $F_M^{(B)}$ від відстройки частоти сили $\delta\omega_M = \omega_F - \omega_M$, згідно з рівняннями (3.46) та (3.47). Параметри такі ж, як на рис. 3.1.

Біфуркаційні криві утворюють пари, які виходять з точки перетину місця з'єднання кривих [290]. Такі точки перетину аналогічні критичним точкам на лініях фазових переходів першого порядку. Якщо ми знаходимося близько до точки перетину і обходимо її в площині $(F_M, \delta\omega_M)$, не перетинаючи кривих біфуркації, кількість стаціонарних станів не змінюється. Якщо, з іншого боку, ми рухаємось між однаковими початковим і кінцевим значеннями $(F_M, \delta\omega_M)$, але перетинаємо криві біфуркації, які зливаються в точці вершини, ми проходимо через область, де існує стійкий і нестійкий стани. На кривих біфуркації цей нестабільний стан повинен зливатися з двома різними стабільними станами. У точці перетину всі три стани зливаються разом.

Розуміння цієї топології робить графік рис. 3.3 зручним. Зокрема, якщо рухатися вгору вздовж правої пунктирної лінії, ми починаємо з одного стабільного стану для малих F_M, тоді додаються стабільний і нестабільний стан, коли перетинається найнижча крива біфуркації $F_M^{(B)}(\delta\omega_M)$. Коли наступну криву біфуркації перетинають, оскільки вона виходить з іншої точки перетину, додається інший стабільний і нестабільний стан. Тоді існує три стабільні та два нестабільні стани. Коли перетиняється ще вища крива $F_M^{(B)}(\delta\omega_M)$, перший нестабільний стан зливається з одним із стабільних станів і зникає, так що система тепер має два стабільних і один нестабільний стан. Коли перетинається найвища крива $F_M^{(B)}(\delta\omega_M)$, залишається лише один стабільний стан. Така поведінка точно відповідає рис. 3.1.

«Гострі кінці», утворені кривими біфуркації на рис. 3.3, відкриваються в протилежні сторони. Як випливає з вищезазначеного аналізу, тристабільність існує лише в діапазоні, де гострі кінці перекриваються. Насправді гострі кінці не йдуть у нескінченність, вони закриваються, але це відбувається занадто далеко, щоб показати на рисунку.

3.1.3.3. Повільна динаміка поблизу точки біфуркації

Тепер ми розглянемо окіл точки біфуркації, тобто припустимо, що F_M близька до $F_M^{(B)}$, і розложимо праву частину рівнянь руху (3.43) та (3.44) за μ_B, ϕ_B. Тут значення ϕ_B задається відношенням $K_\mu = K_\phi = 0$, в якому $\mu = \mu_B$ і $F_M = F_M^{(B)}$. Якщо ми обмежимо розкладання K_μ, K_ϕ лінійними членами за

$$\Delta\mu = \mu - \mu_B, \qquad \Delta\phi = \phi - \phi_B, \tag{3.48}$$

виявимо, що одне із власних значень рівнянь (3.44) для $\Delta\dot{\mu}, \Delta\dot{\phi}$ дорівнює нулю в точці біфуркації. Відповідно, для параметрів, близьких до точки біфуркації, комбінація динамічних змінних μ, ϕ стає «повільною», тобто, існує м'яка мода [290]. Інше власне значення рівнянь (3.44) залишається порядку τ_M^{-1} у точці біфуркації (зверніть увагу, що ми раніше визначали τ_M як час релаксації моди $\mathcal{M}$ далеко від точки біфуркації).

За час порядку τ_M лінійна комбінація $\Delta\mu, \Delta\phi$, що відповідає великому (негативному) власному значенню рівняння (3.44), загасає. Після цього загасання встановлюється співвідношення між $\Delta\mu$ і $\Delta\phi$, яке до першого порядку можна отримати, лінеаризуючи рівняння (3.44) у $\Delta\mu, \Delta\phi$ та встановлюючи $\Delta\dot{\mu} = \Delta\dot{\phi} = 0$, з $F_M = F_M^{(B)}$. Це дає $\Delta\phi = \xi_{\mu_B}\Delta\mu$, де

$$\xi_{\mu_B} = -\partial_\mu(f_{\mathrm{diss}}/\sqrt{\mu})/2\sqrt{\mu}[\nu(\mu) - \delta\omega_M] \tag{3.49}$$

з $\mu = \mu_B$. Повільна динаміка поблизу точки біфуркації визначається величиною

$$Y = (2\mu)^{1/2}\sin\phi, \tag{3.50}$$

м'якою модою, яка є квадратурною (позафазовою) складовою змушених коливань. У точці біфуркації відхилення $\Delta Y = Y - Y_B$ на Y від його біфуркаційного значення

$$Y_B = (2\mu_B)^{1/2}\sin\phi_B \tag{3.51}$$

є статичним, до лінійного порядку за $\Delta\mu, \Delta\phi$ маємо:

$$\Delta\dot{Y} = \partial_\mu Y\Delta\dot{\mu}|_{\mu=\mu_B} + \partial_\phi Y\Delta\dot{\phi}|_{\mu=\mu_B} = 0 + \mathcal{O}(\Delta\mu^2, \Delta\phi^2). \tag{3.52}$$

Близько до точки біфуркації динаміка м'якої моди регулюється нелінійним рівнянням

$$\Delta\dot{Y} = -\frac{\partial U}{\partial Y}, \qquad U(Y) = -\frac{1}{3}b\Delta Y^3 + (F_M - F_M^{(B)})\Delta Y/\sqrt{2},$$
$$b = (F_M^{(B)}/8\sqrt{2})(\partial_\mu f_{\mathrm{diss}})^{-2}\partial_\mu^2 G, \tag{3.53}$$

де похідні у виразі для b обчислюються для $\mu = \mu_B$. Як видно з рівняння (3.53), якщо

$$b(F_M - F_M^{(B)}) > 0, \tag{3.54}$$

мода має стабільний і нестабільний стаціонарні стани. Ці стани об'єднуються для $F_M = F_M^{(B)}$ і зникають для F_M на протилежній стороні від $F_M^{(B)}$.

3.1.4. Неадіабатичні коливання та перемикання між стабільними станами

Одним з найвідоміших неадіабатичних ефектів у квантових системах є неадіабатичні переходи між стабільними станами [291]. У випадку, який ми вивчаємо тут, неадіабатичні поправки до теорії середнього поля також ведуть до переходів між стабільними станами моди. У звичайному уявленні неадіабатичні переходи зазвичай передбачають тунелювання при низькій температурі. В той же час, у нашому випадку неадіабатичні переходи викликані флуктуаціями, що виникають разом із релаксацією [292]. Зокрема, це флуктуації, обумовлені випадковістю випромінення та поглинання збуджень термостату системою $\mathcal{S}$. Ці коливання призводять до флуктуацій міжрівневої відстані моди через зв'язок між модою та системою. Таким чином, вони класично відповідають шуму частоти моди. Незважаючи на те, що шум має квантове походження, він викликає активовані подібні переходи між станами через ефективний бар'єр у фазовому просторі, див. рівняння (3.75).

Параметр неадіабатичності — це відношення часів релаксації τ_S/τ_M. Наш аналіз буде заснований на теорії збурень. Ми виразимо функції $p_{\alpha>0}$ в рівнянні для матриці густини моди (3.28) через p_0, а потім підставимо їх у рівняння (3.34) для p_0.

Основні неадіабатичні поправки походять від доданка $\hat{\nu}_{\alpha\beta} p_\beta$ в рівнянні (3.28); доданки $\hat{k}_{\alpha\beta}p_\beta$ пропорційні τ_M^{-1} і, таким чином, призводять до невеликих поправок до параметрів оператора $\hat{L}_M$. У першому порядку за τ_S/τ_M, для часу $t \gg \tau_S$ можна стверджувати, що $\dot{p}_\alpha = 0$ для $\alpha > 0$, що дає повільно змінний в часі розв'язок

$$p_{\alpha>0} \approx i(\lambda^\alpha)^{-1}\hat{\nu}_{\alpha 0}p_0. \tag{3.55}$$

У свою чергу, це дає додатковий доданок в рівнянні (3.34) для p_0, який тепер має вигляд $\dot{p}_0 = \hat{L}_M p_0 + i\hat{\nu}_{00}p_0 + \hat{\mathcal{D}}p_0$ з

$$\hat{\mathcal{D}}p_0 = -\sum_{\alpha>0}\hat{\nu}_{0\alpha}[(\lambda^\alpha)^{-1}\hat{\nu}_{\alpha 0}p_0] \tag{3.56}$$

(тут супероператор $\hat{\nu}_{0\alpha}$ діє на оператора всередині дужок).

Нас зацікавлять елементи матриці $\langle m|\hat{\mathcal{D}}p_0|m'\rangle$ для переходу між станами мод $|m\rangle$ і $|m'\rangle$. Розрахунок спрощується тим, що оператори $\tilde{H}_i$, $\chi_\alpha^\dagger$ і χ^β, які входять у $\hat{\nu}_{\alpha\beta}$, діагональні за m. Ми розглянемо напівкласичну область великих $m, m' \gg 1$ і

$$|m - m'| \ll \mu = (m + m')/2. \tag{3.57}$$

Як сказано вище, в цій області можна припустити, що μ, m є квазінеперервними змінними і розширюють гамільтоніан зв'язку,

$$\hat{H}_i(m) - \hat{H}_i(m') \approx (m - m')\partial_\mu \hat{H}_i(\mu). \tag{3.58}$$

Тоді у головному наближенні за $m - m'$ маємо

$$\langle m|\hat{\mathcal{D}}p_0|m'\rangle \approx -(m-m')^2 p_0^{mm'} \sum_{\alpha>0} \mathrm{Tr}_S\left(\chi_\mu^\alpha \partial_\mu \hat{H}_i\right) \times$$
$$\times \mathrm{Tr}_S\left(\chi_{\alpha\mu}^\dagger \chi_\mu^0 \partial_\mu \hat{H}_i\right)/\lambda_\mu^\alpha. \tag{3.59}$$

Окрім доданка першого порядку, що присутній у рівнянні (3.37), функція $\langle m|\hat{\nu}_{00}p_0|m'\rangle$ у рівнянні для матричних елементів $\dot{p}_0$ також має доданок $\propto (m-m')^2$, тобто

$$i\langle m|\hat{\nu}_{00}p_0|m'\rangle \approx i(m'-m)\nu(\mu)\, p_0^{mm'} - \frac{i}{2}(m'-m)^2 \mathrm{Tr}_S[(\partial_\mu \chi_\mu^0)\,(\partial_\mu \hat{H}_i)]\, p_0^{mm'}. \quad (3.60)$$

Корисно додатково перетворити доданок $(m'-m)^2$ у цьому виразі, обчислюючи величину $\partial_\mu \chi_\mu^0$, яка з'являється всередині сліду. Це можна зробити, формально відділивши рівняння $\hat{\Lambda}_m \chi_m^0 = 0$ за m, за допомогою рівняння (3.15), а також шляхом розгортання $\partial_m \chi_m^0$ у χ_m^α. Результат схожий на праву частину рівняння (3.59), за винятком додаткового коефіцієнта $-(1/2)$ і того факту, що у другому сліді необхідно замінити добуток операторів χ_μ^0 та $\partial_\mu \hat{H}_i$ на їх комутатор.

Зазначимо, що оператор $\hat{A}(m)$ у змінних системи $\mathcal{S}$ може бути записаний як

$$\hat{A}(m) = \sum_\alpha \chi_{\alpha m}^\dagger \, \mathrm{Tr}_S \left[\chi_m^\alpha \hat{A}(m)\right]. \quad (3.61)$$

Крім того, зручно розглядати оператори системи $\mathcal{S}$ у представленні Гейзенберга у осцилюючій системі. З рівнянь (3.15) та (3.16), у цьому представленні маємо

$$\chi_m^\alpha(t) = \exp(-\lambda_m^\alpha t)\chi_m^\alpha(0); \quad (3.62)$$

для $t \geq 0$ так само

$$\chi_{\alpha m}^\dagger(t) = \exp(-\lambda_m^\alpha t)\chi_{\alpha m}^\dagger(0). \quad (3.63)$$

Тоді можна визначити

$$\hat{A}(m;t) = \sum\nolimits_\alpha \chi_{\alpha m}^\dagger \exp(-\lambda_m^\alpha t)\, \mathrm{Tr}_S \left[\chi_m^\alpha \hat{A}(m)\right].$$

Використовуючи це визначення, отримуємо

$$\langle m|i\hat{\nu}_{00}p_0+\hat{\mathcal{D}}p_0|m'\rangle \approx [i(m'-m)\nu(\mu)-(m'-m)^2D_\mu]p_0^{mm'} \tag{3.64}$$

з

$$D_\mu = \mathrm{Re}\int_0^\infty dt \Big\langle \Big[\partial_\mu \hat{H}_i(\mu;0) - \langle \partial_\mu \hat{H}_i(\mu)\rangle_S\Big] \times \Big[\partial_\mu \hat{H}_i(\mu;t) - \langle \partial_\mu \hat{H}_i(\mu)\rangle_S\Big]\Big\rangle_S . \tag{3.65}$$

Тут ми використали, що для дійсних власних значень λ_m^α оператори χ_m^α, $\chi_{\alpha m}^\dagger$ є ермітовими, тоді як для пар комплексно спряжених λ_m^α є відповідні пари ермітово спряжених операторів χ_m^α, $\chi_{\alpha m}^\dagger$. За побудовою як середнього значення корелятора того самого оператора на станах системи $\mathcal{S}$, коефіцієнт $D_\mu > 0$. Очевидно, що D_μ є квадратичним за константою дисперсійного зв'язку V, що міститься в $\tilde{H}_i$, і $D_\mu \propto \tau_S x$, тобто, $D_\mu \sim V^2\tau_S$. Зауважимо, що D_μ, який виконує роль коефіцінта дифузії, є малим, коли час релаксації системи $\mathcal{S}$ дуже короткий. Ця залежність демонструє рухове звуження, яке відбувається, коли система $\mathcal{S}$ швидко переключається між своїми станами.

З урахуванням доданків $\propto (m-m')^2$ у рівнянні для $p_0^{mm'}$, рівняння для матриці густини $\rho_M = p_0 + p_0^\dagger$ в змінних (μ,ϕ) набуває форми рівняння Фоккера-Планка

$$\dot{\rho}_M = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{K}\rho_M) + D_\mu \partial_\phi^2 \rho_M, \quad \rho_M \equiv \rho_M(\mu,\phi), \tag{3.66}$$

де вектор $\boldsymbol{\nabla}$ має компоненти ∂_μ,∂_ϕ, а вектор $\mathbf{K}$ задано рівнянням (3.43). Функція ρ_M задовольняє напівкласичної умові нормування

$$(2\pi)^{-1}\int d\phi\, d\mu \rho_M(\mu,\phi) = 1. \tag{3.67}$$

Ми не розглядаємо дифузійний доданок, який походить від прямого зв'язку моди з термостатом, який описується оператором $\hat{L}_M$. Цей доданок дає внесок у коефіцієнт дифузії фази D_μ, пропорційний τ_M^{-1}; крім того, і що важливо, цей внесок виявляється $\propto 1/\mu \ll 1$. Оператор $\hat{L}_M$ також вводить дифузію вздовж змінної μ, з коефіцієнтом дифузії, для якого оцінка дає τ_M^{-1}/μ. Врахування цієї дифузії не змінить наведений нижче аналіз, а зокрема просто перенормує коефіцієнт D_{μ_B} у рівняннях (3.73) і (3.75) нижче.

Припускаємо, що дифузія слабка. Це означає, що розподіл ρ_M у стаціонарному стані має вузькі піки при стабільних станах змушених коливань, які задаються умовою $\mathbf{K} = \mathbf{0}$. З рівняння 3.66, для $D_\mu \tau_M \ll 1$, піки є гауссівськими біля максимуму. Їх характерна ширина становить $(D_\mu \tau_M)^{1/2}$, і піки в різних стабільних станах добре відокремлені один від одного.

Далі від стабільних станів стаціонарний розв'язок рівняння (3.66) можна шукати у формі ейконалу:

$$\rho_M = \exp[-R(\mu, \phi)/D_\mu]. \tag{3.68}$$

У першому порядку за D_μ функція R не залежить від D_μ і може бути знайдена з нелінійного рівняння виду рівняння Гамільтона-Якобі [75, 293, 294].

З повного неадіабатичного рівняння для операторів мод p_α, рівняння (3.28), видно, що умова малості відношення $|p_{\alpha>0}/p_0|$ вимагає малості параметра $|p_{\alpha>0}/p_0|$, де $\overline{\Delta m}$ — типова ширина розподілу за m, або еквівалентно,

$$(D_\mu \tau_S)^{1/2} |\partial_\phi \ln p_0| \ll 1. \tag{3.69}$$

Ця оцінка $|p_{\alpha>0}/p_0|$ враховує лише головне наближення, яке описується оператором $\hat{\nu}_{\alpha\beta} p_\beta$, і застосовується в діапазоні часу $t \gg \tau_S$ де всі $p_{\alpha>0}$ досягли стаціонарних значень для даного p_0. З рівняння (3.68), $|\partial_\phi \ln p_0| \propto |\partial_\phi R|/D_\mu$. Біля піків ρ_M, де

$$|\partial_\phi R|/D_\mu \lesssim (D_\mu \tau_M)^{-1/2}, \tag{3.70}$$

умова $|p_{\alpha>0}/p_0| \ll 1$ зводиться до $(\tau_S/\tau_M)^{1/2} \ll 1$, що було нашим головним припущенням увесь час.

На дальньому хвості розподілу маємо

$$|\partial_\phi R|/D_\mu \sim (D_\mu \tau_M)^{-1} \gg 1, \tag{3.71}$$

а тому відношення $|p_{\alpha>0}/p_0| \propto (D_\mu\tau_M)^{-1/2}(\tau_S/\tau_M)^{1/2}$ не обов'язково невелике. Якщо це так, теорія адіабатичних збурень руйнується, і далекий хвіст розподілу не описується рівнянням (3.66). Однак, як ми побачимо, у найцікавішому режимі вивчення переключень між метастабільними станами, де система знаходиться близько до точки біфуркації, $|\partial_\phi R| \ll \tau_M^{-1}$.

Рівняння (3.66) дозволяє у простому явному вигляді знайти швидкість переходу з метастабільного стану поблизу сідлової точки біфуркації, де цей стан зникає. Близько цієї точки динаміка визначається повільною змінною $Y(\mu, \phi)$, див. рівняння (3.53). Розподіл ρ_M — це гауссівський пік із шириною $\sim (D_\mu\tau_M)^{1/2}$ у напрямку, поперечному до повільної змінної Y, тоді як у напрямку Y він набагато ширший [292]. Розподіл по змінній Y

$$\rho_M(Y) = (2\pi)^{-1}\int d\mu d\phi \rho_M(\mu,\phi)\delta[Y(\mu,\phi) - Y] \tag{3.72}$$

можна знайти, слідуючи аргументам роботи [292]. У першому порядку за $D_\mu\tau_M$ з рівнянь (3.53) і (3.66) отримуємо

$$\dot{\rho}_M(Y) = \partial_Y[\rho_M(Y)\partial_Y U(Y)] + D_{\mu B}\partial_Y^2 \rho_M(Y), \tag{3.73}$$

де $D_{\mu,B} = D_\mu(\partial_\phi Y)_B^2$ – коефіцієнт дифузії вздовж осі Y, а

$$(\partial_\phi Y)_B = (2\mu_B)^{1/2}\cos\phi_B \tag{3.74}$$

– це похідна від $Y(\mu, \phi)$, обчислена в точці біфуркації.

Рівняння (3.73) дозволяє знайти швидкість переходу, W, із метастабільного стану поблизу точки біфуркації. Цей показник описується теорією Крамерса [295]:

$$W = Ce^{-R_A/D_{\mu,B}}, \quad R_A = \frac{2^{5/4}}{3}\left[\frac{(F_M - F_M^{(B)})^3}{b}\right]^{1/2} \tag{3.75}$$

з

$$C = (2\pi)^{-1}\left[(F_M - F_M^{(B)})b/\sqrt{2}\right]^{1/2}. \tag{3.76}$$

Як видно з рівняння (3.75), енергія активації переходу біля точки біфуркації визначається відстанню до точки біфуркації $F_M - F_M^{(B)}$ у степені 3/2. Це характерно для випадку, коли флуктуації викликаються гауссівським шумом. У цьому випадку цей шум походить від квантових флуктуацій системи $\mathcal{S}$, які модулюють частоту моди $\mathcal{M}$.

Проведений аналіз може бути застосований, наприклад, до задачі про моду, зв'язану з дворівневою системою. Якісний опис динаміки середнього поля цієї моделі було дано в підпункті 3.1.3.2. Викладений вище послідовний аналіз середнього поля приводить до рівнянь (3.11) і (3.14), з m_{st} заміненим стаціонарним значенням вігнерівської змінної μ_{st} з рівняння (3.46). Після проведення цієї заміни рівняння (3.14) та (3.46) збігаються. Це виправдовує результати для мультистабільності моди, з'єднаної з ДРС, представлені в пункті 3.1.1.

Модель середнього поля не враховувала впливу квантових флуктуацій ДРС. Коли затухання моди повільне, дифузія, спричинена цими коливаннями, описується рівнянням (3.66). Використовуючи рівняння Блоха для динаміки ДРС, можна показати, що ефективний коефіцієнт дифузії коливальної фази моди, який визначається рівнянням (3.65), має вигляд

$$D_\mu = -V^2(\langle s_z\rangle_S/4\Gamma_S) \times \left[1 - 4\langle s_z\rangle_S^2\left(1 - \frac{1}{4}F_S^2\frac{\gamma^2 - \delta\omega_S^2(\mu)}{[\gamma^2 + \delta\omega_S^2(\mu)]^2}\right)\right], \tag{3.77}$$

де $\langle s_z \rangle_S$ задано рівнянням (3.11), а m замінено на μ. З рівняння (3.11) можна показати, що $D_\mu > 0$. Зрозуміло, що $D_\mu \propto V^2 \Gamma_S^{-1}$ (див. також обговорення нижче рівняння (3.65)). Умовою застосовності підходу є $D_\mu \tau_M \sim V^2/\Gamma_M \Gamma_S \ll 1$. На рис. 3.4 показано нормовані значення D_μ вздовж кривої відгуку середнього поля на рис. 3.1, що описує мультистабільність. Як видно з цього рисунка, D_μ/Γ_M залишається невеликим для розглянутого прикладу. Значення D_μ на стабільній та нестійкій гілках відображається суцільними та пунктирними лініями відповідно. Дифузія спричинена квантовими коливаннями ДРС, де ми встановлюємо число Планка $\bar{n}(\omega_S) = 0$. Точка, де верхня пунктирна лінія приєднується до найнижчої суцільної лінії ($F_M^2/\Gamma_M^2 \approx 54$), випадково лежить дуже близько до суцільної лінії, яка починається з $F_M = 0$ і відповідає найнижчій гілці $\mu_{\rm st}(F_M)$ на рис. 3.1.

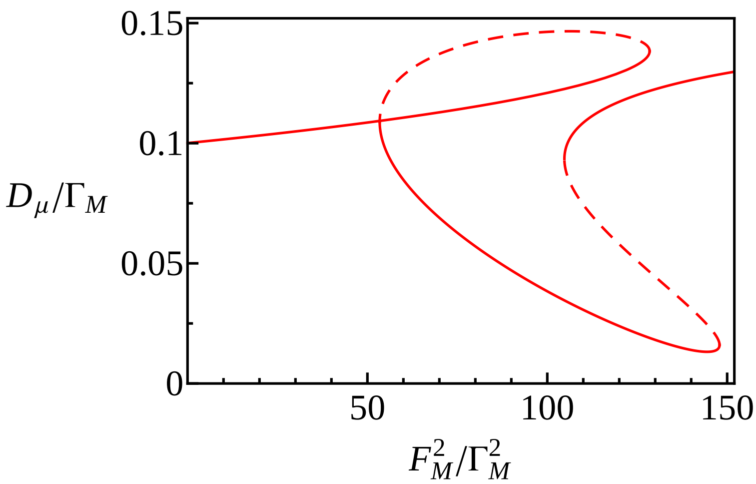

Рис. 3.4. Коефіцієнт дифузії D_μ фази моди, зв'язаної з ДРС, нормований на швидкість затухання моди Γ_M, як функція нормованої змушуючої сили. Параметри: $\bar{n}(\omega_S) = 0$, решта параметрів такі ж як на рис. 3.1.

Ми наголошуємо, що для числа Планка ДРС $\bar{n}_S \to 0$, шум, що описується параметром D_μ, є чисто квантовим. Шум обумовлений випадковістю спонтанних переходів між станами ДРС з відповідним випромінюванням збуджень термостату. В середньому переходи призводять до дисипації ДРС, але оскільки вони відбуваються випадковим чином, вони також викликають флуктуації.

3.1.5. Приклади зв'язку моди і дворівневої системи

Наш аналіз стосується випадку, коли швидкість релаксації системи велика порівняно зі швидкістю релаксації моди. Цей випадок представляє найбільший інтерес для широкого кола вивчених на даний час складних систем. Обговоримо кілька прикладів, для яких можуть задовольнитися умові, за яких застосовуються отримані результати.

Приклад 1: Зарядовий кубіт на подвійних квантових точках заряду, з'єднаний з модою надпровідної порожнини. Така система була вивчена в посиланні [98], з частотою моди $\omega_M/(2\pi) = 6{,}2$ ГГц, тривалістю життя моди $\tau_M = 1 \times 10^{-7}$ с, частотою переходу кубіта $\omega_S/(2\pi) = (2 - 7)$ ГГц, тривалістю життя кубіта $\tau_S = 1{,}5 \times 10^{-8}$ с і силою зчеплення Джейнса-Каммінгса $g_c/(2\pi) = 30$ МГц. Добротність моди порожнини становила лише $Q = 2000$, вже задовольняючи умові $\tau_M/\tau_S \gtrsim 1$. З очікуваними вдосконаленнями пристрою буде досягнуто умови $\tau_M/\tau_S \gg 1$. Дисперсійний зв'язок V в нашій теорії може бути налаштований за рахунок розстройки частот кубіта і порожнини, $\omega_M - \omega_S$, даючи, наприклад, значення $V \sim g/100$, яке легко задовольняє умові слабкого шуму $V^2\tau_M\tau_S \ll 1$.

Приклад 2: Надпровідний кубіт «трансмон», з'єднаний з модою порожнини надпровідної смугової лінії. В недавньому експерименті, описаному в посиланні [296], значення параметрів: $\omega_M/(2\pi) = 8{,}8$ ГГц, $\tau_M = 600$ нс, $\omega_S/(2\pi) \approx 14$ ГГц, $\tau_S = 120$ нс і зв'язок Джейнса-Каммінгса $g/(2\pi) \approx 180$ МГц. Умова $\tau_S/\tau_M < 1$ не виконується. Значення дисперсійного зв'язку V у нашій моделі приблизно дорівнює зв'язку між кубітами

$$g_{12} \sim g^2/(\omega_S - \omega_M) \lesssim (2\pi) \times 10 \text{ МГц}. \tag{3.78}$$

Це дає $V^2\tau_M\tau_S \sim 10^2$, хоча тривалість життя та V, можливо, можна зменшити. Цікаво, що ця установка має два кубіти, з'єднані з однією і тією ж модою порожнини, що дозволяє вивчити випадок, коли система $\mathcal{S}$ має більше ніж два рівні.

Приклад 3: Кубіт на куперівській парі, з'єднаний з наномеханічним резонатором. Пристрій цього типу було використано в посиланні [96] для наномеханічного вимірювання стану кубіта з параметрами: $\omega_M/(2\pi) = 58$ МГц, $\tau_M \sim 100\mu$ с, $\omega_S/(2\pi) \sim 10$ ГГц, $V/(2\pi) \sim 1$ кГц. Час релаксації кубіта $T_1 \equiv \tau_S$ не вимірювався, але для подібних пристроїв можна очікувати порядок $\tau_S \sim 10$ нс. Таким чином, як умова адіабатичності $\tau_S/\tau_M \approx 10^{-4} \ll 1$, так і умова слабкого шуму $V^2\tau_M\tau_S \sim 10^{-5}$ легко задовольняються.

3.2. Функції розподілу аргументальних коливань маятника Дубошинського

У розглянутій в підроділі 3.1 системі мультистабільність виникає внаслідок контакту з квантовою системою. Але навіть в класичній системі може виникати мультистабільність не за рахунок нелінійності моди, як це добре вивчено, а за рахунок особливого зв'язку з швидкоосцилюючим зовнішнім полем, так званого аргументального зв'язку. Розглянемо приклад такої системи, маятник Дубошинського. В цій системі амплітуда змушених коливань, що можуть встановитися в системі, приймає значення із дискретного набору. І в той час як спектр системи є добре вивченим, функція розподілу маятника Дубошинського невідома. У цьому підрозділі ми вивчаємо ймовірності стабілізації різних амплітуд як функції початкових умов.

3.2.1. Динаміка швидких коливань

Розглянемо систему на рис. 3.5. Маятник Дубошинського представляє собою математичний маятник з маленьким постійним магнітом на кінці, що коливається у полі соленоїда. Стрижень довжиною l є жорстким і електромагнітно пасивним, котушка і магніт — це циліндри довжинами L і L_0 відповідно і радіусами a і a_0 відповідно, всі ці розміри набагато менші за l. Маятник обертається навколо горизонтальної осі, а точка його кріплення знаходиться на осі котушки на відстані H від її верхньої грані.

Силами, що діють на нього, є сила тяжіння $\vec{F}_g = m\vec{g}$, сила тертя (в'язкого та турбулентного),

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -k_1\vec{v} - k_2|\vec{v}|\vec{v}, \tag{3.79}$$

та магнітна сила $\vec{F}$.

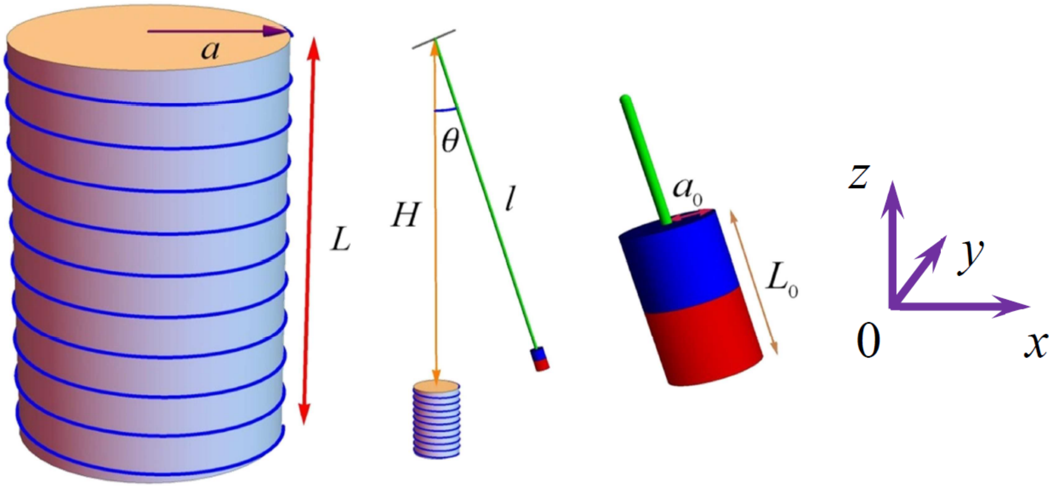

Рис. 3.5. Схема маятника Дубошинського.

Відповідні механічні моменти ($\vec{r}_c$ — вектор, направлений від точки кріплення до центру мас маятника) мають такі значення:

$$\vec{T}_g = m\vec{r}_c \times \vec{g}, \qquad \vec{T}_{\text{fr}} = -\left(k_1 + k_2 v\right)\vec{r}_c \times \vec{v}. \tag{3.80}$$

Амплітуда магнітного моменту задається інтегралом по об'єму магніту,

$$\vec{T} = \iiint \left(\vec{\mu} \times \vec{B} + \vec{r}_c \times \nabla\left(\vec{\mu} \cdot \vec{B}\right)\right) dV_2. \tag{3.81}$$

Перший член інтегралу означає механічний момент, що створюється однорідним полем. Другий доданок враховує неоднорідність поля котушки, він пропорційний його градієнту. Якщо розміри котушки невеликі порівняно з довжиною стрижня, другий доданок набагато більший, як показано на рис. 3.6 та обговорюється далі, тому поле не можна розглядати як однорідне. Синя (суцільна) лінія показує вклад першого доданка, червона (штрихова) — вклад другого доданка, що виникає внаслідок неоднорідності. Котушка та магніт орієнтовані вздовж осі z.

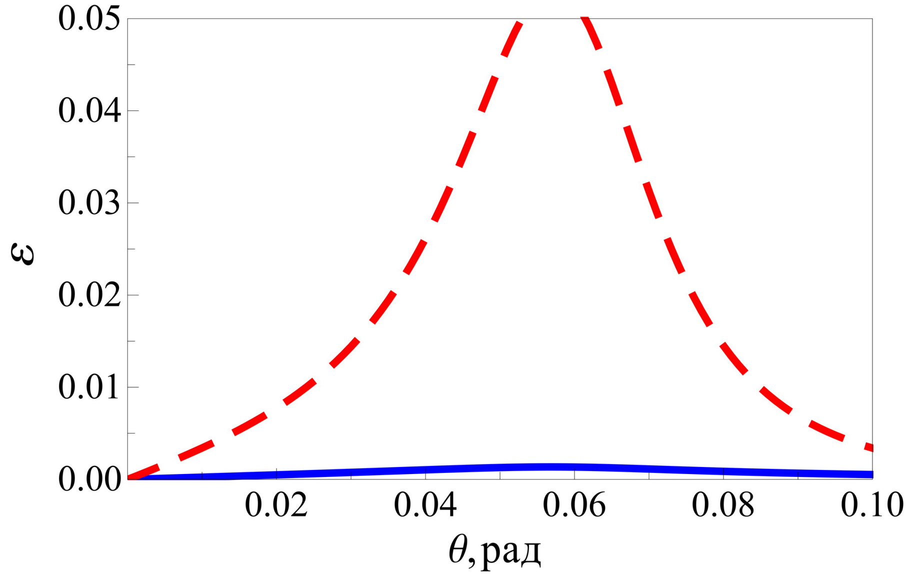

Рис. 3.6. Внесок двох доданків (суцільна і штрихова криві) в інтеграл в рівнянні (3.81) для віконної функції $\varepsilon(\theta)$ (див. рівняння (3.86)). Параметри: $a = 0{,}3$, $L = 1$, $a_0 = 0{,}03$, $L_0 = 0{,}05$, $l = 5$, $H = 5{,}3$.

Оскільки рух маятника обмежений у площині xOz, важливою є лише компоненти вздовж осі y цих моментів. Отримаємо рівняння руху,

$$\ddot{\theta} + 2\pi\alpha\dot{\theta} + \beta\dot{\theta}^2 \operatorname{sign}\dot{\theta} + 4\pi^2 \sin\theta = 4\pi^2\mathcal{F}(\theta)\sin\left(2\pi\Omega t + \varphi_0\right). \tag{3.82}$$

Тут Ω — параметр частоти поля, $\Omega = \omega/\omega_0$, а ω — частота сигналу, що подається на котушку, $\omega_0 = \sqrt{mgr_c/I}$ — власна частота; $\alpha = k_1 r_c^2/\sqrt{Imgr_c}$ та $\beta = k_2 r_c^3/I$ — параметри сили тертя, φ_0 — фаза магнітного поля при $t = 0$, кутова функція $\mathcal{F}(\theta) = T_y(\theta)/(mgr_c)$ характеризує вплив поля. Похідні беруться за *безрозмірним часом* $\omega_0 t/(2\pi)$ (так що період власних лінійних коливань $T_0 = 2\pi/\omega_0$ є одиницею часу, для простоти ми зберігаємо позначення t для безрозмірного часу).

Традиційний підхід до розгляду задачі полягає в тому, що механічний момент, що діє на магніт, вважається постійним у вузькій зоні взаємодії та рівним нулю поза цією зоною [101] (див. рис. 3.7). Ця проста модель може пояснити стійкість коливань та перехід енергії. Це дозволяє правильно знайти енергетичний спектр, оскільки останній не залежить від профіля поля. Однак це не виявляє ролі неоднорідності в стабілізації коливань. Для того, щоб врахувати неоднорідність, ми розраховуємо точний профіль поля. Оскільки він розглядається для малої котушки та довгого стрижня, ефект неоднорідності набагато сильніший, ніж механічний момент, створюваний постійним магнітним полем (див. рис. 3.6).

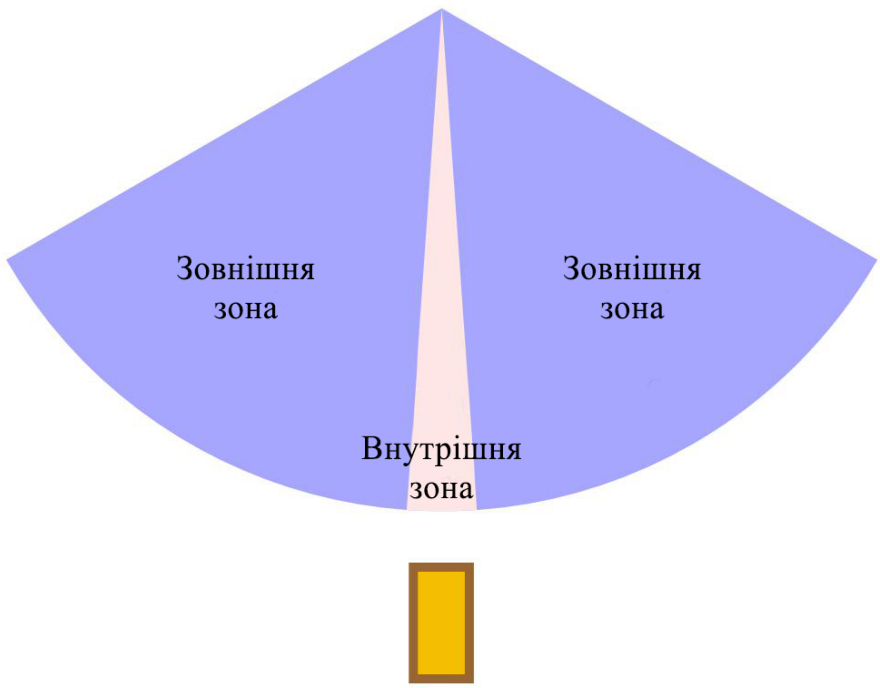

Рис. 3.7. Схема зон руху маятника, у яких на нього діє поле котушки (внутрішня зона) і у яких її дією можна знехтувати.

Почнемо з базової конфігурації котушки та магніту, показаної на рис. 3.5. Далі ми обговоримо інші конфігурації. Вважаємо, що струм з лінійною густиною i тече в циліндричному соленоїді радіусом a і довжиною L. Початок координат знаходиться в найвищій точці осі котушки. Вирази для радіальних B_ρ та осьових B_z компонентів поля у довільній точці $(\rho,\ \varphi,\ z)$ можна отримати інтегруванням закону Біо-Савара над поверхнею котушки:

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi} \frac{z_1 \cos\varphi_1 d\varphi_1 dz_1}{R^3} \tag{3.83}$$

та

$$B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi} \frac{(a - \rho\cos\varphi_1)\, d\varphi_1 dz_1}{R^3}, \tag{3.84}$$

де

$$R = \sqrt{a^2 + \rho^2 + (z_1 + z)^2 - 2a\rho\cos\varphi_1}. \tag{3.85}$$

На кінці жорсткого стрижня довжиною l прикріплений циліндричний магніт радіусом a_0, довжиною L_0 і намагніченістю μ, який спрямований вгору. Інший кінець стрижня закріплений на осі котушки на рівні $z = H$. При коливаннях маятника магнітний момент маятника дещо змінює свій напрямок, – це враховується в наших розрахунках. Механічний момент, що діє на магніт, визначається з рівняння (3.81).

Для простоти розрахунків ми переходимо до безрозмірних параметрів a, L_0, H, нормованих на L. Позначаючи безрозмірний інтеграл у рівнянні (3.81) як $\varepsilon(\theta)$, функцію $\mathcal{F}(\theta)$ можна записати як

$$\frac{T_y(\theta)}{mgr_c} = \mathcal{F}(\theta) = f\varepsilon(\theta). \tag{3.86}$$

Безрозмірний параметр

$$f = \frac{\mu_0 \mu i a L^2}{4\pi mgr_c}, \tag{3.87}$$

пропорційний величині магнітного поля, називаємо параметром сили поля. Це один із керуючих параметрів системи, поряд з параметрами тертя α і β та частотою Ω. Функція $\varepsilon(\theta)$, віконна функція системи, показує форму силового поля.

Тепер розглянемо різні взаємні *орієнтації* котушки та магніту, які задають форму та парність поля. Основні конфігурації — випадки, коли вісь магніту, вісь котушки та вісь обертання паралельні осям координат. Ми вивчаємо 4 основні конфігурації (див. рис. 3.8), для простоти вісь маятника вважається паралельною осі y у всіх цих конфігураціях. Інші 5 конфігурацій, які не розглядаються ("x-y", "y-z" тощо), приводять до нульового моменту.

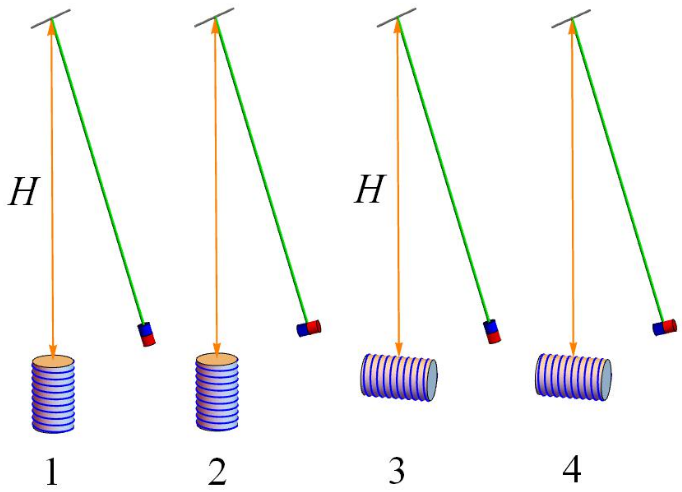

Рис. 3.8. Схеми 4 конфігурацій системи: "z-z" (напрямки котушки та осі магніту відповідно, конфігурація 1), "z-x" (конфігурація 2), "x-z" (конфігурація 3), і "x-x" (конфігурація 4).

У попередніх роботах [101, 102, 107, 108] використовувалася лише конфігурація "x-z". Ця конфігурація дозволяє системі вибирати лише "непарні" амплітуди. Тут розглядається більш повний аналіз, що включає як парні, так і непарні функції $\varepsilon(\theta)$.

Якщо поле розглядається як однорідне, тоді віконна функція задається як

$$\varepsilon(\theta) = \begin{cases} \varepsilon_0 \sin\theta, & |\theta| \le \theta_0 \\ 0, & |\theta| > \theta_0 \end{cases} \tag{3.88}$$

для конфігурацій "z-x" і "x-z", а також

$$\varepsilon(\theta) = \begin{cases} \varepsilon_0, & |\theta| \leq \theta_0 \\ 0, & |\theta| > \theta_0 \end{cases} \tag{3.89}$$

для конфігурацій "z-z" та "x-x". Тут ε_0 — параметр, що характеризує величину поля і визначається струмом у котушці.

Ми розраховуємо точний механічний момент, використовуючи рівняння (3.81), (3.83) і (3.84), а результати показані на рис. 3.9. Конфігурації "z-z" і "x-x" показують непарну функцію вікна і, таким чином, відповідають "парним" амплітудам (доведення див. нижче), конфігурації "z-x" і "x-z" навпаки.

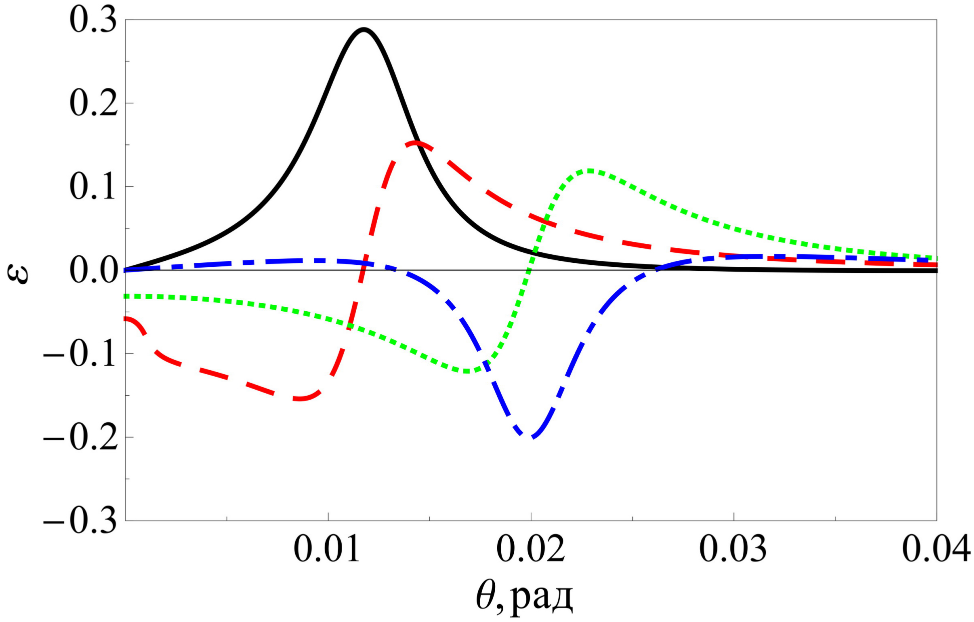

Рис. 3.9. Віконні функції для 4 розглянутих конфігурацій системи, "z-z" (чорна суцільна лінія), "z-x" (червона штрихова), "x-z" (зелена пунктирна), і "x-x" (синя штрих-пунктирна). Параметри: $a = 0{,}3$, $L = 1$, $a_0 = 0{,}03$, $L_0 = 0{,}05$, $l = 25$, $H = 25{,}1$.

Видно, що форми залежностей від кута для моментів дуже специфічні. Непарні функції ("z-z", "x-x") навряд чи відповідають наближенню $\varepsilon(\theta) = \varepsilon_0 \sin\theta$, що випливає з однорідної моделі поля (рівняння (3.88)), парні функції ("z-x", "x-z") не є кроковими функціями. Неоднорідність відіграє провідну роль у взаємодії магніту і котушки.

3.2.2. Стабільні амплітуди та рівняння для огинаючої

Головною особливістю маятника Дубошинського є квантування амплітуд змушених коливань. Кількісний опис цього явища досить простий. Процес встановлення цих стійких станів є важливим, оскільки він дозволяє з'ясувати механізм встановлення амплітуд.

Розглянемо стабілізований режим коливань з постійною кутовою амплітудою A. Якщо амплітуда не мала, то період коливань є більшим за його значення в лінійному випадку. Точне значення періоду T_1 вільних коливань в одиницях $T_0 = 2\pi/\omega_0$ з урахуванням невеликого тертя має вигляд

$$\tau(A, \alpha, \beta) = \frac{T_1}{T_0} \approx \tau_0(A) + \alpha\tau_1(A) + \beta\tau_2(A), \tag{3.90}$$

де

$$\tau_0(A) = \frac{2\hat{F}\left(\dfrac{A}{2}\right)}{\pi \sin\dfrac{A}{2}}, \tag{3.91}$$

$$\tau_1(A) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^A \frac{\sin\dfrac{A}{2}\left(\hat{E}\left(\dfrac{A}{2}\right) - \hat{E}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)}{(\cos\theta - \cos A)^{3/2}} d\theta, \tag{3.92}$$

$$\tau_2(A) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_0^A \frac{\sin A - \sin\theta - (A-\theta)\cos A}{(\cos\theta - \cos A)^{3/2}} d\theta, \tag{3.93}$$

$$\hat{E}(\varphi) = E(\varphi \,|\, \csc^2 A/2), \hat{F}(\varphi) = F(\varphi \,|\, \csc^2 A/2) \tag{3.94}$$

є еліптичними інтегралами другого роду. Оскільки маятник затухає протягом кожного напівперіоду, поле повинно перекачувати енергію в систему кожного разу, коли маятник потрапляє в поле. Зверніть увагу на те, що, хоча ми зараз розглядаємо змушені коливання, період приблизно визначається рівнянням (3.90), оскільки поле діє лише протягом коротких проміжків часу, підтримуючи стабільну амплітуду. Накачування енергії може бути досягнуто, якщо механічний момент, що діє на маятник, змінює свій напрямок через кожні півперіода коливань. Якщо віконна функція є парною, фаза, коли маятник потрапляє в поле, повинна змінитися на π, щоб задовольнити цій умові (див. рис. 3.10). Енергія загасає за рахунок тертя (повільно спадаюча ділянка), потім відновлюється полем (наростаюча ділянка). Механічний момент повинен змінювати свій напрямок кожні півперіоди. Але

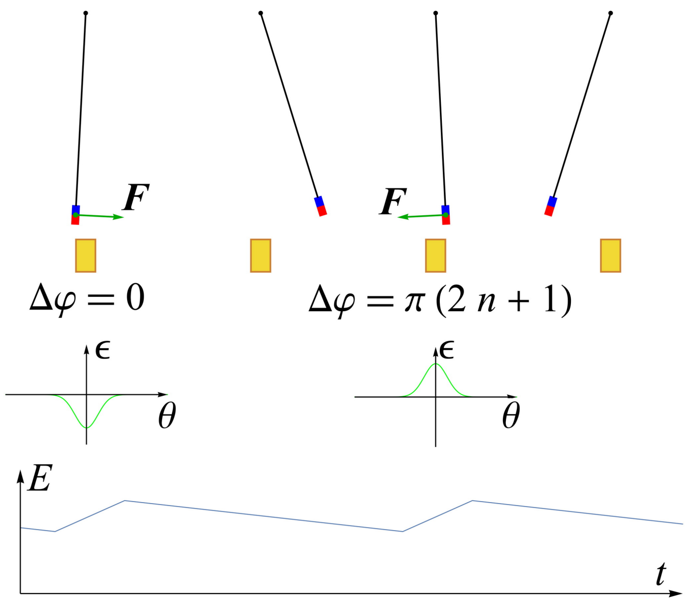

Рис. 3.10. Схема узгодження фази зовнішнього поля, що підтримує коливання, для парного $\varepsilon(\theta)$ із схематичним зображенням зміни механічної енергії.

оскільки віконна функція парна, єдиний можливий спосіб — це якщо фаза змінюється на π, так що $\Delta\varphi = \pi + 2\pi n$. Якщо зовнішнє поле робить половину цілого числа коливань, тоді маятник робить половину коливання:

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2}T_1, \tag{3.95}$$

що передбачає

$$\tau(A,\alpha,\beta) = \frac{2n-1}{\Omega}. \qquad (3.96)$$

Якщо функція вікна непарна, то поле має змінювати свою фазу ціле число разів (див. рис. 3.11). Тепер віконна функція непарна, тому фаза повинна залишатися незмінною після кожного напівперіоду, а саме $\Delta\varphi = 2\pi n$. Це означає, що

$$\tau(A,\alpha,\beta) = \frac{2n}{\Omega}. \qquad (3.97)$$

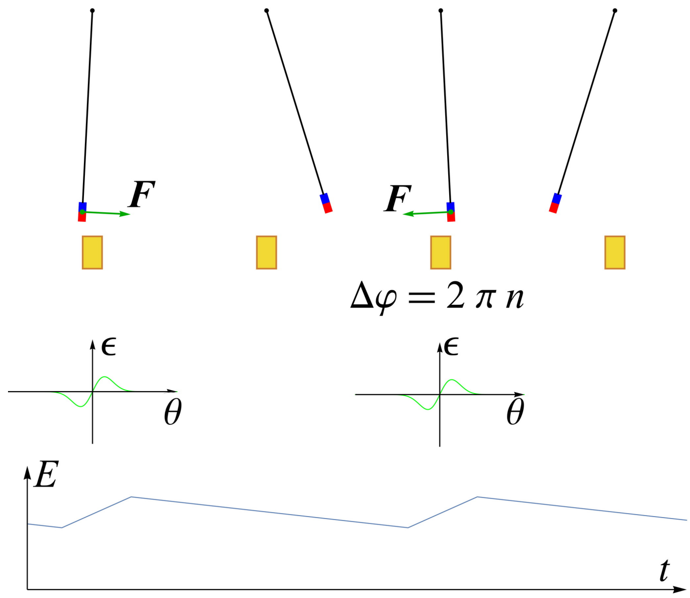

Рис. 3.11. Схема узгодження фази зовнішнього поля, що підтримує коливання, для непарного $\varepsilon(\theta)$ із схематичним зображенням зміни механічної енергії.

Як бачимо, період маятника повинен дорівнювати непарному числу $1/\Omega$, якщо віконна функція парна, і парному числу – якщо функція вікна непарна. Ці амплітуди будемо називати "парними" та "непарними". Співвідношення (3.90) – (3.97) дозволяють розрахувати стабільні амплітуди для заданого відношення частот $\Omega = \omega/\omega_0$. Можна показати, що доданки (3.92) та (3.93) в (3.90) є незначними порівняно з (3.91), тому тертям можна нехтувати *у цьому розрахунку*. Ми бачимо, що спектри можливих амплітуд та енергій $e_i = 1 - \cos A_i$ *змушених* коливань (але не функція розподілу за цими амплітудами) не залежать ні від форми поля ε ні від величини f і визначаються лише відношенням частот Ω. Результати, отримані цим методом, добре узгоджуються з попередніми роботами [102]. Далі ми будемо посилатися на стабільні амплітуди за їх порядковим номером m, починаючи з 1. Як для парних, так і для непарних амплітуд маємо $\tau(A) = k/\Omega$ з цілими k і $\tau(A) > 1$ для $A > 0$, загальним правилом є $m = k - k_0$, де k_0 — це найменше ціле число, яке дає $(k_0 + 1)/\Omega > 1$. Ми бачимо, що $m = 1$ відповідає $k = k_0 + 1$, а амплітуда A_1, що задовольняє

$$\tau(A_1) = k/\Omega = (k_0 + 1)/\Omega > 1, \tag{3.98}$$

насправді є мінімально можливою амплітудою. Іншими словами, для кожного Ω ми перераховуємо на m всі *можливі* амплітуди, чередуючи непарні та парні: значенням $m = 1, 2, 3, 4, 5$ відповідають амплітуди $50°$, $69°$, $83°$, $94°$, $103°$.

Для дослідження цієї системи проведено чисельну симуляцію руху маятника і виявлено, що для різних початкових амплітуд та різних параметрів взаємодії отримуємо різну поведінку. А саме, для досить сильної взаємодії спостерігається хаотична поведінка, маятник перемикається між різними стабільними розв'язками (див. рис. 3.12). Але для певних наборів параметрів отримано стабілізацію. Очевидно, що стійкий стан є більш ймовірним, якщо початкову амплітуду встановити близько до амплітуди, що відповідає цьому стану. Як ми бачимо на рис. 3.13, амплітудно-часова залежність у цьому випадку є повільно функцією, і далі ми досліджуємо її огинаючу.

Виведемо рівняння еволюції огинаючої, для чого введемо повільні змінні амплітуди A і фази φ в ті моменти часу, коли магніт проходить положення рівноваги. Але оскільки момент, що створюється полем, може змінити свій напрямок після половини коливання, ці змінні змінять своє значення. Зокрема, якщо віконна функція парна, то рівняння руху є інваріантним щодо перетворення [106]

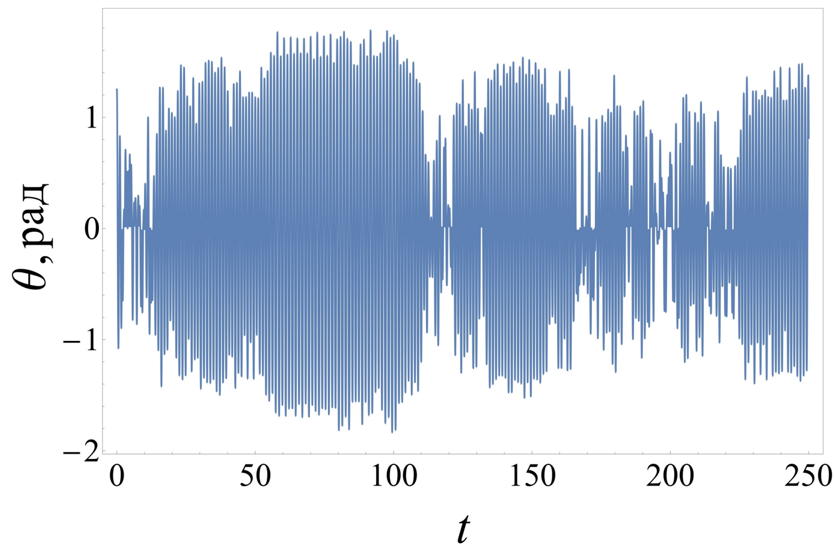

Рис. 3.12. Еволюція маятника в сильному полі $f = 200$. Параметри: $\Omega = 20$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 10^{-3}$, $a_0 = 0,03$, $L_0 = 0,05$, $a = 0,3$, $L = 1$, $l = 25$, $H = 25,1$.

$(\theta, \dot{\theta}, \varphi) \to (-\theta, -\dot{\theta}, \varphi + \pi)$, тому ми повинні використовувати функцію

$$\psi = \begin{cases} \varphi, & \dot{\theta} > 0 \\ \varphi + \pi, & \dot{\theta} < 0 \end{cases} \tag{3.99}$$

замість φ. Якщо ж віконна функція непарна, зсув на π не потрібний, тому ми можемо використовувати φ як одну з повільно змінних функцій.

Перше рівняння можна отримати з енергетичних міркувань. Ми вважаємо взаємодію котушка-магніт протягом усієї половини коливання відмінним від нуля лише у вузькій зоні (3.7), а також вважаємо швидкість маятника всередині цієї зони постійною. Невелика зміна амплітуди $\delta A \ll A$ після половини коливання визначається формулою

$$\delta A \sin A = -2 \int\limits_0^A (\alpha\dot{\theta} + \beta\dot{\theta}^2) d\theta + 2 f I_f, \tag{3.100}$$

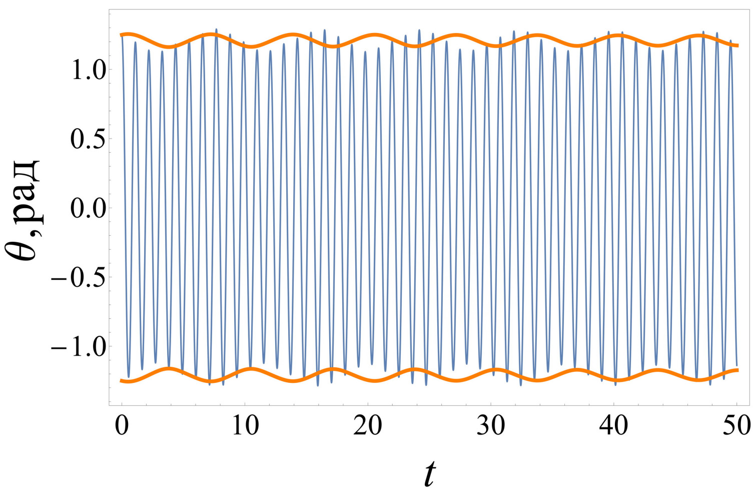

Рис. 3.13. Точний розв'язок, отриманий за допомогою рівняння (3.82) (синя крива) і наближений розв'язок, що задається рівняннями (3.102) і (3.106) (червона крива). Параметри: $\alpha = 0$, $\beta = 10^{-3}$, $\Omega = 20$, $f = 30$, $A_0 = 1{,}25$ рад і $\psi_0 = 0$.

де $\dot{\theta} = \sqrt{2(\cos\theta - \cos A)}$ і

$$I_f = \begin{cases} \sin\psi \int\limits_0^A \varepsilon(\theta)\cos\left(\dfrac{\Omega\theta}{2\sin(A/2)}\right)d\theta, \text{even } \varepsilon(\theta) \\ \cos\psi \int\limits_0^A \varepsilon(\theta)\sin\left(\dfrac{\Omega\theta}{2\sin(A/2)}\right)d\theta, \text{odd } \varepsilon(\theta). \end{cases} \tag{3.101}$$

В рівнянні (3.100) ми припускаємо, що поле вузьке, так що маятник рухається з приблизно постійною швидкістю всередині поля. Розмір поля невеликий, тому A може використовуватися як верхня межа інтегрування. Оскільки зміна амплітуди порівняно невелика, ми можемо виконати континуалізацію:

$$\delta A \approx \frac{T_1}{2}\frac{dA}{dt} = \frac{\pi}{\omega_0}\tau(A,\alpha,\beta)\frac{dA}{dt}.$$

З точки зору безрозмірного часу (позначення t залишається незмінним)

$$\frac{\tau(A,\alpha,\beta)}{2}\sin A \cdot \frac{dA}{dt} = -8\alpha\hat{E}\left(\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2} - 4\beta\left(\sin A - A\cos A\right) + 2fI_f. \tag{3.102}$$

Це рівняння описує еволюцію амплітуди коливань. Зазначимо, що вона містить функцію $\psi(t)$ у доданку з I_f, що визначається рівнянням (3.101), тому нам потрібно інше рівняння для еволюції цієї змінної. Це можна отримати з фазових співвідношень. Зміна фази $\delta\varphi$ за півперіоду становить

$$\delta\varphi = \pi\Omega\tau(A, \alpha, \beta). \tag{3.103}$$

Тепер континуалізуємо цю змінну. Оскільки ми припускаємо, що амплітуда змінюється повільно, ефективна фаза ψ поля також змінюється повільно. Зводимо фазу до інтервалу $(-\pi, \pi]$. Отже, невелика зміна ефективної фази є

$$\delta\psi = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \left(\Omega\tau(A, \alpha, \beta) + 1\right) \right\} \tag{3.104}$$

для парної функції $\varepsilon(\theta)$, і

$$\delta\psi = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \Omega\tau(A, \alpha, \beta) \right\} \tag{3.105}$$

для непарного $\varepsilon(\theta)$. Ці співвідношення можуть бути переписані так:

$$\frac{\tau(A, \alpha, \beta)}{4\pi} \frac{d\psi}{dt} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2} \Big(\Omega\tau(A, \alpha, \beta) + 1 \Big) \right\}, & \text{навіть } \varepsilon(\theta) \\ \left\{ \frac{1}{2} \Omega\tau(A, \alpha, \beta) \right\}, & \text{непарні } \varepsilon(\theta) \end{cases} \tag{3.106}$$

У виразах (3.104) — (3.106) ми використовуємо позначення

$$\{x\} = x - [x + 0.5], \tag{3.107}$$

де $[x]$ — ціла частина x. Набір рівнянь (3.102) і (3.106) можна вирішити чисельно (див. рис. 3.13).

3.2.3. Функція розподілу амплітуд змушених коливань

Для аргументальної системи завдяки ефективній стохастичності початкової фази магнітного поля котушки можна усереднювати по цьому параметру і вводити функцію ймовірності стабілізації певного енергетичного рівня, яка відіграє роль функції розподілу класичної системи.

Розглянемо параметричну площину енергії маятника та фази поля, (e, ψ), де $e = 1 - \cos A$ — нормована механічна енергія. У цій площині еволюція маятника йде шляхом, який може сходитися в точку чи ні. Якщо в системі встановлюється стабільна амплітуда, це означає, що траєкторія руху маятника у фазовому просторі сходиться до лінії, яка представляє цю амплітуду. Але оскільки стаціонарна фаза для цієї амплітуди однозначно знайдена з рівняння (3.102), збіжність до прямої означає зближення до однієї точки, аттрактора. Кожна стабільна амплітуда має свій унікальний аттрактор, і інтерес представляє сукупність початкових точок, які до неї сходяться.

Як показано раніше, парні амплітуди домінують у непарному полі, і навпаки. Рис. 3.14 показує цю закономірність: 1-я та 3-та амплітуди домінують у парному полі, а 2-а та 4-а — у непарному. На рис. 3.14 колір показує номер амплітуди, що встановлюється: перша (червоний), друга (жовтий), третя (зелений), четверта (синій). Білим показано точки, для яких амплітуда не встановлюється.

Для порівняння на рис. 3.15 наведені дані, отримані розв'язуванням точних рівнянь (3.82). Видно, що дані добре узгоджуються.

Фазова площина показує, які амплітуди встановлюються в системі для заданих початкових умов, енергії e і фази φ. Практично визначити початкову амплітуду відносно легко. Однак встановлення певного значення для початкової фази і навіть просто її вимірювання представляється складним.

Цей факт дозволяє стверджувати, що початкова фаза є фактично стохастичним параметром, який вносить у задачу випадковість. Усереднення за фазою дає ймовірності того, що в системі стабілізувалася певна амплітуда для заданого

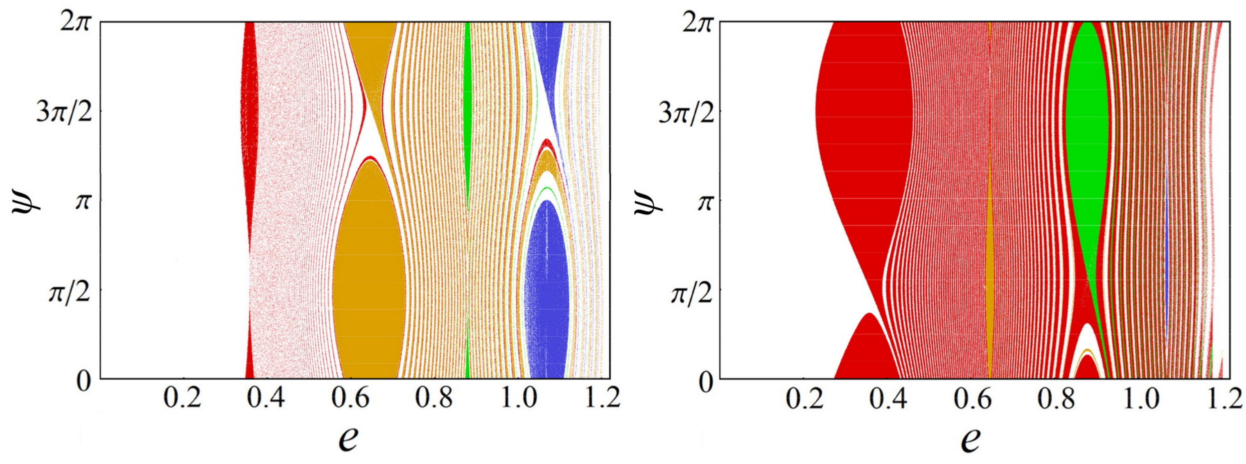

Рис. 3.14. Рівноважний стан маятника Дубошинського на фазовій площині для конфігурації поля "z-z" (ліва панель) і "x-z" (права панель), розрахований за допомогою рівнянь для огинаючої. Параметри: $\alpha = 0$, $\beta = 10^{-3}$, $\Omega = 20$, $f = 30$.

значення початкової енергії e_0.

На рисунку 3.16 показано отриману ймовірність встановлення рівноважних амплітуд змушених коливань в аргументальній системі. Бачимо, що навіть при початковому відхиленні, що відповідає одній з можливих амплітуд змушених коливань, встановитися можуть і менші амплітуди.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [11, 12]:

● Розроблено теорію динаміки вібраційної системи (яка може мати механічне або електромагнітне походження), дисперсійно пов'язаної з квантовою системою, при якому стани цих систем зазнають взаємного впливу. Наслідком зв'язку є мультистабільність вимушених коливань, де складна система може мати кілька стабільних станів у наближенні середнього поля. Ця ситуація сильно відрізняється від знайомої бістабільності через внутрішню нелінійність моди.

● Мультистабільність пояснюється тим, що в результаті взаємодії резонансна частота моди залежить від стану системи, тоді як стан системи залежить від

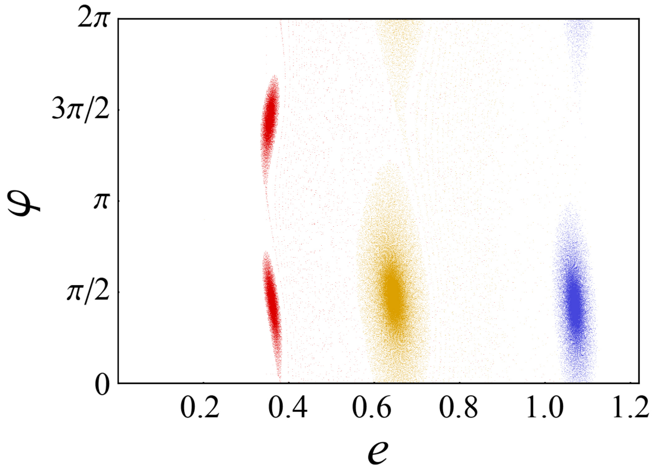

Рис. 3.15. Рівноважний стан маятника Дубошинського на фазовій площині для конфігурації поля "z-z" (ліва панель) і "x-z" (права панель), розрахований за допомогою точних рівнянь руху. Параметри: $\alpha = 0$, $\beta = 10^{-3}$, $\Omega = 20$, $f = 30$.

ступеня збудження моди. Ефективно вібраційна система стає нелінійною, а частота переходів залежить від розподілу за станами моди. У важливому випадку зв'язку з дворівневою системою виявлено режим, коли сукупна система може мати до трьох стабільних станів.

- Показано, що квантові коливання в системі, дисперсійно пов'язаній з модою, викликають перехід між співіснуючими стабільними станами. Швидкість переходу явно обчислена в найбільш цікавій області поблизу точки біфуркації, де зникає один з метастабільних станів. Виявлено, що ефективна енергія активації переходу має степеневу залежність від відстані до точки біфуркації з показником 3/2. Цей аналіз проведено в режимі слабкого квантового шуму.

- Проаналізовано умови, за яких квантовий шум не можна вважати слабким. У цьому випадку квантовий шум призводить до надзвичайно великих коливань між зонами, зосередженими поблизу стабільних станів середнього поля. Іншими словами, система стає підсилювачем нерівноважних квантових шумів. Така поведінка може проявлятися для систем зчитування інформації у квантових комп'ютерах.

- Теоретично вивчено аргументальні коливання маятника Дубошинського. Ця система має дискретний енергетичний спектр у присутності високочастотного

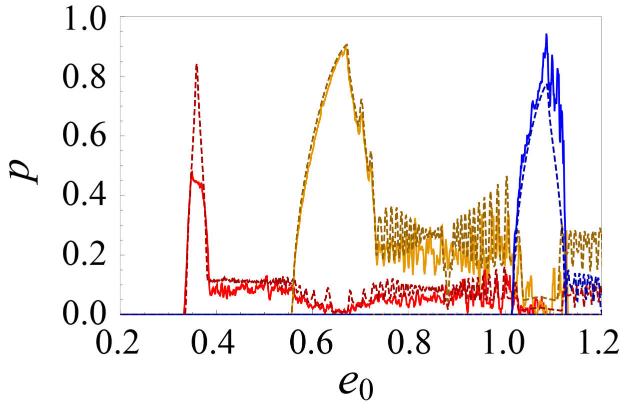

Рис. 3.16. Функція розподілу маятника Дубошинського в полі конфігурації "z-z", отримана за точним рівнянням руху (суцільні лінії) та рівняннями огинаючої (штрихові лінії). Параметри: $\alpha = 0$, $\beta = 10^{-3}$, $\Omega = 20$, $f = 30$.

магнітного поля просторово локалізованого в невеликій області поблизу положення рівноваги маятника, а його частота набагато перевищує власну частоту маятника. Дисипація енергії маятника може бути скомпенсована накачкою її від зовнішнього поля. Показано, що амплітуда коливань змінюється повільно, і отримано рівняння огинаючої, що описує ці повільні зміни.

- Показано, що еволюція маятника Дубошинського сильно залежить від початкових умов. Якщо початкова амплітуда близька до стабільної, то осцилятор може вийти у режим незмінної механічної енергії, незважаючи на дисипації, так що амплітуда залишається постійною. Ймовірність такого режиму визначається функцією розподілу за рівнями енергії. Отримана функція розподілу, використовуючи рівняння руху, і показано, що вона залежить від парності сили, що діє на магніт. Показано, що ймовірність стабілізації певного енергетичного рівня ніколи не дорівнює одиниці, навіть якщо початкова енергія точно дорівнює тій, що стабілізується. Обчислено функції розподілу, використовуючи рівняння огинаючої, і показано хороший збіг між функціями розподілу, отриманими різними методами. Показано, що метод огинаючої простіший для чисельних розрахунків і швидший, тому є зручним інструментом аналізу аргументальних коливань.

Результати, що викладені в даному розділі дисертації, можуть бути використані при проектуванні систем зчитування інформації у квантових комп'ютерах.

Розділ 4

ВПЛИВ НУЛЬОВИХ КОЛИВАНЬ ВАКУУМУ НА НАНОСИСТЕМИ

В даному розділі, заснованому на матеріалах робіт [13–15], досліджено вплив нульових коливань вакууму на наносистеми, що знаходяться поблизу масивних тіл. Цей вплив призводить до виникнення сили Казимира тяжіння між наносистемою і тілом, який розраховано у підрозділі 4.1 на прикладі взаємодії тонкої плівки і масивного металу з плоскою або скругленою поверхнею. Оскільки вплив мод вакууму пов’язаний з прозорістю цих наносистем для електромагнітного поля, це може бути використано для аналізу діелектричних властивостей матеріалу системи. Зокрема, аналіз сили Казимира проведено для металів з ненульовою частотою релаксації, яка у свою чергу є функцією температури. Сила Казимира з ростом температури може виявляти або монотонне спадання, або мати мінімум. Таким чином, вимірювання цієї залежності дозволить виявити характеристики металу, з якого виготовлена плівка.

Ефект Казимира в реальних експериментальних установках може призводити до негативних наслідків при високому рівні мініатюризації елементів установки, погіршуючи характеристики атомних годинників і магнітометрів. Одним з прикладів може слугувати атомний годинник, який заснований на ультрахолодних атомах стронцію, розташованих всередині порожнистого волокна, в якому створено фотонний кристал з шестикутними оптичними ловушками для запобігання взаємодії атомів зі стінкою волокна. В такій системі атоми втрачають свою когерентність через взаємодію з іншими атомами та зі стінкою волокна. В підрозділі 4.2 проводиться аналіз експериментальних даних, отриманих при дослідженні такого годинника та проводиться теоретична оцінка вкладу ефекту Казимира.

4.1. Сила Казимира тяжіння тонкої плівки і масивного тіла

У цьому підрозділі розглядається вплив нульових коливань на плівку і масивне тіло, що знаходяться на невеликій відстані один від одного. Цей вплив розглядається з урахуванням діелектричних властивостей матеріалу плівки і температури системи. Існують два конкуруючих явища, які визначають температурну залежність сили Казимира. З одного боку, підвищення температури призводить до збільшення частоти релаксації, а отже, до зменшення провідності металу та до зменшення сили Казимира. З іншого боку, при підвищенні температури сила Казимира збільшується за рахунок зростання тиску теплового випромінення. Конкуренція цих двох ефектів може призвести до немонотонної температурної залежності сили Казимира. Експериментальне спостереження такої немонотонної температурної залежності сили Казимира могло б бути прямим обґрунтуванням застосовності моделі Друде. Однак цей температурний ефект для об'ємних металів дуже важко спостерігати через його малу величину. Дійсно, відносний внесок $|F_{rad}/F(T = 0)|$ сили теплового випромінення F_{rad} до сили Казимира F пропорційний $(kTa/\hbar c)^4 \ll 1$ для реальних відстаней $a \ll a_T = \hbar c/kT$ між об'ємними металами. Тут k — постійна Больцмана, c — швидкість світла. Складова сили F_ν, що залежить від температури і визначається частотою релаксації ν, дуже мала, оскільки вона пропорційна малому поверхневому опору металу. Отже, для об'ємних зразків спостерігається, що сила Казимира повільно зростає з T через збільшення складової F_{rd}.

Розглянемо силу Казимира як функцію температури і покажемо, що зазначені вище труднощі для спостереження немонотонної температурної залежності сили Казимира можуть бути значно зменшені, якщо розглянути взаємодію тонких металевих плівок, а не об'ємних зразків. Як було отримано у посиланні [115], температурні ефекти сили Казимира можуть вийти на перший план, якщо товщина плівки d є найменшим параметром задачі. Характерна частота ω_c коливань, що вносять основний внесок у силу Казимира, стає меншою,

$$\omega_c = \omega_p \sqrt{\frac{d}{a}} \ll \omega_p, \quad \omega_c \ll \frac{c}{a}, \tag{4.1}$$

якщо

$$d \ll c/\omega_p \ll a. \tag{4.2}$$

Це означає, що високотемпературний режим, $T > T_c = \hbar\omega_c/k$, для сили Казимира відбувається при більш низьких температурах, оскільки $T_c \propto d^{1/2}$. Крім того, за умов (4.2) поверхневий імпеданс металевої плівки не є малим. Отже, сила Казимира для тонких плівок стає меншою, ніж для сипучих матеріалів (див. результати експерименту [116] з тонкими плівками), і відносна роль температурних ефектів у силі Казимира стає сильнішою. Таким чином, як ми демонструємо нижче, немонотонну температурну залежність сили Казимира можна спостерігати, в принципі, для тонких металевих плівок. Успішна реалізація цього експерименту може дати інформацію щодо ролі електронної релаксації в ефекті Казимира.

4.1.1. Модель опису взаємодії

Для діелектричної проникності металевої плівки ми вибираємо дисперсійну модель Друде,

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \tag{4.3}$$

з урахуванням температурної залежності релаксаційної частоти ν, викликану розсіюванням електронів на фононах. Ми користуємося співвідношенням

$$\nu(T) = \nu_0 + \nu_{\mathrm{ph}}(T/\Theta), \tag{4.4}$$

заснованим на формулі Блоха-Грюнейзена для температурної залежності питомого опору (див., наприклад, роботу [297]),

$$\nu_{\rm ph}(x) = A\,\nu_{\rm ph}(1)\,x^5 \int\limits_0^{1/x} \frac{y^5 {\rm d}y}{({\rm e}^y - 1)\,(1 - {\rm e}^{-y})}. \tag{4.5}$$

Тут ν_0 — залишкова частота релаксації, викликана розсіюванням електронів на кристалічних дефектах, Θ — температура Дебая, $\nu_{\rm ph}(T/\Theta)$ — частота релаксації внаслідок електрон-фононного розсіювання. Значення $\nu_{\rm ph}(1)$ залежить від швидкості Фермі електронів, сили електрон-фононної взаємодії та т.п. Така $\nu_{\rm ph}(1)$ може бути знайдена за допомогою вимірювання питомого опору при температурі Дебая. Константа A визначається як

$$A = \left(\int\limits_0^{1} \frac{y^5 {\rm d}y}{({\rm e}^y - 1)\,(1 - {\rm e}^{-y})} \right)^{-1} \approx 3. \tag{4.6}$$

Для простоти ми не враховуємо поверхневе розсіювання електронів в явній формі в рівнянні (4.5), оскільки це лише змінить значення ν_0 (див., наприклад, роботу [298]).

Спочатку ми вивчимо ефект Казимира для масивної пластини з ідеального металу і тонкої металевої плівки, що знаходяться на відстані a одне від одного. Потім, з використанням «теореми про близькість» [299], виведені вирази для сили Казимира між металевою плівкою і ідеальною металевою кулею. Геометрія задачі показана на рис. 4.1.

Асимптотичний вираз для сили Казимирова тяжіння *тонкої* металевої плівки до ідеальної *масивної* металевої пластини в умовах (4.2) був отриманий в роботі [120] на підставі теорії Ліфшиця. Сила f на одиницю площі може бути записана в наступній формі,

$$f = -\frac{BkT}{8\pi a^3}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\, x^3 \mathrm{e}^{-x} I(x), \tag{4.7}$$

де

$$B = (\hbar\omega_c/4\pi kT)^2, I(x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{n(n+C)+B\Psi(x)},$$
$$\Psi(x) = x(1-\mathrm{e}^{-x}), \quad C = \hbar\nu(T)/2\pi kT. \tag{4.8}$$

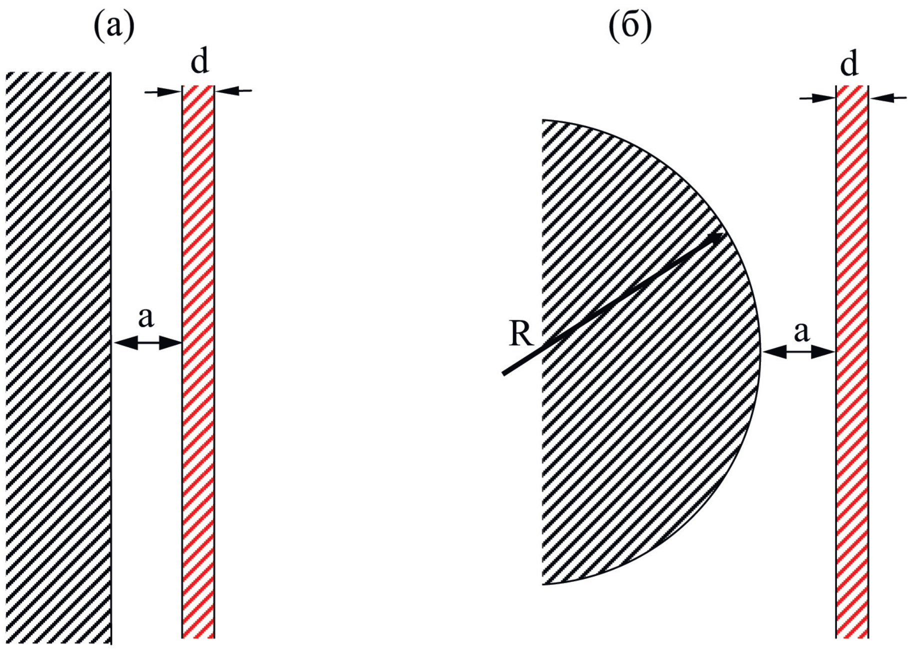

Рис. 4.1. Геометрія задачі для випадку металевої наноплівки і ідеальної масивної металевої пластини (панель а) та для наноплівки і ідеальної металевої кулі (панель б).

Штрих над знаком суми показує, що член з $n = 0$ береться з половинною вагою. Відзначимо, що при виконанні умови (4.2) можна знехтувати релятивістським ефектом запізнювання і перейти до границі $c \to \infty$.

4.1.2. Чутливість сили Казимира до параметрів плівки

Використовуючи формулу Абеля-Плана для підсумовування рядів,

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' \Phi(n) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}y\, \Phi(y) - i \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}y \frac{\Phi(-iy+0) - \Phi(iy+0)}{e^{2\pi y} - 1}, \tag{4.9}$$

рівняння (4.7) може бути записано у формі суми двох доданків, які відповідають двом причинам температурної залежності в ефекті Казимира,

$$f = f_\nu + f_{\mathrm{rad}}, \tag{4.10}$$

$$f_\nu = -\frac{\hbar\omega_c}{32\pi^2 a^3} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x^3 \mathrm{e}^{-x} \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau(\tau+\eta) + \Psi(x)}, \tag{4.11}$$

$$f_{\mathrm{rad}} = -\frac{\hbar\,\nu(T)}{8\pi^2 a^3} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x^3 \mathrm{e}^{-x} \int\limits_0^{\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{\gamma t} - 1)\{[t^2 - \Psi(x)]^2 + \eta^2 t^2\}}, \tag{4.12}$$

де $\eta = 2\nu(T)/\omega_c$, $\gamma = \hbar\,\omega_c/2kT$. Перший член f_ν в рівнянні (4.10) обумовлений квантовими флуктуаціями електромагнітного поля. Він залежить від температури тільки через $\nu(T)$. Очевидно, що модуль цього доданка спадає з ростом температури за рахунок зростання релаксаційної частоти. Асимптотичні вирази f_ν для малих і великих значень параметра η такі:

$$f_\nu = -\frac{i_1\hbar\,\omega_c}{8\pi a^3}\left(1 - i_2\frac{\nu(T)}{\omega_c}\right), \qquad \nu \ll \omega_c, \tag{4.13}$$

$$f_\nu = -\frac{3\hbar\,\omega_c^2}{16\pi^2 a^3 \nu(T)}\left(\ln\frac{\nu(T)}{\omega_c} - i_3\right),\ \nu \gg \omega_c. \tag{4.14}$$

Тут

$$i_1 = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\Psi(x)}} \approx 0{,}439017, \quad i_2 = \frac{\zeta(3)}{2\pi i_1} \approx 0{,}435777,$$

$\zeta(x)$– дзета-функція і

$$i_3 = \frac{1}{6}\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x} \ln\big(\Psi(x)/2\big) \mathrm{d}x \approx 0{,}492285.$$

Другий член в рівнянні (4.10) є пов'язаним з тепловими флуктуаціями електромагнітного поля. Його модуль зростає з ростом температури. Ця складова має різні асимптотики в різних інтервалах температур:

$$f_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{low-T}} = -\frac{\nu(T)(kT)^2}{24a^3\hbar\omega_c^2}\ln\frac{\hbar\omega_c}{kT}, \quad kT \ll \hbar\nu,\, \hbar\omega_c^2/\nu \tag{4.15}$$

при низьких температурах і

$$f_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{high-T}} = -\frac{\zeta(3)}{8\pi}\frac{kT}{a^3}, \quad kT \gg \min\big(\hbar\omega_c,\ \hbar\omega_c^2/\nu\big) \tag{4.16}$$

при високих. У разі $\nu \ll \omega_c$ існує проміжна асимптотика,

$$f_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{med-T}} = -\frac{\zeta(3)}{2\pi}\frac{(kT)^3}{a^3(\hbar\omega_c)^2}, \quad \hbar\nu \ll kT \ll \hbar\omega_c. \tag{4.17}$$

Використовуючи рівняння (4.13)–(4.17) і теорему про близькість [299], можна вивести аналогічні асимптотичні вирази для сили Казимира F,

$$F = 2\pi R\int\limits_a^\infty \mathrm{d}a' f(a'), \tag{4.18}$$

між металевою кулею радіуса R і тонкої металевої плівкою:

$$F_\nu(\nu \ll \omega_c) = -\frac{i_1\hbar\omega_c R}{10a^2}\left(1 - \frac{5i_2}{4}\frac{\nu(T)}{\omega_c}\right), \tag{4.19}$$

$$F_\nu(\nu \gg \omega_c) = -\frac{\hbar\omega_c^2 R}{8\pi a^2\nu(T)}\left(\ln\frac{\nu(T)}{\omega_c} - i_3 + \frac{1}{6}\right). \tag{4.20}$$

Для низькотемпературного інтервалу в рівнянні (4.15)

$$F_{\rm rad}^{\rm low-T} = -\frac{\pi R\nu(T)(kT)^2}{12a^2\hbar\,\omega_c^2}\left(\ln\frac{\hbar\,\omega_c}{kT}-\frac{1}{2}\right), \tag{4.21}$$

для високотемпературного інтервалу в рівнянні (4.16)

$$F_{\rm rad}^{\rm high-T} = -\frac{\zeta(3)}{8}\frac{RkT}{a^2}, \tag{4.22}$$

і для проміжного інтервалу температур в рівнянні (4.17)

$$F_{\rm rad}^{\rm med-T} = -\,\zeta(3)\frac{R(kT)^3}{a^2(\hbar\,\omega_c)^2}. \tag{4.23}$$

Представлені вище результати показують, що внесок в силу Казимира від квантових флуктуацій завжди спадає з ростом температури. При низьких температурах це спадання може бути значнішим, ніж зростання радіаційного вкладу сили $F_{\rm rad}(T)$. В цьому випадку для металевих плівок при збільшенні температури може відбуватися спадання повної сили Казимира, $F(T) = F_\nu(T) + F_{\rm rad}(T)$, замість зростання $F(T)$, яке практично завжди спостерігається для масивних металів. Однак при досить високих температурах радіаційний член починає домінувати над $F_\nu(T)$. Таким чином, в принципі, може спостерігатися немонотонна залежність сили Казимира від температури.

Штриховою лінією на рис. 4.2 показано немонотонну поведінку сили Казимира для плівки з металу з параметрами: $\Theta = 100$ K, $\omega_p = 3\cdot 10^{15}$ Гц, $\nu_{\rm ph}(T=\Theta) = 7\cdot 10^{12}$ Гц, $d = 7\cdot 10^{-7}$ см.

Кращими кандидатами для експериментального спостереження $F(T)$ є метали першої і другої групи з низькими температурами Дебая і сильною температурною залежністю питомого опору $\rho(T)$. На верхніх панелях рис. 4.2 показана температурна залежність сили Казимира між плівками з: 1)стронцію ($\Theta = 147$ K, $\omega_p = 1{,}06\cdot 10^{16}$ Гц, $\rho(T = 293\,{\rm K}) = 0{,}13\cdot 10^{-6}$ Ом·м, $d = 7\cdot 10^{-7}$ см), 2) барію ($\Theta = 110$ K, $\omega_p = 10^{16}$ Гц, $\rho(T = 293\,{\rm K}) = 0{,}33\cdot 10^{-6}$ Ом·м, $d = 7\cdot 10^{-7}$ см),

3) цезію ($\Theta = 38$ K, $\omega_p = 0{,}54 \cdot 10^{16}$ Гц, $\rho(T = 293\ \text{K}) = 0{,}205 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, $d = 10^{-6}$ см) і ідеальними металевими:

- півпростором (панель а),
- кулею радіусу $R = 5$ см (панель б).

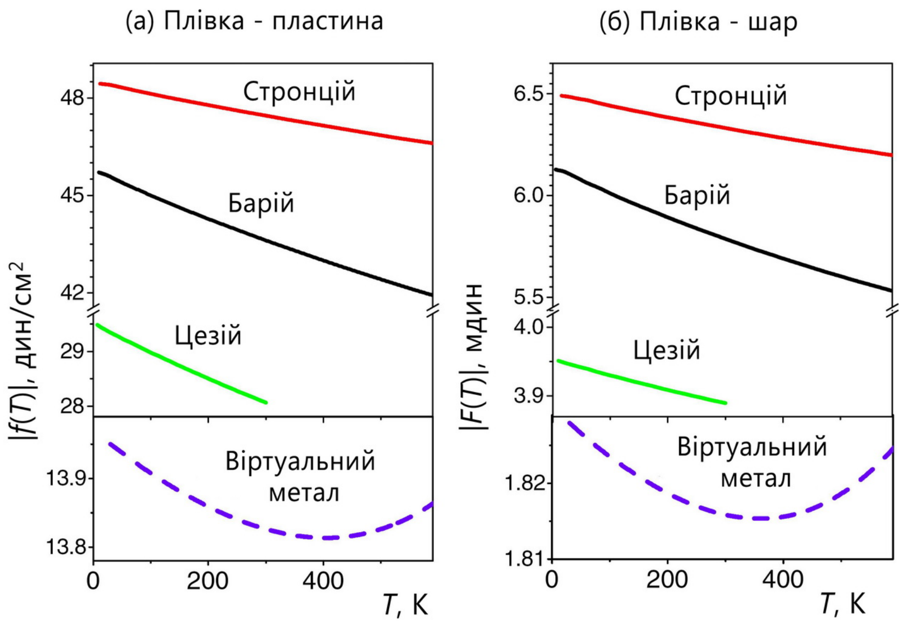

Рис. 4.2. Графіки залежності сили Казимира тяжіння тонкої металевої плівки до масивної ідеальної металевої пластини (ліва панель) і ідеальної металевої кулі (права панель).

Відзначимо, що значення $|f|$ на лівій панелі відповідають модулю сили на одиницю площі, в той час як $|F|$ на правій панелі — модулю повної сили Казимира. Параметри $\nu_{\text{ph}}(T = \Theta)$ ($6{,}3 \cdot 10^{13}$ Гц для стронцію, $1{,}05 \cdot 10^{14}$ Гц для барію і $2{,}5 \cdot 10^{13}$ Гц для цезію) були обчислені, використовуючи співвідношення

$$\rho(T) = \frac{4\pi\nu(T)}{\omega_p^2} \tag{4.24}$$

і рівняння (4.5). Відстань між об'єктами $a = 10^{-5}$ см для всіх кривих. Залишкова релаксаційна частота ν_0 (взята як 10^{11} Гц) не впливає значно на силу Казимира, якщо $\nu_0 \ll \omega_c$.

Отже, як бачимо, спадання з температурою спостерігається для обраних реальних матеріалів. Мінімум температурної залежності відсутній на верхніх панелях рис. 4.2, оскільки його положення відповідає температурам вищим, ніж температури плавлення плівок. Однак немонотонне спадання $F(T)$ може досягати 10%, що досить легко спостерігати в експерименті. Тим не менше, для реалістичних параметрів, які можуть бути, наприклад для деяких сплавів металів, можна очікувати і немонотонного характеру залежності $F(T)$, який показано на нижніх панелях рис. 4.2.

4.1.3. Аналіз сили Казимира для масивних зразків неідеальних металів

В даному пункті обговорюються обмеження на застосовність формули Ліфшиця для опису сили Казимира між двома масивними металевими об'єктами. Ці обмеження випливають з кінцевих розмірів взаємодіючих тіл. А саме, теорія Ліфшиця не застосовна в тому випадку, якщо характерні довжини хвиль флуктуаційних полів, відповідальних за температурно-залежний член в силі Казимира, більші за розміри зразків. В результаті широко обговорювана лінійна температурна залежність може спостерігатися тільки для дуже брудних металів та/або великих зразків при досить високих температурах.

Ми аналізуємо формулу Ліфшиця (1.21) для сили Казимира, взяту з роботи [119], у вигляді інтеграла по *дійсним* частотам ω, використовуючи модель Друде для діелектричної проникності ε, задану рівнянням (4.3). В цьому випадку тепловий член $f_{\rm rad}$ в силі Казимира взаємодії двох *нескінченних* пластин з реального металу на одиницю площі може бути записаний в такій формі:

$$f_{\rm rad} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}p\, p^2\omega^3 \frac{1}{\exp(2\hbar\omega/kT)-1}\times$$
$$\times\Bigg\{ \left[\left(\frac{s+p}{s-p}\right)^2 \exp(-2ip\omega a/c) - 1\right]^{-1} +$$

$$+\left[\left(\frac{s+\varepsilon p}{s-\varepsilon p}\right)^2 \exp(-2ip\omega a/c)-1\right]^{-1}\Bigg\},\tag{4.25}$$

де $s=\sqrt{\varepsilon(\omega)-1+p^2}$, a — відстань між взаємодіючими тілами.

Інтегрування по p ведеться уздовж траєкторії, що складається з двох частин: від 1 до 0 по дійсній осі і від $i0$ до Δf_{rad} вздовж уявної осі.

Ми досліджуємо різницю Δf_{rad} між вкладами в силу Казимира від теплових флуктуацій для бездисипаційного металу ($\nu=0$) і для металу зі слабкою дисипацією ($\nu\to 0$),

$$\Delta f_{\mathrm{rad}} = f_{\mathrm{rad}}\Big|_{\nu\to 0} - f_{\mathrm{rad}}\Big|_{\nu=0}.\tag{4.26}$$

Саме ця величина описує частину сили Казимира $f_{\mathrm{rad}}(T)$, яка лінійно спадає з T і має стрибкоподібну поведінку при $\nu\neq 0$.

Важливо відзначити, що тільки перший член в фігурних дужках в рівнянні (4.25) (інтеграл по p від $i0$ до $+i\infty$ і по ω від 0 до $+\infty$) забезпечує цю розривність. Отже, різниця Δf_{rad} може бути записана як

$$\begin{aligned}\Delta f_{\mathrm{rad}} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\mathrm{Re}\int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \int\limits_{0i}^{+i\infty} \mathrm{d}p\, p^2\omega^3 \frac{1}{\exp(2\hbar\omega/kT)-1}\times\\ \times\Bigg\{\left[\left(\frac{s+p}{s-p}\right)^2\exp(-2ip\omega a/c)-1\right]^{-1}-\\ -\left[\left(\frac{s|_{\nu=0}+p}{s|_{\nu=0}-p}\right)^2\exp(-2ip\omega a/c)-1\right]^{-1}\Bigg\}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Вводячи нові позначення,

$$t=\frac{\omega}{\nu},\quad x=-\frac{2ip\omega a}{c},\quad \alpha=\frac{c}{2a\omega_p},\tag{4.28}$$

і вважаючи, що $\hbar\nu \ll kT$, отримуємо

$$\Delta f_{\rm rad} = -\frac{kT}{8\pi^2 a^3}{\rm Im}\int\limits_0^\infty \frac{{\rm d}t}{t}\int\limits_0^\infty \frac{{\rm d}x, \qquad x^2}{\left(\alpha x+\sqrt{\alpha^2x^2+\dfrac{t}{t+i}}\right)^4\left(\dfrac{t+i}{t}\right)^2{\rm e}^x-1}. \tag{4.29}$$

Тут символ ${\rm Im}$ позначає уявну частину комплексного числа.

З цього рівняння видно, що різниця $\Delta f_{\rm rad}$ *не залежить* від ν і головний внесок в цей інтеграл відбувається з $x \sim 1$ і $t \lesssim 1$. Таким чином, згідно з визначенням нових змінних (4.28), характерні значення ω виявляються того ж порядку або менші за ν.

Для металів з $\alpha \lesssim 1$ значення інтеграла в рівнянні (4.29) близько до 1, і маємо

$$\Delta f_{\rm rad} \sim \frac{kT}{a^3} \qquad (\text{для металлов с} \quad \omega_p \gtrsim c/a)\,. \tag{4.30}$$

В протилежному випадку $\alpha \gg 1$, характерні частоти ω флуктуаційних полів навіть менші за ν, $\omega \sim \nu/\alpha \ll \nu$. Для таких малих відстаней a значення інтеграла в рівнянні (4.29) близько до $1/\alpha^3$, і

$$\Delta f_{\rm rad} \sim \frac{kT\omega_p^3}{c^3} \qquad (\text{коли} \quad a \ll c/\omega_p)\,. \tag{4.31}$$

Таким чином, головний внесок в $f_{\rm rad}(T)$ в теорії Ліфшиця відбувається з частот, які відповідають двом нерівностям:

$$\omega \ll kT/\hbar, \qquad \omega \lesssim \nu. \tag{4.32}$$

Очевидно, що довжини хвиль флуктуаційних полів з такими частотами повинні бути багато менші за розміри зразка. В іншому випадку зразок не може розглядатися як напівнескінченний. Іншими словами, теорія Ліфшиця дає фізично коректний результат для $f_{\rm rad}(T)$, що спадає з температурою, якщо

$$\nu \gg \frac{2\pi c}{L}, \tag{4.33}$$

$$kT \gg \frac{2\pi\hbar c}{L}. \tag{4.34}$$

Тут L — ширина зразка. Ясно, що метал з плазмовою частотою набагато більшою, ніж інші характерні частоти ω_i (частота $2\pi c/L$ серед них), і з $\nu \ll \omega_i$ повинен мати властивості, близькі до ідеального металу. Це означає, що нерівність

$$\nu \ll \frac{2\pi c}{L}, \tag{4.35}$$

зворотня до (4.33), гарантує зростання сили Казимира з температурою, подібно до випадку ідеального металу. Ця умова природно виконується для чистих металів. Наприклад, це вірно для металевого диска з площею $\sim 10^{-2}$см^2, якщо релаксаційна частота ν менша за 10^{12} с$^{-1}$.

Відзначимо, що умову [109] не було виконано при проведенні експерименту в роботі [300] (з маленькою металевою кулею радіуса $R = 151,3$ мкм). Для всіх температур, використаних в експерименті, довжини хвиль флуктуаційних полів, відповідальних за температурне спадання сили Казимира (очікуване з теорії Ліфшиця з моделлю Друде для діелектричної проникності), були порядка R і більші, ніж радіус $r \sim (Ra)^{1/2}$ ефективної області взаємодії кулі. Тому не дивно, що температурне спадання не спостерігалося в роботі [300].

Відзначимо також, що умова [300] вирішує проблему невідповідності між теоремою Нернста і лінійним спаданням вільної енергії Казимира з температурою. Дійсно, лінійна асимптотична залежність $f_{\rm rad}$ від T не виконується, коли $T \to 0$.

Таким чином, в даному пункті показано, що існують прості обмеження на застосовність теорії Ліфшиця. Сила Казимира для металів, де плазмова частота ω_p набагато більша інших характерних частот системи, зростає монотонно з температурою T, якщо виконано нерівність (4.35).

Таким чином, як для масивних тіл, так і для тонких плівок, сила Казимира є чутливою до властивостей речовини тіл, що взаємодіють, і дозволяє виявити ці властивості за залежністю сили Казимира від температури. В цьому підрозділі розглянуто, як в рамках моделі Друде з урахуванням температурної залежності релаксаційної частоти для різних металів можна отримати різні температурні залежності, які стають більш вираженими для тонких плівок. У наступному підрозділі ми переходимо до аналізу експериментальної установки спектроскопії атомів стронцію, у якій роль ефекту Казимиру може виявитися негативною, оскільки ця взаємодія впливає на спектральну лінію переходу атома.

4.2. Спектроскопія атомів Лемба-Діка в порожнистому фотонному кристалічному волокні

В цьому підрозділі розглядається експериментальна установка спектроскопії атомів стронцію. Досліджується перехід ${}^1S_0$— ${}^3P_1$ атомів ${}^{88}Sr$ в одновимірній оптичній гратці, налаштованій на так званий «магічний стан», в якому атоми обмежені поблизу осі порожнистого фотоннокристалічного волокна (ПФКВ) та в режимі Лемба-Діке, в якому вдасться усунути світловий зсув, тобто зміну частоти внаслідок енергії в полі світлової пастки [142, 143, 147]. Доволі вузька ширина лінії переходу $\gamma_p = 7,5$ кГц [148] робить цей перехід ефективним для дослідження взаємодій атом-атом і атом-волокно за розширенням та зсувом його спектральних ліній. Добре вивчений вплив зіткненнь [149] дозволяє досліджувати зайнятість атомів у гратках шляхом аналізу посилення зсуву за рахунок зіткнень з використанням резонансної диполь-дипольної взаємодії, тоді як загальний кутовий момент $J = 1$ верхнього стану дозволяє вивчати ефекти подвійного променезаломлення волокна через тензор зсуву світла [147]. Ретельно усуваючи ефекти зіткнень, зсуву світла і ті, що спричинені подвійним променезаломленням, ми показуємо, що на частоту атомного резонансу волокно може не впливати в межах невизначеності $0{,}11$ кГц, або відносного значення $\approx 3 \times 10^{-13}$. Ці дослідження дають корисну інформацію для проектування оптичних граток годинників на основі волокон на переходах $^1S_0$– $^3P_0$ з тактовими частотами порядка мГц [150], де, як очікується, ефекти зіткнень і поляризації зсуву світла будуть пригнічені більш ніж на 3-7 порядків, залежно від ізотопів, які використовують [151].

4.2.1. Умови спектроскопії в порожнистому волокні

На рисунку 4.3 показано експериментальну установку. Атоми ^{88}Sr охолоджуються лазером і потрапляють у пастку при температурі декількох мкК, використовуючи магнітооптичну пастку (МОП) [301]. Біля МОП розміщено волокно з шостигранною порожниною довжиною 32 мм [138, 302, 303]. Волокно розраховано на експериментальні довжини хвиль у діапазоні (689–914 нм) з показниками втрат меншими за 650 дБ км$^{-1}$ і підтримує розповсюдження переважно в режимі HE_{11} (див. рис. 4.4). Оптичні лазери, що створюють гратку, на довжині хвилі $\lambda_L \approx 813$ нм підключені з обох кінців ПФКВ. Потенціальна глибина оптичної решітки складає приблизно 30 мкК в положенні МОП (на відстані $z = -1,6$ мм від вхідного кінця ПФКВ) і 300 мкК всередині волокна. Після завантаження порядка 10^4 атомів в оптичну решітку атоми адіабатично прискорюються до $v_m \approx 53$ мм с$^{-1}$ і транспортуються всередину порожнистого волокна в положення z. На рис. 4.3 показано схему установки, де магнітооптично захоплені атоми завантажуються в оптичну решітку при $z = -1{,}6$ мм від краю волокна. Зріз волокна і розподіл інтенсивності світла в ньому показано на рис. 4.4

Прискорення та позиціонування атомів контролюється різницею частот

$$\delta\nu(t) = \nu_2(t) - \nu_1 \tag{4.36}$$

лазерів гратки, як зазначено на рис. 4.3 та 4.5, панель а. Для адіабатичного прискорення (уповільнення) атомів ми збільшуємо зі швидкістю $\approx$ 2 кГц/мс різницю частот $\delta\nu(t)$ протягом 60 мс.

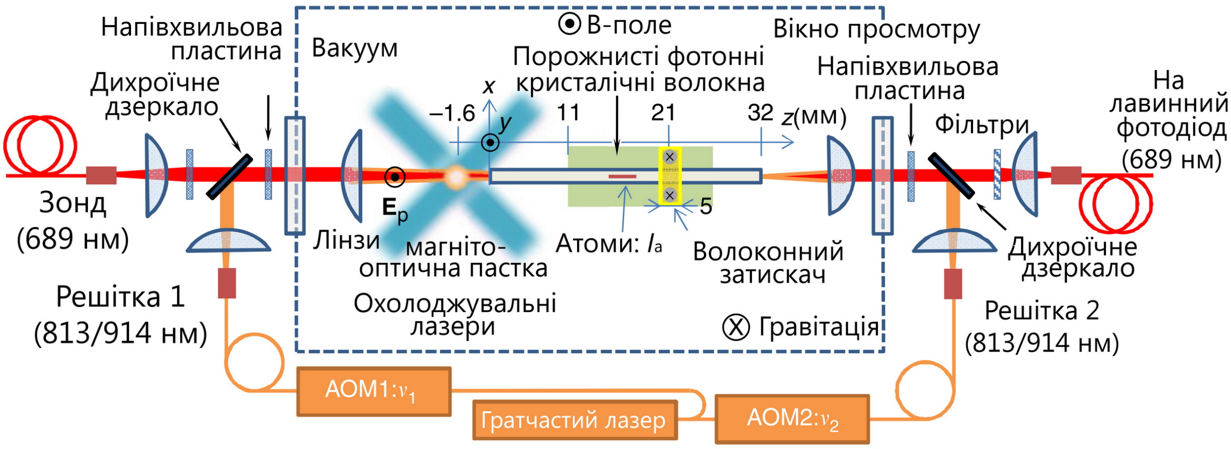

Рис. 4.3. Експериментальна установка спектроскопії атомів у порожнистому волокні.

Швидкість транспорту v_m оптимізована для максимізації кількості атомів, що проходять через волокно довжиною 32 мм, враховуючи компроміси: хоча коротший час проходження ($\sim \nu_m^{-1}$) через волокно зменшує втрати на зіткнення, більший час ніж ν_m збільшує втрати на нагрівання атомів, як ми обговорюємо далі.

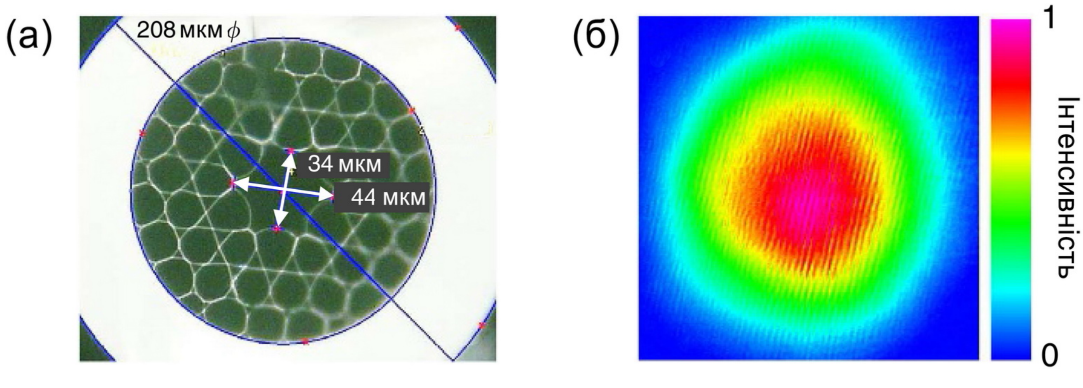

Рис. 4.4. Мікроскопічне зображення зрізу волокна (панель а) та розподіл інтенсивності світла лазера всередині ПФКВ довжиною 32 мм (панель б).

Налаштовуючи різницю частот

$$\delta\nu(t) = \nu_2 - \nu_1 \tag{4.37}$$

лазерів, атоми транспортуються в ПФКВ. Зондовий лазер збуджує перехід $^1S_0$–$^3P_1(m=0)$ при 689 нм, при цьому пропущене світло подається у лавинний фотодіод (ЛФД) через одномодове волокно (ОМВ) після усунення фотонів гратки.

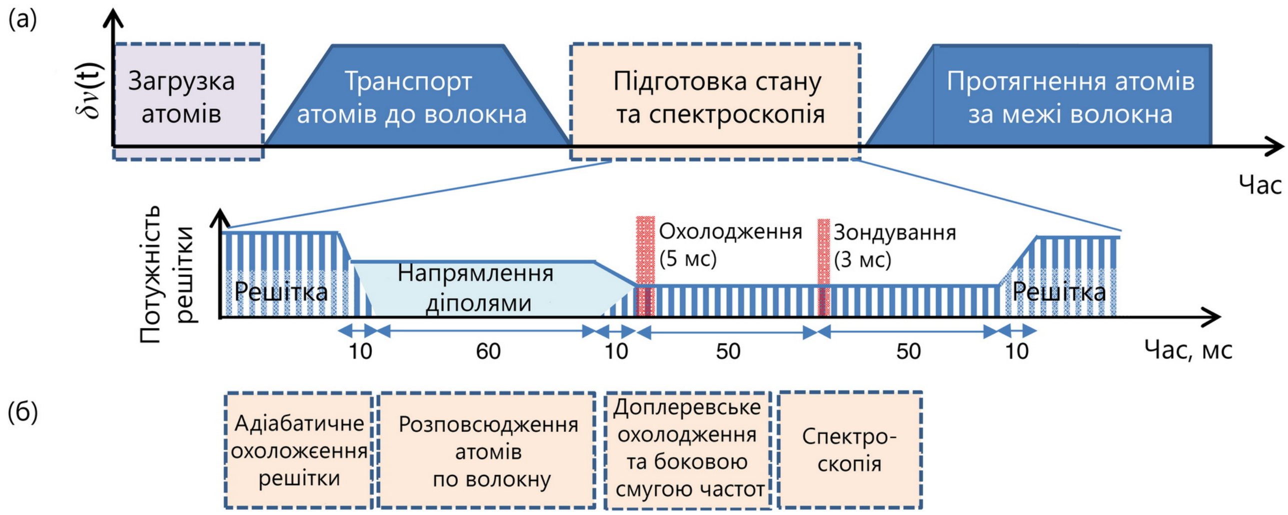

Рис. 4.5. Транспорт атомів в ПФКВ (панель а) і протокол розміщення атомів у волокні (панель б).

Повільно вимикаючи один із гратчастих лазерів, ми дозволяємо атомам вільно розширюватися вздовж осі волокна, при цьому вони керуються дипольною пасткою і проходять відстань

$$l_a = t_f \times 2\sqrt{\langle \nu_z^2 \rangle} \approx 2{,}8 \text{ мм} \tag{4.38}$$

протягом $t_f = 60$ мс. Потім оптична гратка поступово відновлюється протягом 10 мс, тоді як частота зондового лазера змінюється від $\Delta\nu_p = -35$ кГц до -70 кГц за 5 мс, щоб змістити атоми в вузли гратки за допомогою доплерівського і бічного охолодження.

Зупинимося на деяких деталях установки. Зондовий і гратчастий лазери, які направляються через волокна, що підтримують поляризацію (ПП-ОМВ), з'єднуються з ПФКВ за допомогою пар асферичних лінз: вихід ПП-ОМВ колімується об'єктивом $f = 4{,}6$ мм, потім проходить через вакуумний віконний проріз без аберацій, підключений до ПФКВ за допомогою об'єктива $f = 18{,}4$ мм. Зазвичай

90 % потужності лазера передається через волокно довжиною 32 мм. Картина напруженості далекого поля майже гауссівська, як показано на рис. 4.4, панель б. Просторова мода після ПФКВ перевіряється шляхом порівняння його з іншим ПП-ОМВ, де ми досягаємо загальної ефективності зв'язку (ОМВ-П-ОМВ) у 70 %.

Волокно виготовляється із застосуванням стандартної техніки складання та витягування. Структура волокна — шостикутна гратка з кроком 14 мкм (рис. 4.6, панель а) і товщиною стійки 196 нм (рис. 4.6, панель б). Це порівняно мала товщина кремнієвої стійки для ПФКВ [302], що дозволяє волокну направляти світло з низькими втратами на довжинах хвиль до 400 нм (див. рис. 4.7), і таким чином охоплює експериментальні робочі довжини хвиль 813 нм та 689 нм з показниками втрат 530 дБ/км і 560 дБ/км, відповідно.

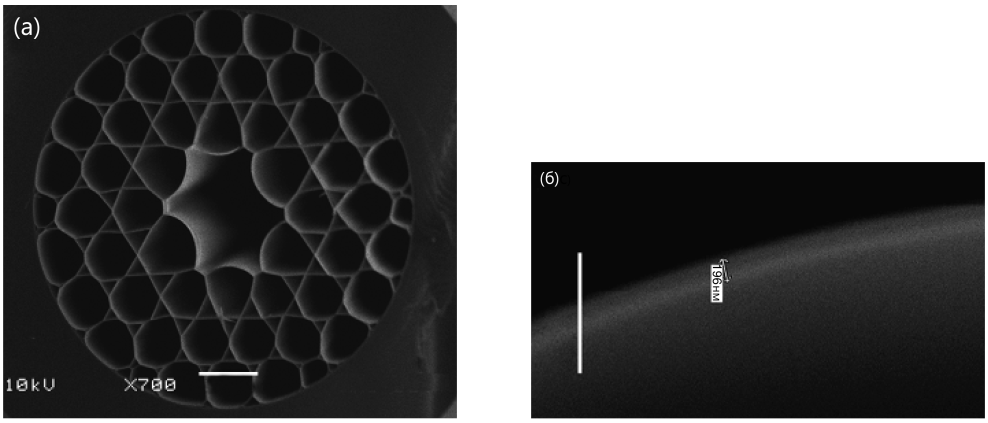

Рис. 4.6. Скануюча електронна мікрофотографія поперечної структури волокна, з масштабом 20 мкм (панель а) та зменшення масштабу до 1 мкм для однієї з кремнієвих стійок (панель б).

4.2.2. Час декогеренції атомів в вузлах оптичної гратки

Час декогеренції атомів у волокні викликає серйозне занепокоєння для обговорення його потенційних застосувань, оскільки зіткнення з залишковими газами суттєво обмежують час когерентності захоплених атомів. На вставці рис. 4.8 показано час життя $\tau = 347$ мс± 8 мс атомів, що потрапили у точку $z =$

23,4 мм. Основна панель рисунку 4.8 показує час когерентності атомів в залежності від положення вздовж волокна. Час життя $\tau = 500$ мс біля входу волокна, який близький до вимірюваного поза волокном, зменшується до $\tau = 350$ мс у середини волокна. Використовуючи модель зіткнення у [304] та беручи до уваги виміряні часи когерентності та глибину захоплення, ми оцінюємо тиск в середині та зовні волокна як $P_{\text{вн}} \approx 1{,}7 \times 10^{-6}$ Па і $P_{\text{зовн}} \approx 1 \times 10^{-6}$ Па. Останнє добре узгоджується з виміряним тиском, і збільшення тиску у волокні обґрунтовано пояснюється малим радіусом $r_c = 17$ мкм серцевини волокна та швидкістю виведення газу q на одиницю площі стінки волокна.

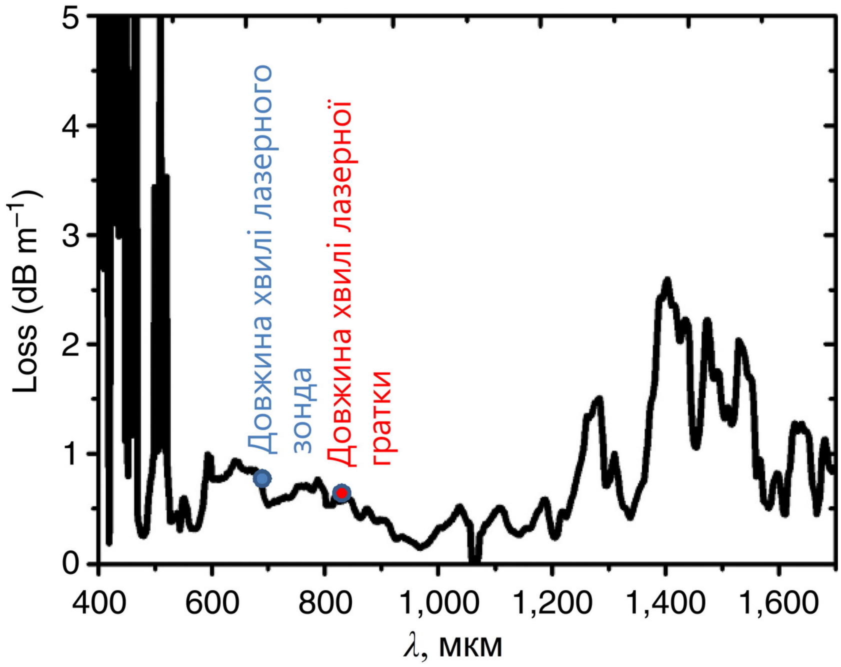

Рис. 4.7. Спектр втрат волокна ПФКВ, використаного в експерименті.

Вирішуючи одновимірне рівняння дифузії, ми отримуємо стаціонарне рішення, тобто з $\partial P_{\text{ФКВ}}/\partial t = 0$, для тиску всередині волокна:

$$P_{\text{ФКВ}}(z,l) = -\frac{qz}{r_c D}(z - l) + P_{\text{зовн}} \tag{4.39}$$

для $0 < z < l$, де l – довжина волокна, D — коефіцієнт дифузії. Виходячи з розрахункового тиску $P_{\text{ФКВ}}(l/2, l)$ з $l = 32$ мм, тиск у середній ділянці волокна для довільної довжини l буде масштабуватися як

$$P_{\text{ФКВ}}(l/2, l) \approx 7 \times 10^{-4} l^2 \text{ Па м}^2 + P_{\text{зовн}}. \tag{4.40}$$

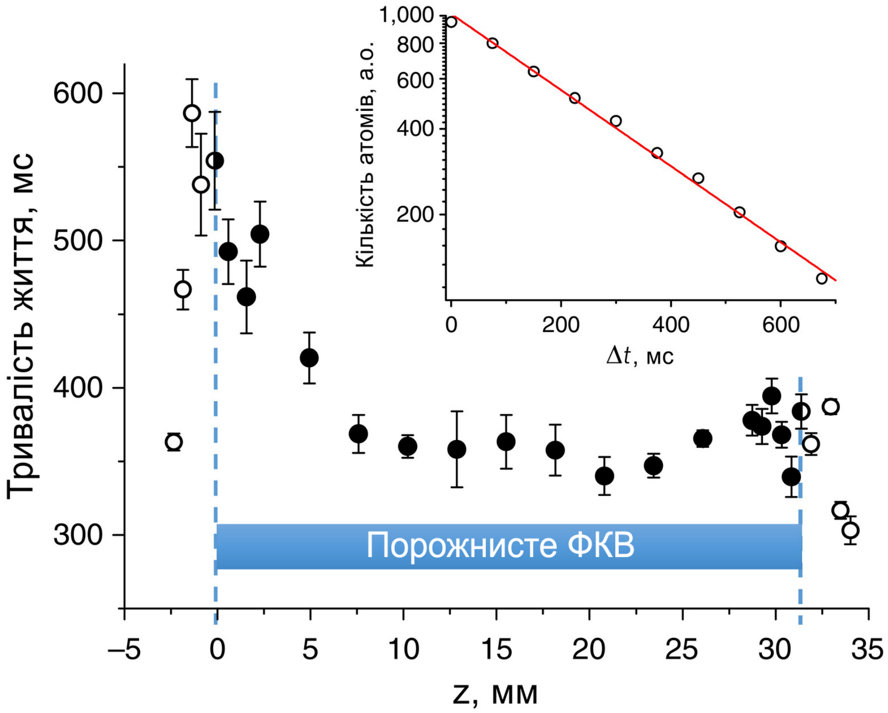

Рис. 4.8. Час життя атомів у порожнистому волокні. Вставка: динаміка зменшення числа атомів у точці на відстані 23,4 мм від краю волокна

Ми сподіваємось, що обробка волокна може зменшити швидкість виділення газів q, тим самим подовжуючи час життя атомів для довшого волокна у подальших установках.

Час когерентності визначається кількістю атомів N_a, що проходять крізь волокно, як функція часу затримки Δt їх всередині волокна за певного z. Величина N_a вимірюється за допомогою лазерної флуоресценції на переході $^1S_0$–$^1P_1$ на виході з волокна. На вставці рис. 4.8 показано приклад зміни кількості атомів, виміряних при $z = 23{,}4$ мм. Червона лінія показує експоненціальне наближення експериментальних даних, яке визначає час життя $\tau = 347$ мс ± 8 мс. Після завантаження атомів від МОП при $z = -1{,}6$ мм атоми потрапляють у волокно довжиною 32 мм при $z = 0$, яке показано синьою областю. Порожні кола показують час когерентності атомів поза волокном, який стає довшим, коли атоми наближаються до краю волокна, через збільшення потенціальної глибини. Час когерентності всередині волокна (заповнені кола) зменшується до середини волокна через збільшення числа зіткнень із залишковими газами. Асиметрична залежність часу від положення відносно середини волокна ($z = 16$ мм) може бути пояснена надмірним нагріванням атомів під час транспортування, що скорочує тривалість когерентності для даної глибини пастки та тиску газу при збільшенні z. Вказані стандартні похибки при апроксимації для кожної точки.

Вищезазначений результат також свідчить про відсутність додаткових втрат атомів у волокні, поки атоми утримуються в одному положенні. Однак ми спостерігаємо більший нагрів атомів, оскільки швидкість транспорту v_m зростає. При $v_m = 53$ мм с$^{-1}$ швидкість нагрівання, за оцінками, становить величину ~ 300 мкК с$^{-1}$ для глибини потенціалу рухомої гратки, що становить 180 мкК. Ми пояснюємо це параметричним нагріванням атомів, спричиненим залишковим полем стоячої хвилі, яке створюється частковим відбиттям ($\sim$ 0,5 %) світла лазера від області спостереження. Цей потенціал стоячої хвилі модулює потенціал рухомої решітки на 7 % на частоті

$$f_m = 2v_m/\lambda_L \sim 130 \text{ кГц}, \tag{4.41}$$

при переміщенні атомів на $\lambda_L/2$. Зі збільшенням v_m ця частота стає ближчою до параметричного резонансного стану [305]

$$f_m = 2f_{\text{гр}}/n, \tag{4.42}$$

де $f_{\text{гр}} \approx 300$ кГц є частота коливань решітки та $n = 4$. Щоб зменшити це нагрівання, застосовується лазерне охолодження під час транспортування, що успішно зменшує втрати від нагрівання атомів.

4.2.3. Абсорбційна спектроскопія

Проводилася поглинаюча спектроскопія для атомів, що захоплені на відстані $z \sim 4$ мм. Атомний перехід ${}^1S_0$–${}^3P_1(m = 0)$ при $\lambda_p = 689$ нм зондується лазером, ширина лінії і дрейф частоти якого на годину становлять менше 1 кГц, що перевірялося на порожнині зі скла з наднизьким розширенням (ННР). Ми застосовуємо поле зміщення

$$\mathbf{B}_0 = (0{,}14mT)\hat{\mathbf{e}}_x, \tag{4.43}$$

яке орієнтоване вертикально (див. рис. 4.3), і що визначає вісь квантування. Зондовий лазер з лінійною поляризацією і електричним полем $\mathbf{E}_p$, паралельним $\mathbf{B}_0$, збуджує перехід. Диференціальний зсув світла для переходу задано виразом [147]

$$\Delta\nu_L = \Delta\tilde{\alpha}(\lambda_L, \epsilon_L) I_L, \tag{4.44}$$

де $\Delta\tilde{\alpha}(\lambda_L, \epsilon_L)$ – диференціальна поляризація, яка залежить від довжини хвилі λ_L лазерної гратки та її поляризації ϵ_L. Магічна умова $\Delta\tilde{\alpha}(\lambda_L, \epsilon_L) = 0$ для усунення диференціального зсуву світла 690 нм $< \lambda_L < 915$ нм може бути виконана шляхом налаштування тензорного внеску зсуву світла в стані ${}^3P_1(m = 0)$, який визначається кутом θ_L лінійно поляризованого гратчастого лазера

$$\epsilon_L = \mathbf{E}_L / |\mathbf{E}_L| \tag{4.45}$$

відносно осі квантування. Важливо, що, незважаючи на те, що хвильоводна мода у ПФКВ має невелику поздовжню складову E_z, вона зникає в конфігурації стоячої хвилі.

Ми використовуємо інтенсивність світла зонду $I_p \approx 0{,}15 I_0$, де інтенсивність $I_0 = 3$ мкВт $\cdot$ см$^{-2}$ відповідає насиченню переходу. Атоми, що пройшли волокно, детектуються за допомогою лавинного фотодіода (ЛФД), як показано на рис. 4.3, де загальна ефективність підрахунку фотонів оцінюється в 30 %. Ми визначаємо частотно-залежну оптичну глибину (ОГ) як

$$\text{ОГ}(\Delta\nu_p) = \frac{1}{1 + I_p/I_0 + (2\Delta\nu_p/\gamma_p)^2} \frac{2}{\pi w_0^2} \times \\ \times \int_0^1 \mathrm{d} \int_0^{r_c} \mathrm{d}r 2\pi r n(z,r) \frac{3\lambda_p^2}{2\pi} e^{-2r^2/w_0^2} \tag{4.46}$$

де $\Delta\nu_p = \nu_p - \nu_0$ є відстройкою зондового лазера. Тут ми наближаємо профіль керованої моди Бесселя до гауссівської моди з $w_0 = 11{,}8$ мкм. Ми також вважаємо, що роподіл атомної щільності відповідає

$$n(z,r) = \rho(z) e^{-r^2/w_a^2}, \tag{4.47}$$

і припускаємо, що $w_a \approx 2{,}0$ мкм, що оцінено за атомною температурою та частотою радіального захоплення $\approx 1{,}3$ кГц. Тут $l = 32$ мм і $r_c = 17$ мкм — довжина і радіус порожнистого волокна відповідно. Вводячи швидкість підрахунку фотонів з атомами та без них, Π_w і $\Pi_{w/o}$, і фонову швидкість підрахунку Π_{bk}, коефіцієнт пропускання волокна визначається як

$$T = \frac{\Pi_w - \Pi_{bk}}{\Pi_{w/o} - \Pi_{bk}}. \tag{4.48}$$

За його допомогою отримуємо оптичну глибину ОГ$(\Delta\nu_p) = -\ln$T. Кількість атомів у волокні $N_a \approx 1200$ ОГ(0). Щоб уникнути надмірних зсувів світла під час спектроскопії, інтенсивність гратки зменшено на порядок від тієї, яка використовується під час транспортування атома. Час зондування переходу обмежується 3 мс, щоб зменшити втрати нагріву фотонів при зміщенні атомів з вузлів гратки.

Порожнина волокна має шостикутну форму із внутрішнім радіусом $r_c \sim$ 17 мкм [302]. На рисунку 4.9 показано модуль електричних полів хвильоводної моди уздовж двох осей симетрії порожнини.

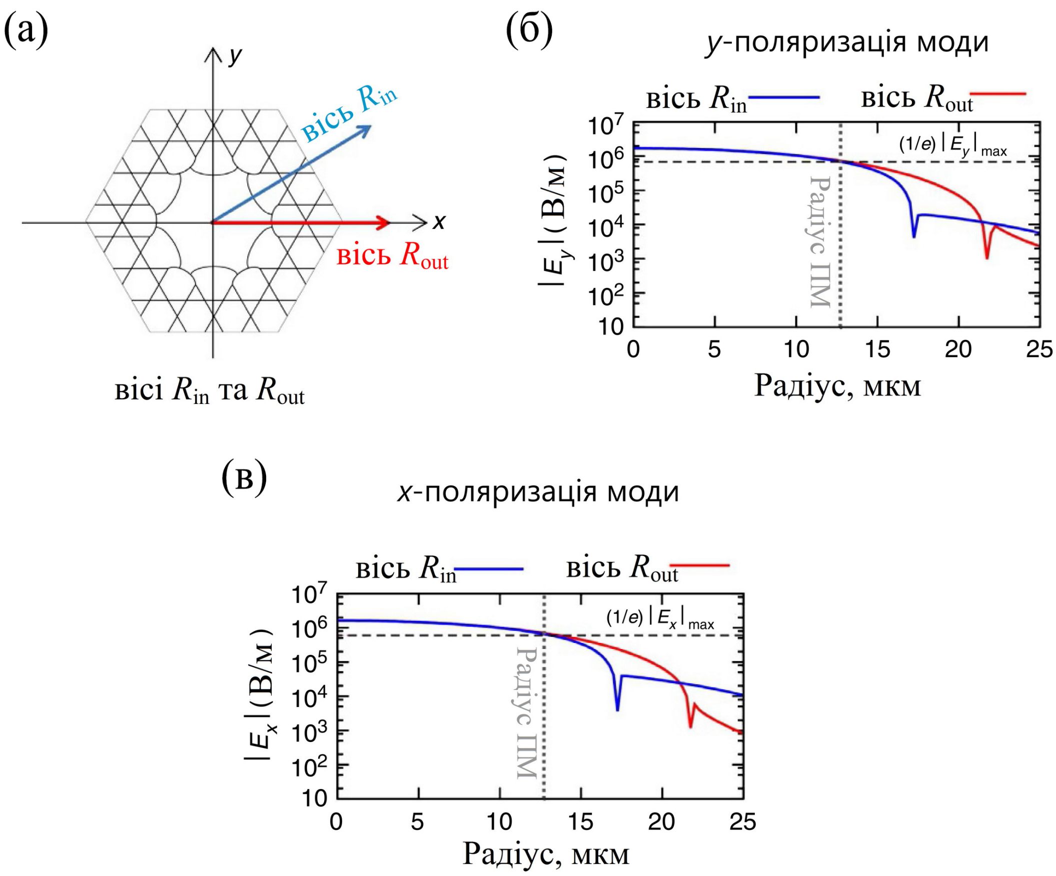

Рис. 4.9. Поперечний профіль y-поляризованого (панель б) та x-поляризованого (панель в) електричного поля HE_{11} вздовж осей R_{in} (сині криві) і R_{out} (червоні криві), позначених на панелі а.

Представлені моделювання виконуються в спектрі 800–830 нм, щоб покрити робочу довжину хвилі 813 нм. Вертикальні пунктирні лінії вказують радіальне положення, де поле зменшується до рівня e^{-1} від максимума, що відповідає радіусу поля моди HE_{11} $\sim$ 12,7 мкм. Цей поперечний профіль інтенсивності Бесселя добре апроксимується гауссівським профілем з радіальним положенням в $w_0 = 11,8$ мкм на рівні e^{-2} від максимального.

Електричне поле в В м$^{-1}$ було розраховано для загальної потужності 1 Вт. Радіус поля моди HE_{11} становить $\sim$ 12,7 мкм, як показано вертикальними пунктирними лініями. Горизонтальні пунктирні криві вказують на рівні e^{-1} від максимального значення поля.

Електричне та магнітне поля для основної моди HE_{11} обчислюються методом скінченних елементів. На рисунках 4.10 та 4.11 показані компоненти електричного $\mathbf{E}$(В м$^{-1}$) та магнітного $\mathbf{B}(T)$ полів, коли загальна потужність в моді HE_{11} встановлена на рівні 1 Вт. Результати показують, що величина поздовжньої складової майже в 100 разів менша, ніж поперечні компоненти (E_x, E_y).

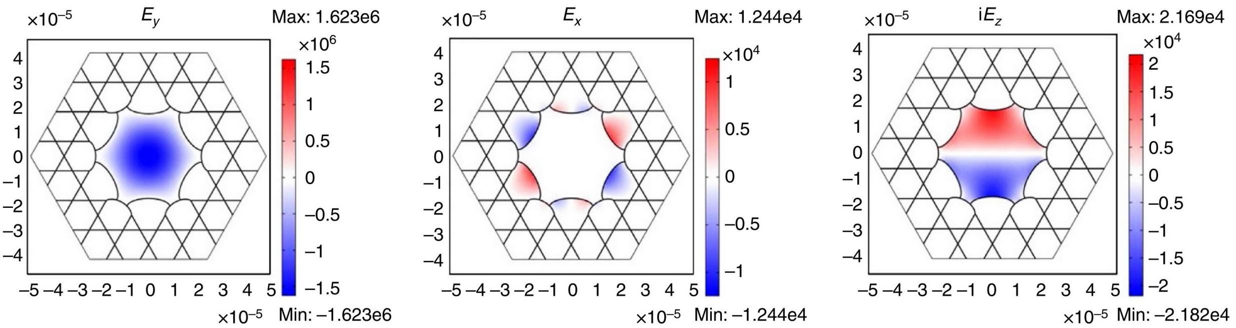

Рис. 4.10. Компоненти електричного поля в y-поляризованій моді HE_{11}.

Перейдемо до аналізу оптичної глибини. На рис. 4.12 показано виміряну оптичну глибину ОГ$(\Delta\nu_p)$ як функцію частоти зондового лазера. Режим Лемба-Діка та виключення ефекту світлового зсуву дозволяють наблизитися до природної ширини лінії переходу.

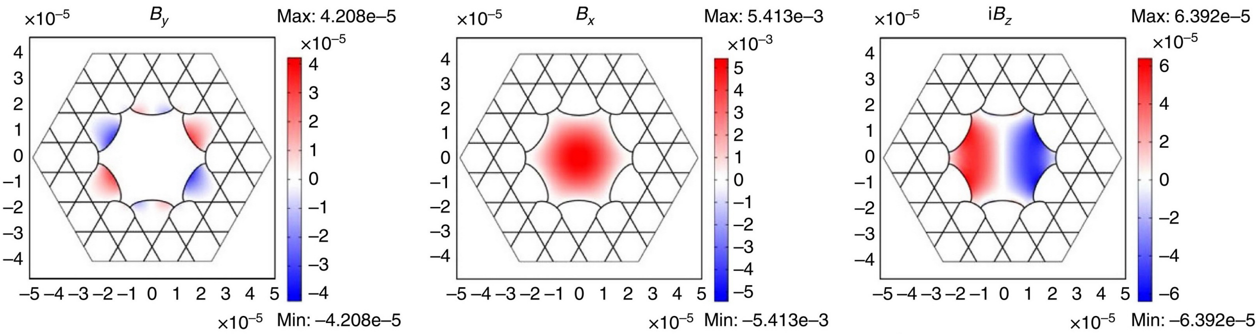

Рис. 4.11. Компоненти магнітного поля в y-поляризованій моді HE_{11}.

Однак, як показано червоними символами на рис. 4.13, ми спостерігаємо зміщення і розширення за рахунок зіткнень для ОГ(0) $> 0,8$, яке відповідає середній зайнятості атомів кожної ділянки гратки

$$\bar{m} = N_a \lambda_L / (2 l_a) > 0,55. \tag{4.49}$$

Тут довжина атомної хмари l_a вимірюється за допомогою флуоресцентного зображення атомів після вилучення з волокна рухомою граткою.

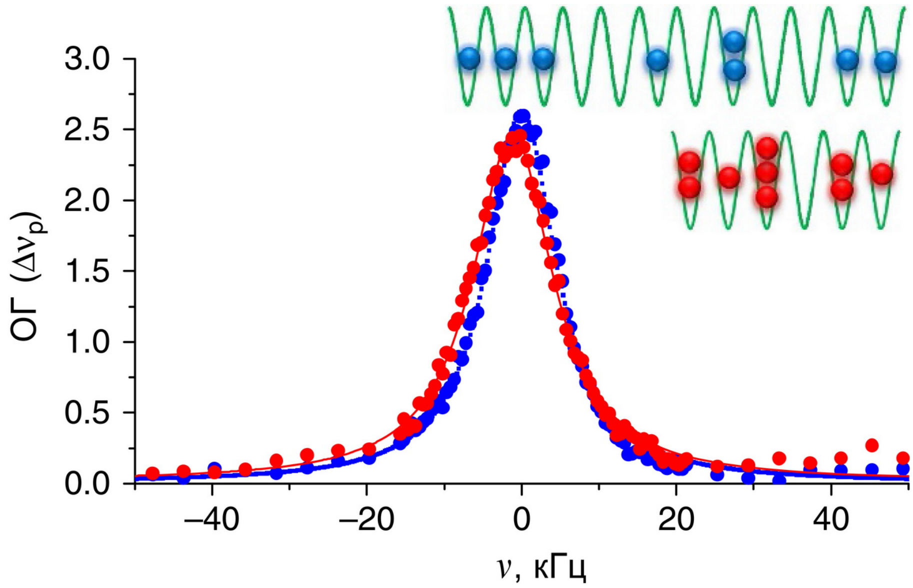

Рис. 4.12. Спектри поглинання з і без атомного ущільнення, як показано на вставці. Параметри: $m \approx 0,45$ (синій колір) і $m \approx 1,7$ (червоний).

Ми оцінюємо зміщення зіткнення $\Delta v_{\text{зіт}}(\bar{m})$ як

$$\Delta v_{\text{зіт}}(\bar{m}) = \sum_{k=2}^{\infty} \beta n_1 (k-1) P(k, \bar{m}), \tag{4.50}$$

де β — коефіцієнт зсуву зіткнень, $n_1 = 1/v$ — щільність атомів для одиночно зайнятої ділянки гратки з $v = 7,8 \times 10^{-13}$ см^3. Розподіл

$$P(k, \bar{m}) = \frac{\bar{m}^k e^{-\bar{m}}}{k!} \tag{4.51}$$

описує розподіл Пуассона для атомів. Червоні та сині пунктирні криві на рис. 4.13, панель б, показують $\Delta v_i(\bar{m})$ з $\beta = -1 \times 10^{-9}$ Гц $\cdot$ см^3, і відповідають точкам даних, показаним червоними та синіми колами. Цей коефіцієнт β зсуву зіткнення досить добре узгоджується з коефіцієнтом, виміряним раніше [149], $\beta_{JILA} = -1,3(3) \times 10^{-9}$ Гц $\cdot$ см^3.

Для того, щоб зробити високу оптичну глибину сумісною зі зменшеними атомними взаємодіями, ми розширюємо хмару атомів над ділянками гратки в волокні, тимчасово вимикаючи поле решітки на $t_f = 60$ мс, зберігаючи при цьому дипольне захоплення в радіальному напрямку.

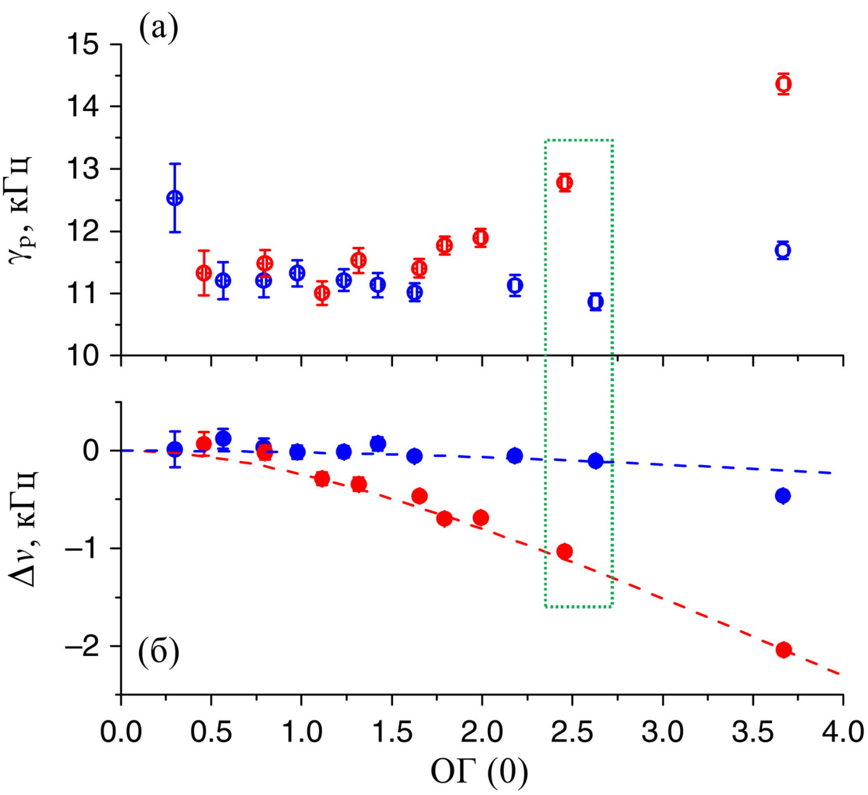

Рис. 4.13. Спектральна ширина лінії (панель а) та зсув як функція параметру ОГ(0) (панель б).

Часова діаграма, наведена на рис. 4.5, панель б, дозволяє нам розширити довжину хмари до

$$l_a = t_f \times 2\sqrt{\langle \nu_z^2 \rangle} \approx 2,8 \text{ мм}, \tag{4.52}$$

де ми використовуємо атомну швидкість $\sqrt{\langle \nu_z^2 \rangle} \approx 23$ мм с$^{-1}$, оцінену з доплерівської ширини 55 кГц. Ця процедура зменшує середню зайнятість атома від $\bar{m} \approx 1,7$ до $\bar{m} \approx 0,45$ (див. сині кола на рис. 4.12), зберігаючи при цьому оптичну глибину ОГ(0) $\approx 2,5$. Сині символи на рис. 4.13 показують, що розширення та зсув за рахунок зіткнень успішно можуть бути виключені, застосовуючи цю процедуру. Однак досягнута ширина лінії 11 кГц припускає, що все ще залишається незрозумілим розширення на кілька кГц.

На експериментальних точках відображається стандартна похибка. Розширення та зсув спектру, в залежності від числа атомів, пригнічується застосуванням протоколу розширення, як показано синіми символами. Зменшення ОГ(0) $< 0,8$ для початкової довжини хмари атома $l_a \approx 700$ мкм, що відповідає $\bar{a} < 0,55$, майже придушує ефект зіткнень (див. червоні кола). Червоні та сині штрихові криві дозволяють оцінити коефіцієнт зсуву зіткнення $\beta = -1 \times 10^{-9}$ Гц $\cdot$ см$^{-3}$. Точки даних, позначені пунктирним прямокутником, відповідають спектрам, показаним на рис. 4.12.

Щоб з'ясувати джерело цього залишкового розширення, ми досліджуємо подвійне променезаломлення у ПФКВ. Крім того, для поліпшення просторової роздільної здатності у волокні ми зменшуємо зсув за рахунок зіткнень, обмежуючи кількість атомів до $N_a < 1200$, тобто ОГ(0)< 1, замість розширення хмар атомів. Вважаючи, що поляризація гратчастого лазера ϵ_L відповідає куту θ_L, як визначено раніше, рівняння (4.44) приймає наступний вигляд:

$$\Delta\nu_L = \Delta\tilde{\alpha}(\lambda_L, \theta_L) I_L. \tag{4.53}$$

Для довжини хвилі $\lambda_L = 813$ нм гратчастого лазера диференціальний зсув світла можна усунути налаштуванням $\theta_L = 46°$. Кутова чутливість тензорного зсуву світла [147]

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\tilde{a}}{\mathrm{d}\theta_L}|_{\theta_L=46^o} = -0{,}17 \text{кГц кВт}^{-1}\text{см}^2\text{град}^{-1} \tag{4.54}$$

робить зсув світла ефективним зондом для вивчення подвійного променезаломлення волокна.

На рис. 4.14, панель а, показано зсув світла, який залежить від інтенсивності гратки, де градієнт вказує на ефективну диференціальну поляризацію

$$\Delta\tilde{\alpha}(\lambda_L, \theta_L) = \Delta\nu_L / I_L. \tag{4.55}$$

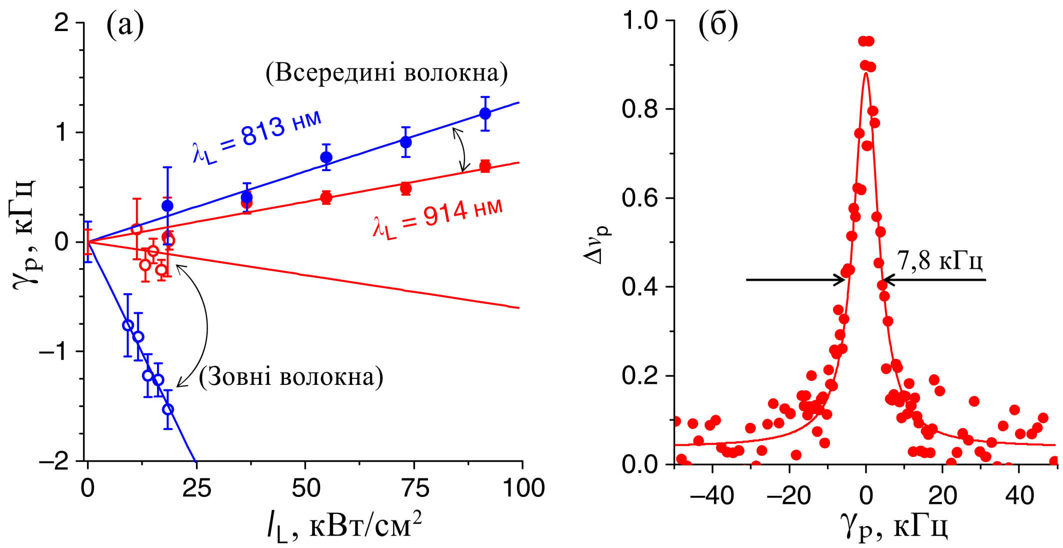

Рис. 4.14. Вимірювання ефектів подвійного променезаломлення волокон: зміщення світла в залежності від інтенсивності для переходу $^1S_0$–$^3P_1(m=0)$ для атомів всередині (•) і зовні (○) волокна (панель а), а також спектр шириною 7,8 кГц (панель б).

Залежності, позначені як (•) та (○) синього кольору, вимірюються для атомів всередині (z_{813} = 3,7 мм) та зовні (z_0 = –1,6 мм) волокна відповідно при λ_L = 813 нм (синій колір) і 914 нм (червоний) з $\theta_L = 46^\circ$ і 90° відповідно. Хоча дані підтверджують, що на частоти атомного резонансу не впливає керування в волокні (як демонструють екстрапольовані при $I_L \to 0$ значення, що збігаються на тій самій частоті), зміна поляризованості всередині ($\Delta\tilde{\alpha}_{\text{вн}}$) та зовні ($\Delta\tilde{\alpha}_{\text{зовн}}$) волокна вказує на наявність подвійного променезаломлення, спричиненого волокнами. Беручи до уваги кутову чутливість тензорного зсуву світла, отримуємо

$$\Delta\tilde{\alpha}_{\text{вн}} – \Delta\tilde{\alpha}_{\text{зовн}} \approx 0,09 \text{ кГц кВт}^{-1}\text{см}^2, \tag{4.56}$$

що відповідає обертанню поляризації на $\delta\theta_L \approx 0{,}5^\circ$ між z_o і z_{813}. Ми досліджуємо залежний від положення ефект подвійного променезаломлення волокна, який, як виявляється, є рівним $\delta\theta_L \approx 0{,}3^\circ$ і, зокрема, майже постійний для $0 < z < 8$ мм.

Порівняно велике відхилення виявлено в області торців волокна та затискача (див. рис. 4.3), що може свідчити про наявність подвійного променезаломлення волокна, спричиненого тиском. У подальших вимірюваннях, і щоб позбутися ефектів, спричинених тиском, ми зосереджуємо свою увагу на положенні у волокні навколо $z \approx 4$ мм.

Для відповідних довжин хвиль точки даних добре апроксимуються лінійною залежністю, а постійні зсуви за ординатою, y_0^{813} і y_0^{914}, зведені до нуля, їх стандартні похибки позначаються при $I_L = 0$ відповідними кольорами. Встановлений градієнт є мірою диференціальної поляризованості $\Delta\tilde{\alpha}(\lambda_L, \theta_L) = \Delta\nu_L / I_L$, яка є чутливою до ефектів подвійного променезаломлення волокна. Отримано спектр шириною 7,8 кГц, який узгоджується із розширеною шириною лінії насичення для $I_p \approx 0{,}077 I_0$, $I_L = 37$ кВт см$^{-2}$ і $\lambda_L = 914$ нм.

Виготовлене волокно демонструє невелику еліптичність, що призводить до залишкового подвійного променезаломлення Δn_{eff}. На рис. 4.15 показано спектр подвійного променезаломлення при довжині лазерної хвилі 813 нм.

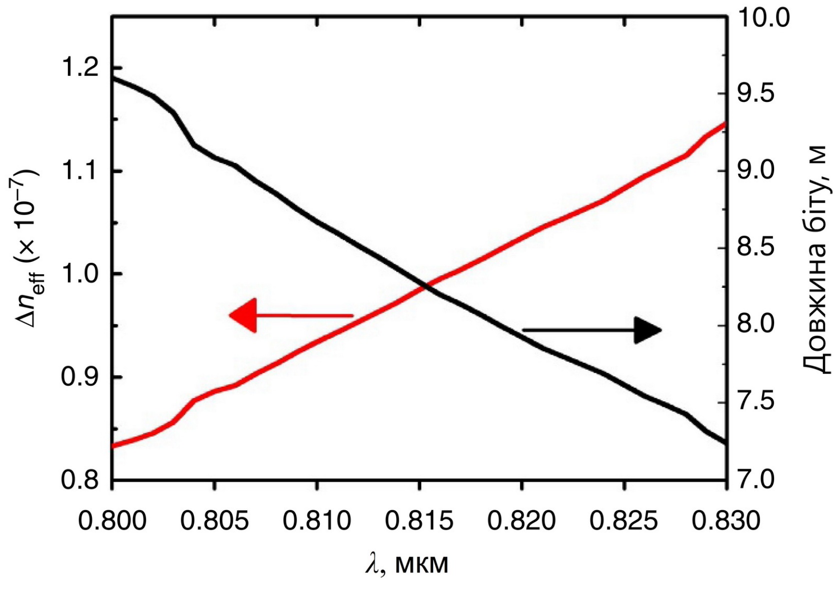

Рис. 4.15. Спектр HE_{11} подвійного променезаломлення (Δn_{eff}) та відповідна йому відстань биття.

Встановлено, що подвійне променезаломлення складає $9{,}6 \times 10^{-8}$ (яке відповідає довжині биття 8,4 м). Це більш ніж на один порядок нижче, у порівнянні з типовим фотонним проміжком в ПФКВ [139]. Окрім власної форми волокна, подвійне променезаломлення також індукується механічними та/або термічними навантаженнями. У випадку фотонного зазору ПФКВ вимірювали подвійне променезаломлення, спричинене поперечним тиском [306], в діапазоні

$$\partial\Delta n_{eff}/\partial p \sim 10^{-11}\ \text{Па}^{-1}. \tag{4.57}$$

Для зменшення ефекту подвійного променезаломлення подальші експерименти проводили на магічній довжині хвилі $\lambda_L = 914$ нм з $\theta_L = 90°$, де кутова залежність $|\mathrm{d}\Delta\tilde{\alpha}/\mathrm{d}\theta_L|$ з'являється лише у другому порядку. Заповнені та порожні червоні кола на рис. 4.14, панель а, показують результуюче зниження чутливості, виміряне відповідно на $z_{914} = 4{,}3$ мм та на $z_0 = 1{,}6$ мм. Незначна зміна значень відносно вимірювань при $\lambda_L = 813$ нм у результатах для різниці довжин хвиль гратки, що визначається співвідношенням

$$\frac{z_{813} - z_0}{z_{914} - z_0} = \frac{813}{914}, \tag{4.58}$$

викликана тим, що ми використовуємо ту саму послідовність налаштування $\delta\nu(t)$ для рухомої гратки. У цьому вимірі ми одночасно реєструємо спектри поглинання для 5 різних параметрів інтенсивності, щоб мінімізувати вплив дрейфу частоти лазера при екстраполяції інтенсивності гратки $I_L \to 0$. Точки даних відповідають

$$\nu_{\text{ФКВ (ВП)}} = \Delta\tilde{\alpha}_{\text{ФКВ (ВП)}} I_L + y_0, \tag{4.59}$$

де $\nu_{\text{ФКВ (ВП)}}$ і $\Delta\tilde{\alpha}_{\text{ФКВ (ВП)}}$ позначають резонансну частоту та диференціальну поляризованість у ФКВ або у вільному просторі (ВП), відповідно, і y_0 визначає частоту зсуву, яка прийнята рівною нулю на рис. 4.14, панель а. Ми позначаємо невизначеність точки перетину осі ординат при нульової інтенсивності за допомогою невизначеності y_0, яка становить 0,18 кГц і 0,11 кГц для 813 нм та 914 нм, відповідно, як показано похибками при $I_L = 0$. Результати показують, що на частоту атомного резонансу волокно не впливає з невизначеністю $\approx 3 \times 10^{-13}$.

На рисунку 4.14, панель б, показано спектр, виміряний на магічній довжині хвилі $\lambda_L = 914$ нм з інтенсивністю гратки $I_L = 37$ кВт/см^2, виміряною в $z \approx 5{,}3$ мм. Ширина лінії 7,8(4) кГц добре узгоджується з розширеною лінією насиченості 7,8 кГц для інтенсивності лазерного зонда $I_p \approx 0{,}077 I_0$, демонструючи, що немає значної (порядка кГц) декогеренції атомів у волокні. При $\lambda_L = 914$ нм ми досліджуємо частоти атомного резонансу в усьому волокні, які, як виявляється, знаходяться в межах 2 кГц. Ця зміна частково обумовлена дрейфом частоти зондового лазера, а частково – просторовою неоднорідністю волокна. Проводяться детальні дослідження залежності неоднорідності волокон, таких як місцеві навантаження на волокно, ефект зарядки та формування додаткового потенціалу на внутрішній поверхні волокна.

4.2.4. Перспективи використання волоконних схем для спектроскопії

Представлена схема є платформою для високоточної спектроскопії з покращеним відношенням сигнал/шум, особливо придатною для мініатюризації оптичних атомних годинників, що працюють на тактових переходах $^1S_0$– $^3P_0$ [150]. Систематична невизначеність таких годинників по суті характеризується ядерним спіном I ізотопу, який одночасно визначає його квантову статистичну природу. Бозонні ізотопи [151, 307–309], наприклад, ^{88}Sr і ^{174}Yb є дуже сприйнятливими до зсуву за рахунок зіткнень, отже, вони, безумовно, вимагають того, щоб вузли були зайняті одиночними атомами, як продемонстровано в 3D оптичних годинникових гратках [151]. Недавнє спостереження свідчить, що із наближенням невизначеності до 10^{-17} зіткнення стають проблемою для годинників навіть із спінполяризованими ультрахолодними ферміонами [310], такими як ^{87}Sr і ^{171}Yb, де зіткнення s-хвиль придушені. Запропоновані методи розширення атомів у волокні повинні бути ефективними для обох ізотопів, щоб зменшити зсув за рахунок зіткнень, зберігаючи кількість атомів або межу КПШ.

На відміну від оптики вільного простору, волоконна оптика вимагає особливого догляду за станом поляризації світла, на який легко впливають механічні навантаження або неоднорідність волокна. Оскільки поляризація світла впливає на зсув світла для електронних станів, що мають ненульовий кутовий момент $F \neq 0$, ферміонні ізотопи з напівцілим ядерним спіном стають сприйнятливими до подвійного променезаломлення волокон навіть у годинникових станах із сумарним електронним кутовим моментом $J = 0$. Однак у порівнянні зі станом $^3P_1$, обраним тут як чутливий зонд, тензорний зсув при переході годинника ^{87}Sr на 7 порядків менший [311], оскільки він походить виключно від його ядерного спіну $I = 9/2$. Таким чином, наші вимірювання дозволяють припустити, що тензорним внеском безпечно нехтувати при досягненні тактової невизначеності 10^{-18}.

Застосований тут ПФКВ довжиною 32 мм має 10^5 вузлів гратки, тобто число атомів до $N_a \approx 10^5$, які вільні як від зіткнень, так і від зсувів світла, що дозволяє досягти проекційного шуму, обмеженого стабільністю $10^{-17}/\sqrt{\tau/s}$ з часом τ усереднення. Це дає виграш у порівнянні з експериментами з просторовими годинниковими гратками, в яких використовуються $\sim 10^3$ атомів, розміщених у 1D-гратках довжиною менше 1 мм. Подальше збільшення кількості атомів повинно бути можливим шляхом збільшення довжини волокна. Більше того, велика оптична глибина та тривалий час атомної когерентності дозволяють застосовувати дисперсійне вимірювання атомів [312], протоколи вимірювання квантового неруйнування (КНР) та спін-стиснення атомів під час роботи годинника. Шляхом гетеродинування або гомодинування сигналу зондового лазера [313], квантова схема зворотного зв'язку [314] може бути використана для керування частотою зондового лазера, замість застосування звичайних проекційних вимірювань [315]. Сильне зв'язування атомів з хвильоводними модами дозволяє досліджувати колективні ефекти, такі як колективні зсуви Лемба [316] та надвипромінення [317]. Зокрема, надвипромінення [318] на годинниковому переході або генерування вузьколінійного джерела світла за допомогою ефекту фазового узгодження [319] може мати потенціал для заміни порожнин порівняно великого об'єму [320, 321], необхідних для оптичних годинників, що призведе до значної мініатюризації оптичних годинників. Більше того, повністю заселений одновимірний ланцюг з

10^5 або більше кубітів, що мають спільну оптичну шину в волоконно-керованому хвильоводі, може бути використаний для квантових обчислень та моделювання [322], забезпечуючи індивідуальний спектроскопічний доступ [323] градієнтом магнітного або електричного поля.

4.2.5. Зсув частоти внаслідок ефекта Казимира

Нарешті оцінемо вклад Казимира-Полдера [324] на спектроскопію. Енергія взаємодії між атомом з поляризованістю і нескінченною поверхнею на відносно великій відстані r_c, для якої виконується умова запаздування, задається

$$U_{cp} = \frac{3\hbar c}{32\pi_2 \varepsilon_0 r_c^4} \alpha \Gamma \tag{4.60}$$

з електричною сталою ε_0. Коефіцієнт Γ залежить від властивостей поверхні: $\Gamma = 1$ для ідеальних металів та $\Gamma < 1$ для діелектричних матеріалів. Будемо розглядати фотонний кристал із долею $P = 0{,}94$ заповнення повітрям, як діелектрик із відносною діелектричною проникністю

$$\varepsilon = 1 \cdot p + \varepsilon_{\text{ВП}} \cdot (1\text{-}p), \tag{4.61}$$

де

$$\Gamma = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \approx 0,08, \tag{4.62}$$

а статичну діелектричну проникність діоксиду кремнію вважаємо рівною $\varepsilon_{\text{ВП}} = 3{,}8$. Зсув енергії атома всередині ПФКВ може бути більшим, ніж значення U_{CP}, задане геометричним коефіцієнтом $G \sim 6$, який враховує взаємодію атома з шістьма стінками (див. рис. 4.16), коли кожна з цих стінок апроксимується нескінченною площиною.

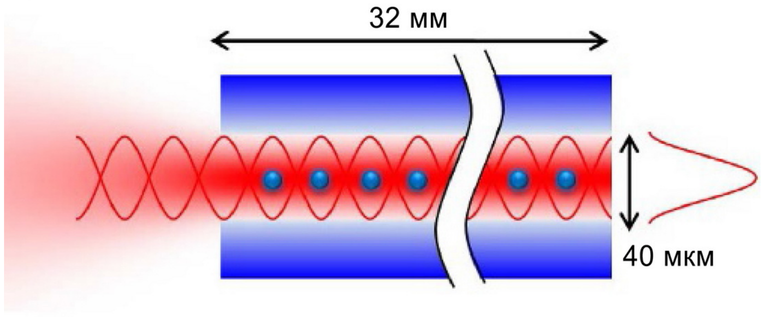

Рис. 4.16. Конфігурація атомів у ПФКВ, що мінімізує взаємодію із стінками.

Різниця в поляризованості для атома Sr в ${}^1S_0$ і ${}^3P_0$ станах [325] становить $\Delta\alpha \approx 4 \cdot 10^{-39}$ Кл м^{2}В$^{-1}$. Для $r_c = 20$ мкм зсув частоти задається як

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{h}\frac{3\hbar c}{32\pi^2\varepsilon_0 r_c^4}\Delta\alpha\Gamma G \approx 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Гц}, \tag{4.63}$$

що відповідає зсуву частоти $\Delta\nu/\nu_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-18}$. Ця оцінка застосовується до нульової температури. При кімнатній температурі теплові ефекти стають того ж порядку, що і нульові коливання. Згідно з [145], це дає збільшення ефекту в 3–4 рази, а взаємодія атом-стінка відповідає зсуву частоти $\sim 10^{-17}$.

Для переходу ${}^1S_0$— ${}^3P_1$ зсув може бути на 20 % більшим через збільшення різниці поляризованостей $\Delta\alpha$ на 20 %. Однак для цього переходу резонансна диполь-дипольна взаємодія може бути більш актуальною [326] через значно більший дипольний момент, ніж для ${}^1S_0$— ${}^3P_0$. Оскільки відстань між атомом та стінкою набагато більша довжини хвилі переходу $r_c/(\lambda_p/2\pi) \sim 180$, домінує режим запаздування. Враховуючи існуючу точність вимірювання $\sim 10^{-13}$, яка відповідає $\sim 10^{-2}\gamma_p$ природної ширини лінії $\gamma_p = 7{,}5$ кГц, взаємодією між атомом і стінкою можна безпечно знехтувати.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [13–15]:

- Показано, що завдяки впливу нульових коливань вакууму сила Казимира взаємодії наноплівки з масивним тілом є чутливою до діелектричних властивостей плівки. Показано, що сила Казимира може бути представлена у вигляді двох доданків, які залежать від температури протилежним чином. Якщо перший доданок спричинений суто квантовими флуктуаціями, то другий визначається термічними флуктуаціями і пропорційний до частоти релаксації у металі плівки.

- Застосовуючи модель Блоха-Грюнайзена, змодельовано залежність сили Казимира від температури і показано, що в той час як для більшості чистих металів, зокрема стронція, барія, цезія, ця залежність монотонно спадаюча до температур плавлення металів, для деяких параметрів, що можуть бути реалізовані для сплавів металів, ця залежність має мінімум.

- Проаналізовано умови роботи установки спектроскопії атомів стронція у порожнистому волокні, в якому створено фотонний кристал. Досліджено можливі перешкоди для роботи волоконних схем, такі як обмежений час зіткнення, взаємодія атомів з атомами та подвійне променезаломлення, спричинені волокнами. У розглянутій установці час когерентності системи по суті обмежений природним часом життя стану $^3P_1$. Подальше збільшення часу когерентності можливо шляхом використання для атомних годинників переходу $^1S_0 {-} ^3P_0$.

- Для умов експериментальної установки спектроскопії атомів стронція в порожнистому волокні оцінено поправку до частоти переходу за рахунок ефекту Казимира з урахуванням різниці поляризовностей атому у двох станах, між якими відбувається перехід, геометричного фактора, що враховує наявність всіх стінок порожнини волокна, прозорості стінок волокна і діелектричної проникності матеріалу стінок. Оцінено можливу зміну цієї поправки за рахунок температури. Врахування всіх факторів приводить до оцінки відносної зміни частоти, що не перевищує $2 \cdot 10^{-18}$. Це означає, що у реальних експериментальних установках, точність в яких не перевищує 10^{-17}, ефект Казимира не обмежує точність спектроскопії.

Результати, що викладені в даному розділі дисертації, можуть бути використані при проектуванні систем волоконної спектроскопії, для аналізу точності атомних годинників, а також для дослідження можливих обмежень інших нано-пристроїв.

Розділ 5

ЕЛЕКТРОННІ МОДИ ТА ТРАНСПОРТНІ ВЛАСТИВОСТІ НИЗЬКОВИМІРНИХ СИСТЕМ

У даному розділі дисертаційної роботи, заснованому на роботах [16, 17], досліджується поширення електронних мод у одно- та двовимірних системах. Одновимірна електронна система з лінеаризованою дисперсійною залежністю еквівалентна набору плазмонів — мод коливань електронної густини, що є основою моделі Латтінжера [155]. Безпосередній наслідок такої лінеаризації у одновимірних електронних системах полягає у відсутності впливу розсіювань плазмонів, яке повинно приводити систему до стану рівноваги. Дійсно, в одновимірній системі закони збереження імпульсу і енергії при зіткненні приводять до обміну швидкостями без зміни їх величин. Для того, щоб електронні моди могли розпадатися і, таким чином, набувати скінченного часу життя, потрібно розглядати деяке узагальнення моделі Латтінжера, що і зроблено у підрозділі 5.1. Також у цьому підрозділі показано, що різні процеси врівноваження плазмонів є ієрархічними та по-різному впливають на динаміку системи після термічного збудження. Розроблено теорію теплового транспорту в системі та обчислюється теплопровідність одновимірного електронного кристалу, як граничного випадку нелінійної рідини Латтінжера, шляхом розрахунку інтегралу зіткнень плазмонів.

Якщо нелінійність у одновимірній системі дає можливість описувати термічний транспорт, то у двовимірній системі, листі графену, саме лінійні діраківські дисперсійні залежності поблизу особливих точок на поверхні Фермі приводять до існування особливого типу локалізованих мод у потенціальному бар’єрі. У підрозділі 5.2 розглядається лист графена у постійному електричному полі, яке формує бар’єр деякої ширини поперек листа графену, але нескінченний вздовж нього. Показано, що за рахунок симетрії системи по відношенню до заміни електронів на дірки і потенціального бар'єра на яму, існують моди, що локалізовані в межах бар'єру і спадають поза його межами. Дисперсійні криві для цих мод мають максимуми, і це призводить до особливостей у електричній провідності графену.

5.1. Поширення електронних мод у одновимірному вігнерівському кристалі

Почнемо з аналізу одновимірної електронної системи, кристалу Вігнера. Як відмічалося у розділі 1, ангармонічні доданки, знехтувані в рамках моделі Латтінжера, ведуть до взаємодії мод. Вплив цього механізму розсіювання на кінетику плазмонів дуже важливий. Перейдемо до формулювання основних наближень і аналіза основних процесів зіткнень плазмонів у вігнерівському кристалі.

5.1.1. Процеси зіткнення плазмонів

Ми моделюємо систему сильно взаємодіючих електронів гамільтоніаном (далі $\hbar = 1$) [327, 328]:

$$H = \sum_l \frac{p_l^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq l'} V(x_l - x_{l'}), \tag{5.1}$$

де p_l і x_l — імпульс і координата l-го електрона ($l = 1, \ldots, N$), і $V(x)$ — потенціал взаємодії. У розрахунках ми розглядаємо екранований кулонівський потенціал

$$V(x) = \frac{e^2}{\epsilon} \left[\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4d^2}} \right], \tag{5.2}$$

де d — відстань до екрануючої підложки, ϵ — діелектрична проникність основного матеріалу дроту. Для цієї моделі стан КВ існує лише в діапазоні значень густини [179]

$$a_B/d^2 \ll \rho \ll a_B^{-1}, \tag{5.3}$$

де $a_B = \epsilon/me^2$ — ефективний радіус Бора матеріалу. У моделі КВ електрони утворюють гратку, тоді як відхилення $u_l = x_l - l/\rho$ від відповідних рівноважних положень описують низькоенергетичні збудження у вигляді мод електронної густини. Дійсно, якщо припустити, що відносна зміна відстані між частинками залишається невеликою,

$$|u_l - u_{l'}| \ll |l - l'|/\rho, \tag{5.4}$$

розкладаючи рівняння (5.1) до другого порядку за u_l і переходячи до операторів осцилятора з

$$p_l = -i\sum_q \sqrt{\frac{m\omega_q}{2N}}(b_q - b^\dagger_{-q})e^{iql} \tag{5.5}$$

та

$$u_l = \sum_q \sqrt{\frac{1}{2mN\omega_q}}(b_q + b^\dagger_{-q})e^{iql}, \tag{5.6}$$

знаходимо, що квадратична частина рівняння (5.1) приймає звичайну у моделі Латтінжера форму,

$$H_0 = \sum_q \omega_q(b^\dagger_q b_q + 1/2), \tag{5.7}$$

де оператори $b_q^\dagger(b_q)$ народжують (анігілюють) один плазмон. Дисперсія плазмонів визначається законом

$$\omega_q^2 = (2/m)\sum_l V_l^{(2)}[1-\cos(ql)], \tag{5.8}$$

де

$$V_l^{(n)} = \partial_x^n V(x)|_{x=l/\rho}, \tag{5.9}$$

що зводиться до $\omega_q = s|q|$ в низькоенергетичній границі $q \to 0$. Всі імпульси вимірюються в одиницях густини, тоді швидкість плазмону

$$s = (e^2\rho/\epsilon)\sqrt{2\rho a_B \ln(\rho d)} \tag{5.10}$$

має одиниці енергії.

Ангармонічні доданки у розкладі рівняння (5.1) за степенями u_l ведуть до зіткнень плазмонів і тим самим явно порушують інтегрованість моделі Латтінжера. Доданки з четвертим степенем призводять до процесів двоплазмонного розсіювання. Ігноруючи можливість когерентності між станами різних частинок, тобто недіагональними елементами матриці густини, плазмони можна описати функцією розподілу $\mathcal{N}(q,x,t)$, яка підпорядковується кінетичному рівнянню Больцмана (КРБ) з інтегралом зіткнень

$$\begin{aligned} I[\mathcal{N}_1] = -\sum_{q_2 q_1' q_2'} W_{QQ'}[\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2(1+\mathcal{N}_{1'})(1+\mathcal{N}_{2'})- \\ -\mathcal{N}_{1'}\mathcal{N}_{2'}(1+\mathcal{N}_1)(1+\mathcal{N}_2)], \end{aligned} \tag{5.11}$$

де використані скорочені позначення $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}(q_i,x,t)$. Швидкість розсіювання,

$$W_{QQ'} = 2\pi|A_{QQ'}|^2\delta_{Q,Q'}\delta(\Omega-\Omega'), \tag{5.12}$$

випливає із золотого правила Фермі з амплітудою [327, 328]

$$|A_{QQ'}|^2 = \left(\frac{\lambda\rho^2}{mN}\right)^2 |q_1 q_2 q_1' q_2'|. \tag{5.13}$$

Звичайно, δ-функції в $W_{QQ'}$ враховують закони збереження імпульсу та енергії, при цьому

$$Q = q_1 + q_2, \qquad \Omega = \omega_{q_1} + \omega_{q_2}, \tag{5.14}$$

і, аналогічно, — для штрихованих значень у кінцевому стані. Безрозмірне число λ не є універсальним і залежить від вибору потенціалу взаємодії $V(x)$. Для спеціальних потенціалів, які відповідають точно розв'язаним моделям [153], вона дорівнює нулю, тоді як $\lambda = -3/4$ для екранованого кулонівського потенціалу [327, 328]. Для того, щоб дійти до цього виразу для $A_{QQ'}$ потрібно врахувати нелінійність закону дисперсії плазмонів ω_q і регуляризовати швидкість розсіювання, яка інакше розходиться. Зіткнення, описані рівнянням (5.11), кінематично дозволяють процес, коли два плазмони, що зіткаються, розсіюються у протилежних напрямках. Таке розсіювання призводить до передачі імпульсу та енергії між лівою та правою гілками спектра та призводить до термалізації.

Перейдемо до отримання амплітуд розсіювання для процесів непружних зіткнень, що дають основний вклад. Особлива увага приділяється розрахунку нормованих амплітуд при незначному перенесенні імпульсу, обчислюються транспортні струми у головному наближенні за нелінійністю закону дисперсії. При квантуванні доданків функції Гамільтона отримуємо:

$$\begin{aligned}
&H \approx H_0 + H_3 + H_4 + H_5,\\
&H_0 = \sum_l \frac{p_l^2}{2m} + \frac{1}{4}\sum_{ll'} V_l^{(2)}(u_{l+l'} - u_{l'})^2 = \sum_q \omega_q\big(b_q^\dagger b_q + 1/2\big),\\
&H_3 = \frac{1}{12}\sum_{ll'} V_l^{(3)}(u_{l+l'} - u_{l'})^3 = \frac{-i}{3\sqrt{N}(2m)^{3/2}}\sum_{q_1,q_2}\frac{f_3(q_1,q_2)}{\sqrt{\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_1+q_2}}}\times
\end{aligned}$$

$$\times\big(b_{q_1}+b^\dagger_{-q_1}\big)\big(b_{q_2}+b^\dagger_{-q_2}\big)\big(b_{-q_1-q_2}+b^\dagger_{q_1+q_2}\big),$$
$$H_4=\frac{1}{48}\sum_{ll'}V_l^{(4)}(u_{l+l'}-u_{l'})^4=\frac{1}{48m^2N}\sum_{q_1,q_2,q_3}\frac{f_4(q_1,q_2,q_3)}{\sqrt{\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_3}\omega_{q_{123}}}}\times$$
$$\times\big(b_{q_1}+b^\dagger_{-q_1}\big)\big(b_{q_2}+b^\dagger_{-q_2}\big)\big(b_{q_3}+b^\dagger_{-q_3}\big)\big(b_{-q_1-q_2-q_3}+b^\dagger_{q_1+q_2+q_3}\big),$$
$$H_5=\frac{1}{240}\sum_{ll'}V_l^{(5)}(u_{l+l'}-u_{l'})^5=\frac{i}{60N^{3/2}(2m)^{5/2}}\times$$
$$\times\sum_{q_1,q_2,q_3,q_4}\frac{f_5(q_1,q_2,q_3,q_4)}{\sqrt{\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_3}\omega_{q_4}\omega_{q_5}}}\times$$
$$\times\big(b_{q_1}+b^\dagger_{-q_1}\big)\big(b_{q_2}+b^\dagger_{-q_2}\big)\big(b_{q_3}+b^\dagger_{-q_3}\big)(b_{q_4}+b^\dagger_{-q_4}\big)\times$$
$$\times\big(b_{-q_1-q_2-q_3-q_4}+b^\dagger_{q_1+q_2+q_3+q_4}\big), \tag{5.15}$$

де утримані доданки до п’ятого порядку малості. Тут є функції f_i, що визначаються наступним чином:

$$f_3=-4\sum_{l=1}^{\infty}V_l^{(3)}\sin(q_1l/2)\sin(q_2l/2)\sin((q_1+q_2)l/2), \tag{5.16}$$
$$f_4=-8\sum_{l=1}^{\infty}V_l^{(4)}\sin(q_1l/2)\times$$
$$\times\sin(q_2l/2)\sin(q_3l/2)\sin((q_1+q_2+q_3)l)/2), \tag{5.17}$$
$$f_5=-16\sum_{l=1}^{\infty}V_l^{(5)}\sin(q_1l/2)\sin(q_2l/2)\sin(q_3l/2)\sin(q_4l/2)\times$$
$$\times\sin((q_1+q_2+q_3+q_4)l/2). \tag{5.18}$$

5.1.1.1. Зіткнення двох плазмонів

Як було зазначено, нееластичний процес розсіювання провідного порядку включає два плазмони в початковому стані і два — в кінцевому. Відповідна амплітуда визначається у першому порядку теорії збурень з доданку H_4 в гамільтоніані, а також у другому порядку з доданку H_3. З метою пошуку цієї амплітуди вводимо

T-матрицю

$$T = H_4 + H_3 \frac{1}{\Omega_i - H_0} H_3, \tag{5.19}$$

де Ω_i — енергія початкового стану, та знаходимо її елементи для початкових та кінцевих станів $\langle q_1' q_2' | T | q_1 q_2 \rangle$. Обчислюємо кожен доданок окремо,

$$\begin{aligned} \langle q_1', q_2' | H_4 | q_1, q_2 \rangle = \frac{1}{48 m^2 N} \sum_{q_3, q_4, q_5} \frac{f_4(q_3, q_4, q_5)}{\sqrt{\omega_{q_3} \omega_{q_4} \omega_{q_5} \omega_{q_3+q_4+q_5}}} \times \\ \times \Big\langle b_{q_1'} b_{q_2'} \Big(b_{q_3} + b^\dagger_{-q_3} \Big) \Big(b_{q_4} + b^\dagger_{-q_4} \Big) \Big(b_{q_5} + b^\dagger_{-q_5} \Big) \Big(b_{-q_3-q_4-q_5} + b^\dagger_{q_3+q_4+q_5} \Big) \times \\ \times b^\dagger_{q_1} b^\dagger_{q_2} \Big\rangle = \frac{f_4(q_1, q_2, -q_1')}{2 m^3 N \sqrt{\omega_{q_1} \omega_{q_2} \omega_{q_1'} \omega_{q_2'}}} \delta_{q_1+q_2, q_1'+q_2'}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

При виводі цього виразу, використовувалося, що f_4 не залежить від перестановки аргументів, $f_4(q_1, q_2, q_3) = f_4(q_1, q_3, q_2) = f_4(q_2, q_1, q_3)$, а також $f_4(q_1, q_2, -q_1 - q_2 - q_3) = f_4(q_1, q_2, q_3)$. Елементом матриці другого порядку для H_3 є

$$\begin{aligned} \Big\langle q_1', q_2' \Big| H_3 \frac{1}{\omega_{q_1} + \omega_{q_2} - H_0} H_3 \Big| q_1, q_2 \Big\rangle = -\frac{1}{72 m^3} \times \\ \times \sum_{q_3, q_4, q_5, q_6} \frac{f_3(q_3, q_4) f_3(q_5, q_6)}{\sqrt{\omega_{q_3} \omega_{q_4} \omega_{q_5} \omega_{q_6} \omega_{q_3+q_4} \omega_{q_5+q_6}}} \Big\langle b_{q_1'} b_{q_2'} \Big(b_{q_3} + b^\dagger_{-q_3} \Big) \Big(b_{q_4} + b^\dagger_{-q_4} \Big) \times \\ \times (b_{-q_3-q_4} + b^\dagger_{q_3+q_4}) \frac{1}{\omega_{q_1} + \omega_{q_2} - H_0} (b_{q_5} + b^\dagger_{-q_5})(b_{q_6} + b^\dagger_{-q_6}) \times \\ \times (b_{-q_5-q_6} + b^\dagger_{q_5+q_6}) b^\dagger_{q_1} b^\dagger_{q_2} \rangle. \end{aligned} \tag{5.21}$$

При аналізі подібних доданків перебираються усі можливі комбінації перестановок імпульсів у цьому виразі, і в результаті отримаємо для матричного елементу такий вираз:

$$\Big\langle q_1', q_2' \Big| H_3 \frac{1}{\omega_{q_1} + \omega_{q_2} - H_0} H_3 \Big| q_1, q_2 \Big\rangle = -\frac{1}{2 m^3 N} \frac{\delta_{q_1+q_2, q_1'+q_2'}}{\sqrt{\omega_{q_1} \omega_{q_2} \omega_{q_1'} \omega_{q_2'}}} \times$$

$$\times\Big[\frac{f_3(q_1,q_2)f_3(-q_1',-q_2')}{\omega_{q_1+q_2}(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-\omega_{q_1+q_2})}-\frac{f_3(q_1,q_2)f_3(-q_1',-q_2')}{\omega_{q_1+q_2}(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}+\omega_{q_1+q_2})}+$$
$$+\frac{f_3(q_1,-q_1')f_3(q_2,-q_2')}{\omega_{q_1-q_1'}(\omega_{q_1}-\omega_{q_1'}-\omega_{q_1-q_1'})}+\frac{f_3(q_2,-q_2')f_3(q_1,-q_1')}{\omega_{q_2-q_2'}(\omega_{q_2}-\omega_{q_2'}-\omega_{q_2-q_2'})}+$$
$$+\frac{f_3(q_2,-q_1')f_3(q_1,-q_2')}{\omega_{q_2-q_1'}(\omega_{q_2}-\omega_{q_1'}-\omega_{q_2-q_1'})}+\frac{f_3(q_1,-q_2')f_3(q_2,-q_1')}{\omega_{q_1-q_2'}(\omega_{q_1}-\omega_{q_2'}-\omega_{q_1-q_2'})}\Big]. \tag{5.22}$$

Комбінуючи доданки в квадратних дужках попарно, нарешті отримаємо

$$\langle q_1',q_2'|H_4+H_3(\Omega_i-H_0)^{-1}H_3|q_1,q_2\rangle = A_{QQ'}\delta_{q_1+q_2,q_1'+q_2'}, \tag{5.23}$$

де

$$A_{QQ'}=\frac{1}{m^3N}\frac{1}{(\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_1'}\omega_{q_2'})^{1/2}}\times$$
$$\times\Big[-\frac{f_3(q_1,q_2)f_3(q_1',q_2')}{\omega^2_{q_1+q_2}-(\omega_{q_1}+\omega_{q_2})^2}+\frac{f_3(q_2,-q_1')f_3(q_1,-q_2')}{\omega^2_{q_2-q_1'}-(\omega_{q_2}-\omega_{q_1'})^2}+$$
$$+\frac{f_3(q_1,-q_1')f_3(q_2,-q_2')}{\omega^2_{q_1-q_1'}-(\omega_{q_1}-\omega_{q_1'})^2}+\frac{m}{2}f_4(q_1,q_2,-q_1')\Big]. \tag{5.24}$$

Тут слід нагадати, що при низьких температурах типовий імпульс плазмону становить $q\sim T/s\ll 1$. Таким чином, наступним кроком ми отримуємо нормовану амплітуду з рівняння (5.24), для граничного випадку малих імпульсів. Передумовою цього розрахунку є вивчення кінематики двоплазмонного процесу розсіювання.

При малих значеннях q нелінійний закон дисперсії плазмона має вигляд

$$\omega_q = s|q|(1-\xi q^2), \tag{5.25}$$

де

$$s=\sqrt{\frac{V_{22}}{m}},\qquad \xi=\frac{V_{24}}{24V_{22}},\qquad V_{mn}=\sum_{l=1}^{\infty}V_l^{(m)}l^n. \tag{5.26}$$

Зараз ми шукаємо всі можливі комбінації знаків та значень імпульсів у початковому та кінцевому станах, сумісні із збереженням імпульсу та енергії.

1. Випадок позитивних знаків всіх імпульсів, "$+ + ++$".

Якщо всі імпульси позитивні, $q > 0$, то закони збереження дають

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2', \quad s(q_1 + q_2) - s\xi(q_1^3 + q_2^3) = s(q_1' + q_2') - s\xi(q_1'^3 + q_2'^3). \tag{5.27}$$

Отримуємо рівняння для q_2',

$$q_1'^2 - (q_1 + q_2)q_1' + q_1 q_2 = 0. \tag{5.28}$$

Це означає $q_1 = q_1'$, $q_2 = q_2'$ або $q_1 = q_2'$, $q_2 = q_1'$ і, таким чином, відповідає нерозсіяним частинкам. Процес "$- - --$" дає той самий результат.

2. Знаки імпульсів "$+ + +-$".

Усі процеси з трьома імпульсами одного знака та одним імпульсом іншого знака можна розглядати наступним чином. Припустимо, що $q_1, q_2, q_1' > 0$ і $q_2' < 0$. Закон збереження енергії із спрощеним співвідношенням для закону дисперсії (5.25) дає

$$s(q_1 + q_2) - s\xi(q_1^3 + q_2^3) = s(q_1' - q_2') - s\xi(q_1'^3 - q_2'^3). \tag{5.29}$$

За умови збереження імпульсу ми бачимо, що q_2' має порядок q^3. Таким чином $q_1' = q_1 + q_2$ і

$$q_2' = \frac{\xi}{2}(q_1^3 + q_2^3 - q_1'^3) = -\frac{3\xi}{2}q_1 q_2(q_1 + q_2) = -\frac{3\xi}{2}q_1 q_2 q_1'. \tag{5.30}$$

3. Випадок знаків "$+ + --$".

Такий процес заборонений збереженням імпульсу.

4. Випадок знаків "$+ - +-$".

Всі процеси з початковими імпульсами різних знаків і кінцевими імпульсами різних знаків можна розглядати наступним чином. Припустимо, що $q_1, q_1' > 0$ і $q_2, q_2' < 0$. Закон збереження енергії з (5.25) дає

$$s(q_1 - q_2) - s\xi(q_1^3 - q_2^3) = s(q_1' - q_2') - s\xi(q_1'^3 - q_2'^3). \tag{5.31}$$

За умови збереження імпульсу ми можемо ввести $\delta q = q_1' - q_1 = q_2 - q_2'$. Тоді

$$\delta q = \frac{\xi}{2}(q_1'^3 - q_1^3 + q_2^3 - q_2'^3) = \frac{\xi}{2}\Big[(q_1 + \delta q)^3 - q_1^3 + q_2^3 - (q_2 - \delta q)^3\Big] = \\ = \frac{3\xi}{2}\delta q(q_1^2 + q_2^2 + \ldots). \tag{5.32}$$

Перше рівняння дає, що δq має порядок q^3 (або вище), останнє із δq має порядок q^5 (або вище). У нашій моделі ми нехтуємо порядком q^5 або вище. Отже, $\delta q = 0$, і це дає також нерозсіяні частинки.

З міркувань, представлених вище, ми робимо висновок, що є лише один відповідний процес розсіювання, який включає три імпульси одного знака і один імпульс іншого знака, наприклад, $q_1, q_2, q_1' > 0$ і $q_2' < 0$. Тоді

$$q_1' = (q_1 + q_2)\left[1 + \frac{3\xi}{2}q_1 q_2\right], \qquad q_2' = -\frac{3\xi}{2}q_1 q_2(q_1 + q_2). \tag{5.33}$$

З вищеописаних кінематичних обмежень ми маємо $\{q_1, q_2, q_1'\} \sim T/s$, і $q_2' \sim (T/s)^3$. Це спостереження дозволяє нам значно спростити амплітуду розсіювання, оскільки нам потрібно знати $A_{QQ'}$ в рівнянні (5.24) лише при малих моментах, що мають значення для розглянутого процесу. У цьому припущенні

$$A_{QQ'} \approx \frac{\lambda_{q_1 q_2}^{q_1' q_2'} \rho^2}{mN}\sqrt{|q_1 q_2 q_1' q_2'|}, \tag{5.34}$$

де параметр $\lambda_{q_1 q_2}^{q_1' q_2'}$ не залежить від імпульсу з логарифмічною точністю. Визначення

$\lambda_{q_1 q_2}^{q_1' q_2'}$ вимагає розкладання рівняння (5.24) до старших порядків [328]:

$$\lambda_{q_1 q_2}^{q_1' q_2'} = \frac{V_{22} V_{44} - V_{33}^2}{4\rho^2 V_{22}^2} + \frac{V_{33}^2}{16\rho^2 V_{22}^2} \times$$
$$\times \lim_{q_1, q_2 \to 0} \left\{ \frac{\partial_{q_1} \omega_{q_1+q_2}^2 - \partial_{q_1} \omega_{q_1}^2 - \partial_{q_2} \omega_{q_2}^2}{\mathcal{F}(\omega_q^2; q_1, q_2)} - \frac{4\rho V_{22}}{V_{33}} \frac{\mathcal{F}(\Phi_q; q_1, q_2)}{\mathcal{F}(\omega_q^2; q_1, q_2)} \right\}. \quad (5.35)$$

Тут ми прийняли наступні позначення:

$$\mathcal{F}(f_q; q_1, q_2) = \frac{f_{q_1+q_2}}{q_1 + q_2} - \frac{f_{q_1}}{q_1} - \frac{f_{q_2}}{q_2}, \qquad \Phi_q = \frac{2}{m\rho} \sum_{l=1}^{\infty} V_l^{(3)} l [1 - \cos(ql)]. \quad (5.36)$$

Для екранованого потенціалу кулонівської взаємодії

$$V_{nn} = (-1)^n n! (e^2/\epsilon) \rho^{n+1} \ln(\rho d) \quad (5.37)$$

та

$$V_{n,n+2} = (-1)^n (n+2)! (e^2 d^2/\epsilon) \rho^{n+2} S, \quad (5.38)$$

де $S = \sum_l l^{-1}$ — логарифмічно розбіжна сума. Розглядаючи S як великий параметр у рівнянні (5.35), виявляється, що $\lambda_{q_1 q_2}^{q_1' q_2'}$ не залежить від S і дорівнює $\lambda_{q_1 q_2}^{q_1' q_2'} = -3/4$. Цей результат буде використано далі.

5.1.1.2. Процес із зміною числа плазмонів

Наступний нееластичний процес розсіювання провідного порядку включає два плазмони в початковому стані і три в кінцевому, або навпаки. Відповідна амплітуда визначається першим порядком теорії збурень гамільтоніаном H_5, і другим порядком добутку H_3 і H_4, та, нарешті, третім порядком від H_3. З метою пошуку цієї амплітуди вводимо T-матрицю

$$T = H_5 + H_4\frac{1}{\Omega_i - H_0}H_3 + H_3\frac{1}{\Omega_i - H_0}H_4 + H_3\frac{1}{\Omega_i - H_0}H_3\frac{1}{\Omega_i - H_0}H_3. \quad (5.39)$$

Починаємо з найпростішого елемента

$$\begin{gathered}
\langle q_1', q_2', q_3'|H_5|q_1, q_2\rangle = \frac{i}{60}\frac{1}{N^{3/2}}(\frac{1}{2m})^{5/2}\times \\
\times\sum_{q_3,q_4,q_5,q_6,q_7}\frac{f_5(q_3,q_4,q_5,q_6)}{\sqrt{\omega_{q_3}\omega_{q_4}\omega_{q_5}\omega_{q_6}\omega_{q_7}}}\delta_{q_3+q_4+q_5+q_6,-q_7}\times \\
\times\big\langle b_{q_1'}b_{q_2'}b_{q_3'}(b_{q_3}+b^\dagger_{-q_3})(b_{q_4}+b^\dagger_{-q_4})(b_{q_5}+b^\dagger_{-q_5})(b_{q_6}+b^\dagger_{-q_6})(b_{q_7}+b^\dagger_{-q_7})b^\dagger_{q_1}b^\dagger_{q_2}\big\rangle = \\
= \frac{2i}{N^{3/2}}(\frac{1}{2m})^{5/2}\frac{f_5(q_1,q_2,-q_1',-q_2')}{\sqrt{\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_1'}\omega_{q_2'}\omega_{q_3'}}}\delta_{q_1+q_2,q_1'+q_2'+q_3'} = \\
= \frac{2i}{N^{3/2}}(\frac{1}{2ms})^{5/2}\frac{V_{55}}{2}|q_1q_2q_1'q_2'q_3'|^{1/2}\delta_{q_1+q_2,q_1'+q_2'+q_3'}. \quad (5.40)
\end{gathered}$$

Тут значення $b_{q_3}, b_{q_4}, b_{q_5}, b_{q_6}, b_{q_7}$ з $b_{q_1}, b_{q_2}, b_{q_1'}, b_{q_2'}, b_{q_3'}$ вибираються $5! = 120$ способами.

Доданки другого порядку в рівнянні (5.39) мають вигляд

$$\begin{gathered}
\langle q_1', q_2', q_3'|H_3(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-H_0)^{-1}H_4|q_1, q_2\rangle = -\frac{i}{72m}\frac{1}{N^{3/2}}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^{5/2}\times \\
\times\sum_{q_3,q_4,q_5,q_6,q_7}\frac{f_3(q_3,q_4)f_4(q_5,q_6,q_7)}{\sqrt{\omega_{q_3}\omega_{q_4}\omega_{q_3+q_4}\omega_{q_5}\omega_{q_6}\omega_{q_7}\omega_{q_5+q_6+q_7}}}\times \\
\times\langle b_{q_1'}b_{q_2'}b_{q_3'}(b_{q_3}+b^\dagger_{-q_3})(b_{q_4}+b^\dagger_{-q_4})(b_{-q_3-q_4}+b^\dagger_{q_3+q_4})(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-H_0)^{-1}\times \\
\times(b_{q_5}+b^\dagger_{-q_5})(b_{q_6}+b^\dagger_{-q_6})(b_{q_7}+b^\dagger_{-q_7})(b_{-q_5-q_6-q_7}+b^\dagger_{q_5+q_6+q_7})b^\dagger_{q_1}b^\dagger_{q_2}\times \\
\times(b_{-q_5-q_6-q_7}+b^\dagger_{q_5+q_6+q_7})b^\dagger_{q_1}b^\dagger_{q_2}\rangle \quad (5.41)
\end{gathered}$$

та

$$\begin{gathered}
\langle q_1', q_2', q_3'|H_4(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-H_0)^{-1}H_3|q_1, q_2\rangle = -\frac{i}{72m}\frac{1}{N^{3/2}}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^{5/2}\times \\
\times\sum_{q_3,q_4,q_5,q_6,q_7}\frac{f_3(q_3,q_4)f_4(q_5,q_6,q_7)}{\sqrt{\omega_{q_3}\omega_{q_4}\omega_{q_3+q_4}\omega_{q_5}\omega_{q_6}\omega_{q_7}\omega_{q_5+q_6+q_7}}}\times
\end{gathered}$$

$$\times\Big\langle b_{q_1'}b_{q_2'}b_{q_3'}(b_{q_5}+b^\dagger_{-q_5})(b_{q_6}+b^\dagger_{-q_6})(b_{q_7}+b^\dagger_{-q_7})(b_{-q_5-q_6-q_7}+b^\dagger_{q_5+q_6+q_7})\times$$

$$\times(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-H_0)^{-1}(b_{q_3}+b^\dagger_{-q_3})(b_{q_4}+b^\dagger_{-q_4})(b_{-q_3-q_4}+b^\dagger_{q_3+q_4})b^\dagger_{q_1}b^\dagger_{q_2}\Big\rangle=$$

$$=-\frac{2i}{m}\frac{1}{N^{3/2}}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^{5/2}\frac{\delta_{q_1+q_2,q_1'+q_2'+q_3'}}{\sqrt{\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_1'}\omega_{q_2'}\omega_{q_3'}}}\Big[\frac{f_3(q_1,q_2)f_4(-q_1',-q_2',-q_3')}{\omega_{q_1+q_2}(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-\omega_{q_1+q_2})}+$$

$$+\frac{f_3(q_1,-q_1')f_4(q_2,-q_2',-q_3')}{\omega_{q_1-q_1'}(\omega_{q_1}-\omega_{q_1'}-\omega_{q_1-q_1'})}+\{(q_1\leftrightarrow q_2)|||[q_1'\leftrightarrow(q_2'||q_3')]\}+$$

$$+\frac{f_3(-q_1',-q_2')f_4(q_1,q_2,-q_3')}{\omega_{q_1'+q_2'}(-\omega_{q_1'}-\omega_{q_2'}-\omega_{q_1'+q_2'})}+\{(q_1'||q_2')\leftrightarrow q_3'\}\Big]. \qquad (5.42)$$

У цих виразах також необхідно перебрати можливі перестановки значень імпульсів. Нарешті, елемент третього порядку в рівнянні (5.39) має вигляд

$$\langle q_1',q_2',q_3'|H_3(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-H_0)^{-1}H_3(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-H_0)^{-1}H_3|q_1,q_2\rangle=$$

$$=\frac{i}{108m^2}\frac{1}{N^{3/2}}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^{5/2}\sum_{q_4,q_5,q_6,q_7,q_8,q_9}\frac{f_3(q_4,q_5)f_3(q_6,q_7)f_3(q_8,q_9)}{\sqrt{\omega_{q_4}\omega_{q_5}\omega_{q_4+q_5}\omega_{q_6}\omega_{q_7}\omega_{q_6+q_7}\omega_{q_8}\omega_{q_9}\omega_{q_8+q_9}}}\times$$

$$\times\Big\langle b_{q_1'}b_{q_2'}b_{q_3'}(b_{q_4}+b^\dagger_{-q_4})(b_{q_5}+b^\dagger_{-q_5})(b_{-q_4-q_5}+b^\dagger_{q_4+q_5})\times$$

$$\times(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-H_0)^{-1}(b_{q_6}+b^\dagger_{-q_6})(b_{q_7}+b^\dagger_{-q_7})(b_{-q_6-q_7}+b^\dagger_{q_6+q_7})\times$$

$$\times(\omega_{q_1}+\omega_{q_2}-H_0)^{-1}(b_{q_8}+b^\dagger_{-q_8})(b_{q_9}+b^\dagger_{-q_9})(b_{-q_8-q_9}+b^\dagger_{q_8+q_9})b^\dagger_{q_1}b^\dagger_{q_2}\Big\rangle=$$

$$=\frac{8i}{m^2}\frac{1}{N^{3/2}}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^{5/2}\frac{\delta_{q_1+q_2,q_1'+q_2'+q_3'}}{\sqrt{\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_1'}\omega_{q_2'}\omega_{q_3'}}}\times$$

$$\times\Big\{\frac{f_3(q_1,q_2)f_3(-q_1',-q_2')f_3(-q_3',q_1+q_2)}{\big[(\omega_{q_1}+\omega_{q_2})^2-\omega^2_{q_1+q_2}\big]\big[(\omega_{q_1'}+\omega_{q_2'})^2-\omega^2_{q_1'+q_2'}\big]}+\{(q_1'||q_2')\leftrightarrow q_3'\}+$$

$$+\frac{f_3(q_1,-q_3')f_3(-q_1',-q_2')f_3(q_2,-q_1'-q_2')}{\big[(\omega_{q_1}-\omega_{q_3'})^2-\omega^2_{q_1-q_3'}\big]\big[(\omega_{q_1'}+\omega_{q_2'})^2-\omega^2_{q_1'+q_2'}\big]}+$$

$$+\frac{f_3(q_1,-q_1')f_3(q_2,-q_2')f_3(-q_3',q_1-q_1')}{\big[(\omega_{q_1}-\omega_{q_1'})^2-\omega^2_{q_1-q_1'}\big]\big[(\omega_{q_2}-\omega_{q_2'})^2-\omega^2_{q_2-q_2'}\big]}+$$

$$+\{(q_1\leftrightarrow q_2)|||[(q_1'||q_2')\leftrightarrow q_3']\}+\{q_1'\leftrightarrow q_2'||q_2'\leftrightarrow q_3'||q_3'\leftrightarrow q_1'\}\Big\}. \qquad (5.43)$$

Перейдемо до аналізу кінематичних обмежень. Ми вважаємо, що $q_1>0$ (випадок $q_1<0$ можна вивчати аналогічно).

Закони збереження дають

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2' + q_3',$$
$$|q_1|\left(1 - \xi q_1^2\right) + |q_2|\left(1 - \xi q_2^2\right) = |q_1'|(1 - \xi q_1'^2) + |q_2'|\left(1 - \xi q_2'^2\right) +$$
$$+|q_3'|(1 - \xi q_3'^2). \tag{5.44}$$

1. Випадок знаків "$+ + + + +$".

У цьому випадку ключову роль відіграє нелінійність, оскільки лінійні доданки в рівнянні (5.44) скорочують одне одного, і ми отримуємо квадратне рівняння для q_2',

$$3(q_1 + q_2 - q_1')q_2'^2 - 3(q_1 + q_2 - q_1')^2 q_2' +$$
$$+\left[(q_1 + q_2 - q_1')^3 - q_1^3 - q_2^3 + q_1'^3\right] = 0. \tag{5.45}$$

Отже, отримаємо

$$\delta(\omega_{q_1} + \omega_{q_2} - \omega_{q_1'} - \omega_{q_2'} - \omega_{q_3'}) = \frac{\delta(q_2' - q_+) + \delta(q_2' - q_-)}{3s\xi(q_+^2 - q_-^2)}, \tag{5.46}$$

де $q_\pm$ — корені квадратного рівняння (5.45),

$$q_\pm = \frac{q_1 + q_2 - q_1'}{2}\left[1 \pm \sqrt{\frac{4(q_1^3 + q_2^3 - q_1'^3)}{3(q_1 + q_2 - q_1')^3} - \frac{1}{3}}\right]. \tag{5.47}$$

Для цього типу розсіювання всі задіяні моменти мають однаковий порядок $\sim T/s$.

2. Випадок "$+ + + + -$".

У цьому випадку закон збереження енергії дає, що q_3' є малим у порівнянні з іншими імпульсами. Справді, $q_3' = \xi(q_1^3 + q_2^3 - q_1'^3 - q_2'^3)/2$. Це означає, що $q_3' \sim (T/s)^3$, тоді як $\{q_1, q_2, q_1', q_2'\} \sim T/s$. Цей процес вносить провідний внесок у відповідну швидкість релаксації. Той самий результат отримуємо для процесу

"$+ - + + +$", де негативний імпульс q_2 виявляється рівним $\sim (T/s)^3$.

3. Випадок "$+ + + - -$".

У цьому випадку закон збереження енергії диктує, що і q_2', і q_3' є малими в порівнянні з іншими імпульсами. Дійсно $q_2' + q_3' = \xi(q_1^3 + q_2^3 - q_1'^3)/2$. Цей процес вносить провідний внесок у відповідну швидкість релаксації.

4. Випадок "$+ - + + -$".

У цьому випадку всі моменти виявляються порядка $\sim T/s$. З закону збереження енергії маємо, що $q_3' - q_2$ є малим у порівнянні з іншими значеннями імпульсів. Однак цей процес не вносить вагомий внесок у відповідну швидкість релаксації, завдяки тому, що

$$\delta(\omega_{q_1} + \omega_{q_2} - \omega_{q_1'} - \omega_{q_2'} - \omega_{q_3'}) = \frac{\delta(q_3' - q_2)}{2s}. \tag{5.48}$$

Той самий результат ми отримуємо для процесу "$+ - + - -$", де $q_1' - q_1$ мало.

5. Випадок "$+ + - - -$".

Цей процес заборонено законом збереження імпульсу.

Поєднуючи всі три внески разом, можна знайти відповідну амплітуду розсіювання

$$\widetilde{A}_{QQ'} = \frac{i\sqrt{2}\rho^3 \lambda_{q_1,q_2}^{q_1',q_2',q_3'}}{(Nm)^{3/2} s^{1/2}} \sqrt{|q_1 q_2 q_1' q_2' q_3'|}, \tag{5.49}$$

де

$$\lambda_{q_1,q_2}^{q_1',q_2',q_3'} = \frac{s^{1/2}}{m^3 \rho^3 (q_1 q_2 q_1' q_2' q_3')^{1/2} \sqrt{\omega_{q_1}\omega_{q_2}\omega_{q_1'}\omega_{q_2'}\omega_{q_3'}}} \times$$
$$\times \Big\{ \frac{m^2}{4} f_5(q_1, q_2, -q_1', -q_2') - \frac{m}{2} \Big[F_3^+(q_1, q_2) f_4(-q_1', -q_2', -q_3') +$$

$$+F_3^-(q_1,-q_1')f_4(q_2,-q_2',-q_3')+\{(q_1\leftrightarrow q_2)|||[q_1'\leftrightarrow(q_2'||q_3')]\}+$$
$$+F_3^+(-q_1',-q_2')f_4(q_1,q_2,-q_3')+\{(q_1'||q_2')\leftrightarrow q_3'\}\Big]+$$
$$+F_3^+(q_1,q_2)F_3^+(-q_1',-q_2')f_3(-q_3',q_1+q_2)+\{(q_1'||q_2')\leftrightarrow q_3'\}+$$
$$+F_3^-(q_1,-q_3')F_3^+(-q_1',-q_2')f_3(q_2,-q_1'-q_2')+$$
$$+\{(q_1\leftrightarrow q_2)|||[(q_1'||q_2')\leftrightarrow q_3']\}+F_3^-(q_1,-q_1')F_3^-(q_2,-q_2')f_3(-q_3',q_1-q_1')+$$
$$+\{q_1'\leftrightarrow q_2'||q_2'\leftrightarrow q_3'||q_3'\leftrightarrow q_1'\}\Bigg\};\qquad F_3^\pm(q_1,q_2)=\frac{f_3(q_1,q_2)}{(\omega_{q_1}\pm\omega_{q_2})^2-\omega_{q_1+q_2}^2}. \quad (5.50)$$

У межах логарифмічної точності коефіцієнт $\lambda_{q_1,q_2}^{q_1',q_2',q_3'}$ в рівнянні (5.49) не залежить від моментів. Аналіз, аналогічний аналізу, представленому для процесів, що зберігають число плазмонів, дає $\widetilde{\lambda}\equiv\lambda_{q_1,q_2}^{q_1',q_2',q_3'}=55/48$.

5.1.2. Теплопровідність вігнерівського кристалу

Розглянемо тепер тепловий потік у квантовому дроті КВ довжиною ℓ. Ми припускаємо, що правий (лівий) контакт утримується при температурі $T_{r(l)}$ такій, що $T_r-T_l=\Delta T$. Для того, щоб знайти теплопровідність у такій системі, нам потрібно розрахувати потік тепла, який несуть плазмони. Останнє вимагає знання нерівноважної функції розподілу плазмону вздовж дроту, яка повинна випливати з рішення стаціонарного КРБ,

$$s_q\partial_x\mathcal{N}(q,x)=I[\mathcal{N}(q,x)], \quad (5.51)$$

де $s_q=\partial_q\omega_q$. Пошук рішення інтегро-диференціального рівняння (5.51) навіть у наближенні лінійного відгуку на ΔT є складною проблемою. Ми досягаємо цієї мети, застосовуючи підхід до подібної проблеми у випадку слабко взаємодіючого одновимірного електронного газу [329,330]. З цією метою зручно параметризувати функцію розподілу плазмонів у дроті наступним чином:

$$\mathcal{N}(q,x) = \frac{\theta(q)}{e^{(\omega_q - u^R q)/T^R} - 1} + \frac{\theta(-q)}{e^{(\omega_q - u^L q)/T^L} - 1}. \tag{5.52}$$

Тут $\theta(\pm q)$ — ступінчаста функція, а верхні індекси $R(L)$ відносяться до правого (лівого) рухомого плазмону. Параметри $u^{R(L)}$ представляють швидкості дрейфу плазмону, тоді як $T^{R(L)}$ — їх ефективні температури. Анзац, обраний в рівнянні (5.52), можна зрозуміти наступним чином. Процес розсіювання, відповідальний за обмін енергією між плазмонами, включає три імпульси плазмонів q_1, q_2, q_1', які належать до однієї і тієї ж гілки (скажімо, для плазмонів, що рухаються праворуч), тоді як четвертий імпульс $q_{2'}$ повинен мати протилежний знак, як це диктується законами збереження енергії та імпульсу і описано у попередньому пункті. Крім того, при низьких температурах характерний масштаб $q_2' \sim (T/s)^3$ параметрично менший, ніж

$$\{q_1, q_2, q_1'\} \sim T/s. \tag{5.53}$$

Це означає, що перерозподіл енергії між плазмонами відбувається набагато ефективніше, ніж перенесення енергії на зустрічну гілку. З цим спостереженням частково врівноважена форма функції розподілу плазмону (5.52) може бути отримана із загального аргументу статистичної механіки шляхом максимізації ентропії

$$S = \sum_q [(\mathcal{N}+1)\ln(\mathcal{N}+1) - \mathcal{N}\ln\mathcal{N}] \tag{5.54}$$

у наближенні повільної зміни параметрів розподілу. Множники Лагранжа $u^{R(L)}(x)$ та $T^{R(L)}(x)$ — це функції координати вздовж дроту, які нам потрібно визначити.

Для цього вводимо потік імпульсу j_P та енергії j_E плазмонів,

$$\begin{Bmatrix} j_P^{R(L)}(x) \\ j_E^{R(L)}(x) \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \theta(\pm q) s_q \begin{Bmatrix} q \\ \omega_q \end{Bmatrix} [\mathcal{N}(q,x) - n_q], \tag{5.55}$$

де $n_q = (e^{\omega_q/T} - 1)^{-1}$ — рівноважна функція розподілу Бозе. По-перше, ми спостерігаємо, що є обмеження законами збереження і тому повинні виконуватися рівняння безперервності,

$$\partial_x [j_P^R(x) + j_P^L(x)] = 0, \qquad \partial_x [j_E^R(x) + j_E^L(x)] = 0. \tag{5.56}$$

По-друге, відповідні струми плазмонів, що рухаються праворуч (ліворуч), не зберігаються самостійно і пов'язані кінетичними рівняннями

$$\partial_x [j_P^R(x) - j_P^L(x)] = 2\dot{p}^R, \quad \partial_x [j_E^R(x) - j_E^L(x)] = 2\dot{\varepsilon}^R, \tag{5.57}$$

де величини $\dot{p}^R$ та $\dot{\varepsilon}^R$ — це відповідні швидкості зміни імпульсу та енергії, які необхідно обчислити за інтегралом зіткнення, рівняння (5.11). В межах лінійного відгуку на різницю температур ΔT ми розкладаємо $\mathcal{N}(q,x)$ в рівнянні (5.52) до першого порядку за $u^{R(L)}(x)$ і

$$\delta T^{R(L)}(x) = T^{R(L)}(x) - T \tag{5.58}$$

і обчислюємо струми з рівняння (5.55). У поєднанні з рівняннями (5.56) та (5.57) це дає нам систему з чотирьох зв'язаних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, які регулюють просторову еволюцію множників Лагранжа, що характеризують $\mathcal{N}(q,x)$ в рівнянні (5.52). Отже, знаходимо

$$g_1 \partial_x \vartheta_+ + g_2 \partial_x \eta_- = 0, \quad \partial_x \vartheta_- + g_1 \partial_x \eta_+ = 0, \tag{5.59}$$

$$g_1\partial_x\vartheta_- + g_2\partial_x\eta_+ = -\frac{\eta_-}{\ell_E}, \quad \partial_x\vartheta_+ + g_1\partial_x\eta_- = -\frac{\vartheta_-}{\ell_E}. \tag{5.60}$$

Тут перші два рівняння відповідають законам збереження в рівнянні (5.56), тоді як останні два відповідають кінетичним рівнянням (5.57). Ми ввели позначення

$$\begin{aligned} \vartheta_\pm &= (\delta T^R \pm \delta T^L)/T, \\ \eta_\pm &= (u^R \pm u^L)/s, \end{aligned} \tag{5.61}$$

а також дві функції,

$$g_1 = 1 + \frac{\xi\tau^2}{5} + \frac{\xi^2\tau^4}{2}, \tag{5.62}$$

$$g_2 = 1 + \frac{2\xi\tau^2}{5} + \frac{8\xi^2\tau^4}{7}, \tag{5.63}$$

де $\tau = 2\pi T/s$ і $\xi = ((\rho d)^2 \ln\tau)/2\ln(\rho d))$. Збереження нелінійних членів у законі дисперсії ω_q і утримання головних членів при розкладанні за $\tau \ll 1$ виправдано в межі сильної взаємодії за умови, що $\kappa \ll (\xi\tau)^2$. Довжина релаксації ℓ_E в рівняннях (5.59) і (5.60) задана співвідношенням

$$\ell_E^{-1} = \frac{6}{\pi N T^3} \sum_{\substack{q_1>0 q_2>0 \\ q_1'>0 q_2'<0}} \omega_{q_2'}^2 W_{QQ'} n_{q_1} n_{q_2} (1+n_{q_1'})(1+n_{q_2'}). \tag{5.64}$$

Перш ніж переходити до розв’язання рівнянь (5.59) та (5.60), дамо їх більш детальне доведення. Підхід концептуально схожий на підхід, розроблений для випадку слабко взаємодіючого електронного газу з потрійними зіткненнями [329].

Вводимо швидкості, що описують зміну імпульсу та енергії для плазмонів, що рухаються вправо, за допомогою двох плазмонних процесів розсіювання

$$\dot{p}^R = \frac{1}{N} \sum_{\substack{q_1,q_2,q_1'<0 \\ q_2'>0}} q_2' W_{q_1,q_2;q_1',q_2'} \mathcal{N}_{q_1,q_2;q_1',q_2'} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{q_1,q_2,q_1'>0 \\ q_2'<0}} q_2' W_{q_1,q_2;q_1',q_2'} \mathcal{N}_{q_1,q_2;q_1',q_2'}, \tag{5.65}$$

$$\dot{\varepsilon}^R = \frac{1}{N} \sum_{\substack{q_1,q_2,q_1'<0 \\ q_2'>0}} \omega_{q_2'} W_{q_1,q_2;q_1',q_2'} \mathcal{N}_{q_1,q_2;q_1',q_2'} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{q_1,q_2,q_1'>0 \\ q_2'<0}} \omega_{q_2'} W_{q_1,q_2;q_1',q_2'} \mathcal{N}_{q_1,q_2;q_1',q_2'}, \tag{5.66}$$

$$\mathcal{N}_{q_1,q_2;q_1',q_2'} = N_{q_1} N_{q_2} (1 + N_{q_1'})(1 + N_{q_2'}) - (1 + N_{q_1})(1 + N_{q_2}) N_{q_1'} N_{q_2'}. \tag{5.67}$$

На цьому етапі ми розкладаємо вирази для струмів $j_{P/E}^{R/L}$ та для швидкостей релаксації $\dot{p}^R$ і $\dot{E}^R$ до лінійних членів за $u^{R/L}/T \ll 1$ і $\delta T^{R/L}/T \ll 1$. Починаємо з N_q,

$$N_q = n_q + n_q(1+n_q)\theta(q)\Big[\frac{u^R q}{T} + \frac{\omega_q \delta T^R}{T^2}\Big] + \\ + n_q(1+n_q)\theta(-q)\Big[\frac{u^L q}{T} + \frac{\omega_q \delta T^L}{T^2}\Big]. \tag{5.68}$$

Для $j_{P/E}^{R/L}$ ми отримуємо

$$j_P^{R/L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega q_\omega n_\omega (1+n_\omega) \Big[\pm \frac{u^{R/L} q_\omega}{T} + \frac{\omega \delta T^{R/L}}{T^2}\Big], \tag{5.69}$$

$$j_E^{R/L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \omega n_\omega (1+n_\omega) \Big[\frac{u^{R/L} q_\omega}{T} \pm \frac{\omega \delta T^{R/L}}{T^2}\Big]. \tag{5.70}$$

Тут ми використовуємо $s_{-q} = -s_q$, $\omega_{-q} = \omega_q$ і $\mathrm{d}q\, s_q = d\omega$. Тоді

$$j_P^R \pm j_P^L = \frac{T^2}{2\pi s}\Big[G_2 \eta_\mp + G_1 \vartheta_\pm\Big], \quad j_E^R \pm j_E^L = \frac{T^2}{2\pi}\Big[G_1 \eta_\pm + G_0 \vartheta_\mp\Big], \tag{5.71}$$

$$G_k = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega \omega^2}{T^3} \Big(\frac{s q_\omega}{\omega}\Big)^k n_\omega (1+n_\omega), \quad k = 0, 1, 2, \tag{5.72}$$

де ми вводимо безрозмірні позначення

$$\eta_\pm = (u^R \pm u^L)/s, \qquad \vartheta_\pm = (\delta T^R \pm \delta T^L)/T. \tag{5.73}$$

Константа G_0 універсальна і дорівнює

$$G_0 = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dx\, x^2}{\mathrm{sh}^2(x/2)} = \frac{\pi^2}{3}. \tag{5.74}$$

Подібним чином ми розкладаємо і коефіцієнти релаксації. Наприклад,

$$\mathcal{N}_{q_1,q_2;q_1',q_2'} = -\frac{s}{T} n_{q_1} n_{q_2}(1+n_{q_1'})(1+n_{q_2'})\left[q_2'\eta_- + \frac{\omega_{q_2'}}{s}\vartheta_-\right], \tag{5.75}$$

припускаючи тут, що $q_1, q_2, q_1' < 0$ і $q_2' > 0$. Використовуючи вираз (5.24) для амплітуди розсіювання, ми приходимо до

$$\dot{p}^R = -\frac{\lambda^2\rho^4}{2\pi^2 m^2 T} J_0 \eta_-, \qquad \dot{\varepsilon}^R = -\frac{\lambda^2\rho^4 s}{2\pi^2 m^2 T} J_2 \vartheta_-, \tag{5.76}$$

$$J_k = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \left(\frac{\omega_{q_2'}}{s q_2'}\right)^k q_1 q_2 q_1' q_2'^3 n_{q_1} n_{q_2}(1+n_{q_1'})(1+n_{q_2'}). \tag{5.77}$$

Таким чином отримуємо рівняння (5.59) та (5.60).

Для того, щоб розв'язати рівняння (5.59) і (5.60), нам потрібно доповнити їх належними граничними умовами. Щоб їх знайти, ми помічаємо, що як тільки електрон потрапляє у взаємодіючу частину дроту з контакту, він розпадається на плазмони. Враховуючи його надлишкову енергію, що визначається різницею температур ΔT в нашому випадку, закони збереження однозначно визначають розподіл енергії між плзмонами, що рухаються вправо і вліво $[175, 331]$. Таким чином, ми знаходимо

$$u^R(0) = -\mathcal{R}u^L(0), \quad u^L(\ell) = -\mathcal{R}u^R(\ell), \tag{5.78}$$

$$\delta T^R(0) = \mathcal{T}\Delta T/2 + \mathcal{R}\delta T^L(0), \tag{5.79}$$

$$\delta T^L(\ell) = -\mathcal{T}\Delta T/2 + \mathcal{R}\delta T^R(\ell). \tag{5.80}$$

Коефіцієнт пропускання $\mathcal{T}$ і коефіцієнт відбиття $\mathcal{R}$ плазмонів від меж, що розділяють активну і пасивну частини дроту, задані законом Френеля:

$$\mathcal{T} = 4\kappa/(1+\kappa)^2 \qquad \text{та} \qquad \mathcal{R} = (1-\kappa)^2/(1+\kappa)^2. \tag{5.81}$$

Зверніть увагу, що $\delta T^{R(L)}$ не дорівнюють просто $\pm\Delta T/2$, що, по суті, обумовлено квантовим аналогом граничного теплового опору Капіци [332]. Це призводить до остаточного результату для теплопровідності $\mathcal{K} = j_E/\Delta T$:

$$\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}_0} = \mathfrak{T}g_1 \frac{(1+\mathfrak{T}g_1) + (1-\mathfrak{T}g_1)e^{-\ell/\ell_{pl}}}{(g_1+\mathfrak{T}g_2) + (g_1-\mathfrak{T}g_2)e^{-\ell/\ell_{pl}}}, \tag{5.82}$$

де $\mathfrak{T} = \mathcal{T}/(1+\mathcal{R})$, а індукована взаємодією нееластична довжина розсіювання плазмонів визначається як

$$\ell_{pl}^{-1} = \frac{175 s^4}{288\pi^4\xi^2 T^4}\ell_E^{-1} = c_\ell \lambda^2\kappa^2(T/s)^5, \tag{5.83}$$

де безрозмірний числовий коефіцієнт в рівнянні (5.83) дорівнює

$$c_\ell = \frac{2100}{\pi^9}\int\int_0^\infty \frac{x^3y^3(x+y)^3 dxdy}{\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x+y)} \approx 7,61. \tag{5.84}$$

Корисно проаналізувати рівняння (5.82) у різних граничних випадках. Для коротких дротів, $\ell \ll \ell_{pl}$, ефект плазмонного розсіювання слабкий, і індукована взаємодією поправка $\delta\mathcal{K}$ до теплопровідності може бути отримана за допомогою теорії збурень. Він масштабується лінійно з довжиною дроту,

$$\delta\mathcal{K}/\mathcal{K}_0 \propto -\ell/\ell_{pl}. \tag{5.85}$$

Навпаки, для довгих проводів $\ell \gg \ell_{pl}$, термалізація плазмонів призводить до насичення теплопровідності

$$\mathcal{K}/\mathcal{K}_0 = 2\kappa\left[1 - \frac{36\kappa\xi^2\tau^4}{175}\right], \tag{5.86}$$

де ми апроксимували $\mathfrak{T} \approx 2\kappa$ для границі КВ $\kappa \ll 1$. Навпаки, нехтуючи ефектами термалізації, але припускаючи довільні взаємодії, ми отримуємо з рівняння (5.82):

$$\mathcal{K}/\mathcal{K}_0 = 2\kappa/(1+\kappa^2). \tag{5.87}$$

Зазначимо, що довжина розсіювання в рівнянні (5.83) безпосередньо пов'язана із часом життя плазмону $\tau_{pl} = \ell_{pl}/s$, що узгоджується з результатами дослідження [327, 328]. Крім того, є одна відповідна деталь, на якій варто наголосити. Процеси, які визначають теплопровідність у головному наближенні, зберігають кількість плазмонів у початковому та кінцевому станах. Це означає, що плазмони набувають хімічного потенціалу, який, звичайно, послаблюється іншими нееластичними процесами. Найбільш актуальним з них є процес, в якому два плазмони розсіюються на три, або навпаки, розглянутий у попередньому пункті і який відповідає інтегралу

$$\begin{aligned} I[\mathcal{N}_1] = -\sum_{q_2 q_1' q_2' q_3'} \widetilde{W}_{QQ'}[&\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2(1+\mathcal{N}_{1'})(1+\mathcal{N}_{2'})(1+\mathcal{N}_{3'}) \\ &-\mathcal{N}_{1'}\mathcal{N}_{2'}\mathcal{N}_{3'}(1+\mathcal{N}_1)(1+\mathcal{N}_2)]. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Відповідна амплітуда дорівнює

$$|\widetilde{A}_{QQ'}|^2 = \frac{2\tilde{\lambda}^2\rho^6}{s(mN)^3}|q_1q_2q_1'q_2'q_3'|, \tag{5.89}$$

з параметром $\tilde{\lambda} = 55/48$. Кінематика цього процесу така, що всі передані моменти одного порядку $\{q, q'\} \sim T/s$ і знаходяться на одній гілці. Таким чином, цей процес не має значення для енергообміну та теплового транспорту; проте це призводить до кінцевої довжини розсіювання

$$\tilde{\ell}_{pl}^{-1} \simeq (\tilde{\lambda}^2/\xi)\kappa^3(T/s)^5. \tag{5.90}$$

Зазначимо, що він має таку саму температурну залежність, що і ℓ_{pl}^{-1} в рівнянні (5.83), тоді як можна було б очікувати, що він буде мати вищий порядок за T, оскільки інтеграл зіткнення містить додаткові степені q. Дві шкали довжини відрізняються параметром взаємодії,

$$\tilde{\ell}_{pl}^{-1}/\ell_{pl}^{-1} \sim \kappa \ll 1. \tag{5.91}$$

5.1.3. Термічне врівноваження в системі

До цього моменту ми концентрувались на розсіянні плазмонних збуджень та їх внеску в теплопровідність у вігнерівському кристалі. Пов'язане питання, яке останнім часом привернуло багато уваги, — це вплив взаємодій на врівноваження раптових збурень в рідині Латтінжера [333–335]. Досі не повністю вирішеною є проблема впливу збурень, що порушують інтегрованість системи, на динаміку врівноваження і загасання струмів [336–338] і, зрештою, на теплове врівноваження [339]. Ми розглядаємо ці питання в контексті нелінійної рідини Латтінжера, вивчаючи еволюцію системи в масштабах часу, що перевищує час непружного розсіяння.

В роботах [327, 328] було показано, що при виборі розподілу у вигляді

$$\mathcal{N}(q,t) = n_q + g_q\chi(q,t), \tag{5.92}$$

де

$$g_q = \sqrt{n_q(1+n_q)}, \tag{5.93}$$

лінеаризоване КРБ для плазмонних зіткнень, (5.11), можна звести до задачі власних значень наступного інтегро-диференціального рівняння:

$$\partial_t \chi(p,t) = -\tau_{pl}^{-1} \int_0^\infty \mathbb{K}(p,p')\chi(p',t)dp'. \tag{5.94}$$

Ядро інтегралу задано співвідношенням

$$\mathbb{K}(p,p') = \frac{1}{6}p^2(p^2+1)\delta(p-p') + \frac{pp'(p+p')}{\mathrm{sh}[\pi(p+p')]} - \frac{pp'(p-p')}{\mathrm{sh}[\pi(p-p')]}, \tag{5.95}$$

а безрозмірна змінна $p = sq/2\pi T$ характеризує імпульс. Вищевказаний інтегральний оператор має неперервний спектр

$$\zeta_\nu = \nu^2(\nu^2+1)/6 \tag{5.96}$$

і може бути діагоналізований з власними функціями

$$\psi_\nu(p) = \Delta_\nu^{-1}[(2\nu^2-1)\delta(p-\nu) + \frac{3p}{\mathrm{sh}[\pi(p+\nu)]} + \frac{3p}{\mathrm{sh}[\pi(p-\nu)]}], \tag{5.97}$$

де нормою є

$$\Delta_\nu = \sqrt{(\nu^2+1)(4\nu^2+1)}, \tag{5.98}$$

так що

$$\chi(p,t) = \int_0^\infty \alpha_\nu \psi_\nu(p) e^{-\zeta_\nu t/\tau_{pl}} d\nu. \tag{5.99}$$

Коефіцієнти розкладу слід визначати з початкової умови

$$\alpha_\nu = \int_0^\infty \chi(p,0)\psi_\nu(p)dp. \tag{5.100}$$

Розглянемо тепер ситуацію, коли надлишок енергії раптово подається до електронної рідини, яка генерує тепловий струм. У реальних експериментах це можна було б здійснити або шляхом селективного тунелювання високоенергетичних носіїв у квантовий провід, або шляхом місцевого джоулевого нагрівання через квантові точкові контакти з низькою провідністю. Тоді релаксацію, в принципі, можна контролювати за допомогою локальної термометрії на основі термоелектричного ефекту. Оскільки рівняння (5.94) було отримано шляхом лінеаризації закону дисперсії плазмонів і, крім того, нехтуючи імпульсом, переданим плазмонам, що рухаються вліво, $q_2' \to 0$, власні розв'язки рівняння (5.94) мають хибну властивість, що j_E^R зберігається. Щоб подолати цю проблему, ми обчислюємо швидкість передачі енергії $\dot{\varepsilon}^R$ безпосередньо з початкового інтеграла зіткнень, (5.11), в базисі приблизних власних розв'язків $\psi_\nu(q)$, що зберігають переданий імпульс:

$$\dot{\varepsilon}^R(t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{q_1>0 q_2>0 \\ q_1'>0 q_2'<0}} \omega_{q_2'} W_{QQ'} n_{q_1} n_{q_2} (1+n_{q_1'})(1+n_{q_2'}) \times$$
$$\times [\chi(q_1,t)/g_{q_1} + \chi(q_2,t)/g_{q_2} - \chi(q_1',t)/g_{q_1'} - \chi(q_2',t)/g_{q_2'}]. \tag{5.101}$$

Враховуємо початкову умову, припускаючи, що плазмони, що рухаються праворуч, мають вищу температуру,

$$\chi^R(q,0) = g_q \omega_q \delta T^R(0)/T^2. \tag{5.102}$$

За тривалий час, $t \gg \tau_{pl}$, високоенергетичні плазмони вже будуть врівноважені; однак теплові плазмони з характерними імпульсами $q \sim T/s$ ще не врівноважені, і їх вклад можна записати у обраному наближенні так:

$$\chi(p,t) \approx \chi(p,0) e^{-p^2 t/6\tau_{pl}} - \frac{6p}{\mathrm{sh}(\pi p)} \int_0^\infty \chi(\nu,0) e^{-\nu^2 t/6\tau_{pl}} d\nu, \tag{5.103}$$

що означає припущення $\nu \ll 1$ для $\psi_\nu(p)$. Нагадуємо, що $j_E^R \propto \dot{\varepsilon}^R$ можна легко отримати з рівняння для потоку енергії (5.101), яке при нормуванні до загального введеного струму дає

$$j_E^R(t)/j_E^R(0) \simeq (\tau_{pl}/t)^{3/2} \tag{5.104}$$

і демонструє неекспоненціальне загасання. Показник степеня в $j_E^R(t)$ не є універсальним і залежить від початкового стану; однак степенева залежність протягом тривалого часу є загальною особливістю релаксаційних теплових процесів в нелінійних рідинах Латтінжера.

5.2. Локалізовані моди в графені, що знаходиться в зовнішньому електричному полі

Перейдемо тепер до розгляду двовимірної системи — графену. Предметом цього дослідження є вплив локалізованих мод електронної густини на транспортні властивості одношарового графена, його провідності. Локалізовані моди в такій системі можуть поширюватися у потенціальному бар’єрі, на відміну від нерелятивістської квантової механіки, де локалізовані стани можуть існувати лише всередині квантових ям. Це обумовлено діраківським релятивістським спектром електронів в графені. Перейдемо до аналізу цих локалізованих станів.

5.2.1. Локалізовані моди в листі графена

У роботах [185, 189, 201, 340, 341] вивчалося тунелювання релятивістських частинок у графені через потенціальний бар’єр кінцевої ширини та відповідну провідність. Тут ми розглядаємо іншу ситуацію, а саме електронні моди, які поширюються строго вздовж бар’єру і затухають у напрямку, перпендикулярному бар’єру. Більш конкретно, ми розглядаємо електронні стани в графені з потенціальним бар’єром, розташованим в одношаровому графені, що знаходиться в площині

xy (див. рис 5.1).

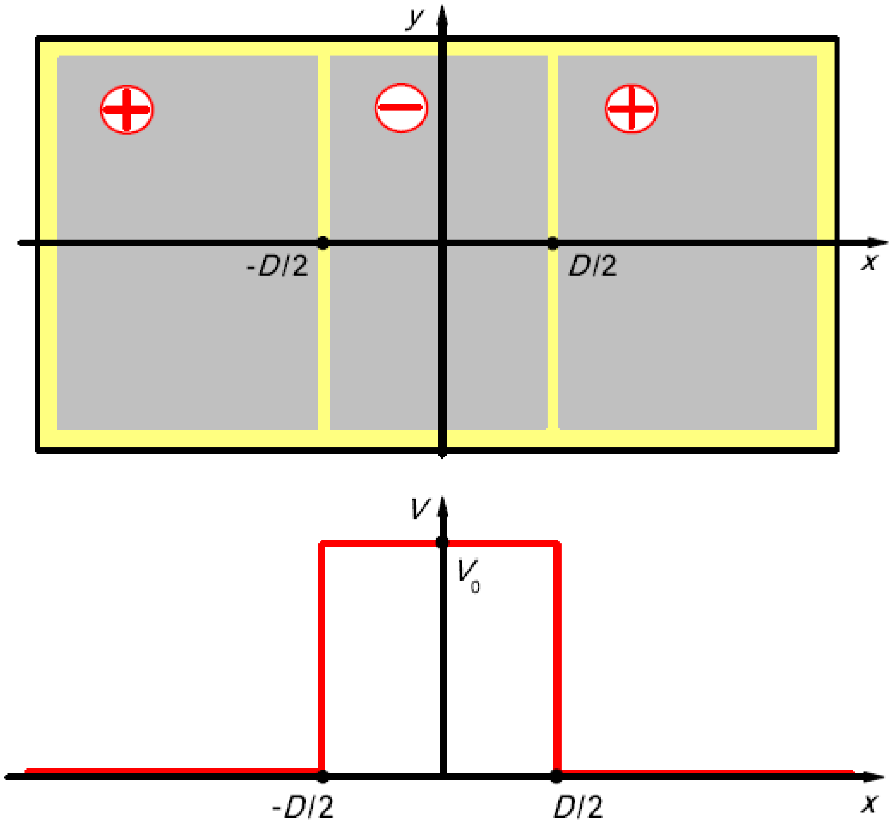

Рис. 5.1. Схематичний вигляд листа графена у полі потенціального бар'єру.

Для простоти припустимо, що бар'єр V (x) має вертикальні стінки,

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > D/2\,, \\ V_0, & |x| < D/2\,. \end{cases} \tag{5.105}$$

Стан електронів в одношаровому графені описується рівнянням Дірака (далі $\hbar = 1$),

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad \hat{H} = -iv_F\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\nabla} + V(x), \tag{5.106}$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y)$ — матриці Паулі. Ми шукаємо стаціонарні спінорні розв'язки виду

$$\psi(x, y) = \psi(x)\exp(-i\varepsilon t + iq_y y) \tag{5.107}$$

з енергією ε та імпульсом q_y вздовж бар'єру. Зосереджуємося на станах із

$$|q_y| > |\kappa| \equiv |\varepsilon|/v_F. \tag{5.108}$$

У цьому випадку електронні моди, що задовольняють рівнянню (5.106), загасають поза бар'єром, а компоненти ψ_1 та ψ_2 спінора Дірака можна записати у вигляді

$$\psi_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} a\, \exp\big[k_x(x + D/2)\big], & x < -D/2\,, \\ b\, \exp\left(iq_x x\right) + \; c\, \exp\left(-iq_x x\right), & |x| \le D/2\,, \\ d\, \exp\big[-k_x(x - D/2)\big]\,, & x > D/2\,, \end{array} \right\}, \tag{5.109}$$

$$\psi_2(x) = \left\{ \begin{array}{ll} a\, \frac{i\kappa}{k_x + q_y}\, \exp\big[k_x(x + D/2)\big]\,, & x < -D/2\,, \\ -b\, \exp(iq_x x + i\theta) + \; c\, \exp(-iq_x x - i\theta)\,, & |x| \le D/2\,, \\ -d\, \frac{i\kappa}{k_x - q_y}\, \exp\big[-k_x(x - D/2)\big]\,, & x > D/2\,, \end{array} \right\}, \tag{5.110}$$

з дійсним

$$k_x = \left(q_y^2 - \kappa^2\right)^{1/2} \tag{5.111}$$

та

$$q_x = \left[(\kappa - \mathcal{V}/D)^2 - q_y^2\right]^{1/2}. \tag{5.112}$$

Тут $\mathcal{V} = V_0 D/\hbar v_F$ — це ефективна потужність бар'єра, а $\mathrm{tg}\,\theta = q_y/q_x$.

Зшиваючи функції $\psi_1(x)$ та $\psi_2(x)$ у точках $x = \pm D/2$, отримуємо набір з чотирьох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь для констант a, b, c та d.

Прирівнюючи визначник цього набору до нуля, отримуємо дисперсійне відношення для локалізованих енергетичних станів електронів,

$$F(\varepsilon, q_y) \equiv \mathrm{tg}(q_x D) + \frac{k_x q_x}{\kappa(\mathcal{V}/D - \kappa) + q_y^2} = 0\,. \tag{5.113}$$

Спектр локалізованих станів у графені (5.113) показано суцільними чорними кривими на рис. 5.2 для безрозмірних змінних

$$Q = q_y D, \qquad \mathcal{E} = \varepsilon D / v_F. \tag{5.114}$$

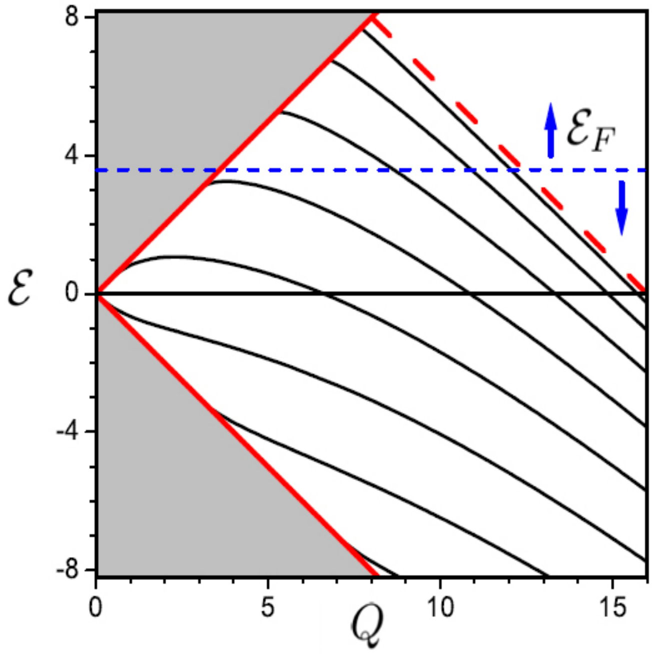

Рис. 5.2. Енергетичний спектр електронів у графені, отриманий для позитивних Q і $\mathcal{V} = 16$.

Цей спектр складається з нескінченної кількості гілок $\mathcal{E}_n(Q)$. Кожна з цих гілок починається з ліній $\mathcal{E} = \pm|Q|$ (червоні суцільні прямі лінії на рис 5.2) при

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}/2 - \pi^2 n^2 / 2\mathcal{V}, \tag{5.115}$$

і асимптотично прямує до лінії

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} - Q \tag{5.116}$$

із збільшенням Q (штрихова червона лінія на рис. 5.2). Крім того, окрема гілка спектру починається в точці ($Q = 0$, $\mathcal{E} = 0$), і також прямує до лінії (5.116).

Поведінка різних гілок спектра залежить від потужності бар'єра $\mathcal{V}$. Якщо $\mathcal{V} < \pi/2$, тоді всі гілки лежать у нижній напівплощині, $E < 0$. Локалізовані стани з позитивними енергіями з'являються лише для $\mathcal{E} < 0$. Коли $\mathcal{V}$ збільшується, у спектрі з'являються нові гілки з позитивними енергіями. Коли $\mathcal{V}$ знаходиться в межах інтервалу

$$(n + 1/2)\pi < \mathcal{V} < (n + 3/2)\pi, \tag{5.117}$$

кількість гілок з $\mathcal{E} > 0$ дорівнює $n + 1$, для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Варто підкреслити, що кожна з гілок з позитивною енергією має максимум $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n^{\max}$ при певному хвильовому числі $Q = Q_n^{\max}$. Поблизу цих точок групова швидкість локалізованих електронних хвиль прямує до нуля, що нагадує явища зупинки світла, виявлені в різних середовищах [342, 343]. Локалізовані стани також можна спостерігати в графені, коли подається напруга, що відповідає потенціальній ямі [344].

Зауважимо, що у роботах [345–347] повідомлялося про локалізовані електронні стани в графені на дефектах та підвищення провідності через збільшення електронної густини станів, локалізованих біля країв листа.

На відміну від цих прикладів, електронні стани, що вивчаються в цьому пункті, локалізовані в межах бар'єру, а також вони регулюються, тобто рівні енергії можуть бути зміщені за допомогою зміни потужності бар'єру (наприклад, шляхом налаштування напруги).

5.2.2. Густина локалізованих мод

Для обчислення густини електронних станів $\rho(\varepsilon)$ ми використовуємо загальну формулу

$$\rho(\varepsilon) = \sum_{\alpha} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\alpha}), \tag{5.118}$$

де індекс α позначає квантовий стан, а $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака. Використовуючи

$$\sum_{\alpha}(\ldots) = \frac{4L_x L_y}{(2\pi)^2} \int dk_x dk_y (\ldots), \tag{5.119}$$

для неперервного спектру можна знайти очікуваний результат:

$$\rho_{\text{cont}}(\mathcal{E}) = \rho_0 |\mathcal{E}|, \quad \rho_0 = \frac{2L_x L_y}{\pi v_F D}\,, \tag{5.120}$$

де L_x та L_y — довжини графенового листа у напрямках x та y відповідно.

Для локалізованих енергетичних станів отримуємо:

$$\rho_{\text{loc}}(\mathcal{E}) = 2\rho_0 \frac{D}{L_x} \sum_{n} \left| \frac{d\mathcal{E}_n(Q)}{dQ} \right|^{-1}_{\mathcal{E}_n(Q)=\mathcal{E}}, \tag{5.121}$$

де n перебігає позитивні корені рівняння

$$\mathcal{E}(Q) = \mathcal{E}. \tag{5.122}$$

Функція $\rho_{\text{loc}}(\mathcal{E})$ виявляє два типи особливостей. По-перше, збільшуючи $\mathcal{E}$, стрибки (величиною $2D/L_x$) у $\rho_{\text{loc}}(\mathcal{E})/\rho_0$ відбуваються в точках, заданих рівнянням (5.115), де нові гілки спектру виникають або зникають. Що ще важливіше, особливості спостерігаються, коли $\mathcal{E}(Q) = \mathcal{E}_n^{\max}$, де величина $|d\mathcal{E}/dQ|^{-1}$ в рівнянні (5.121) розходиться.

Розташування особливостей зміщуються при зміні потужності бар'єру $\mathcal{V}$. Тому вони періодично перетинають рівень Фермі $\mathcal{E}_F$. Це створює квантові коливання густини станів при зміні енергії Фермі, які видно на верхній панелі рис. 5.3, на якій показано залежність $\rho_{\rm loc}(\mathcal{E}_F)/\rho_0$ від ефективної потужності бар'єру $\mathcal{V}$.

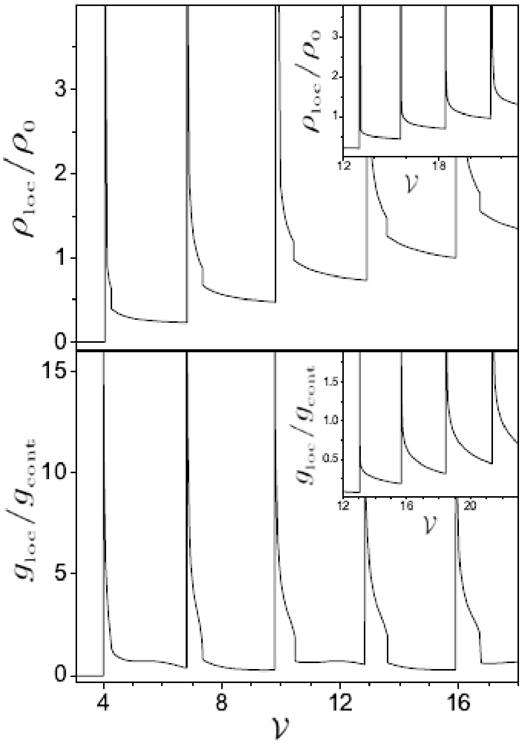

Рис. 5.3. Безрозмірна густина локалізованих станів $\rho_{\rm loc}/\rho_0$ (верхня панель) та провідність $g_{\rm loc}/g_{\rm cont}$ (нижня панель) як функції потужності потенціального бар'єру $\mathcal{V}$. Параметри: $D/L_x = 0,1$, $\mathcal{E}_F = 1$ (основні панелі), $\mathcal{E}_F = 5$ (вставки).

5.2.3. Вплив локалізованих станів на провідність системи

5.2.3.1. Транспорт у листі графену

Вивчаючи транспорт, в рамках теорії лінійного відгуку, зазвичай починають з кореляційної функції,

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -i\vartheta(t-t')\mathrm{Tr}\left\{\hat{\varrho}\big[\hat{\mathbf{j}}^H_\mu(\mathbf{x}),\hat{\mathbf{j}}^H_\nu(\mathbf{x}')\big]\right\}, \tag{5.123}$$

де $x = (\mathbf{r}, t)$, $\vartheta(t)$ — функція Хевісайда, $\hat{\varrho}$ — матриця рівноважної густини, і

$$\hat{\mathbf{j}}_\mu^H(\mathbf{r}, t) = \exp{(i\hat{H}t)}\hat{\mathbf{j}}_\mu(\mathbf{r})\exp{(-i\hat{H}t)} \tag{5.124}$$

є поточним оператором у представленні Гейзенберга з гамільтоніаном $\hat{H}$, взятим з рівняння (5.106), і де $[\ldots, \ldots]$ означає комутатор. Для електронів з лінійним спектром Дірака можна знайти:

$$\hat{\mathbf{j}}_\mu(\mathbf{r}) = ev_F\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\mu\hat{\psi}(\mathbf{r}). \tag{5.125}$$

Рівняння (5.123) використовується для визначення частотно-залежної лінійної провідності згідно

$$g_{\mu\nu}(\omega) = \mathrm{Re}\frac{i}{\omega L_\mu L_\nu}\iint \mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r}K_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)\,. \tag{5.126}$$

Тут Re означає дійсну частину комплексного числа. Розкладемо оператор ферміонного поля $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ за точними власними функціями (рівняння (5.107)), а саме,

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{r})\exp{(-i\varepsilon_\alpha t)}\hat{a}_\alpha, \tag{5.127}$$

а потім виконаємо квантове усереднення в рівнянні (5.123) за допомогою теореми Віка та співвідношення

$$\mathrm{Tr}\big\{\hat{\varrho}\,\hat{a}_\alpha^\dagger\hat{a}_\beta\big\} = \delta_{\alpha\beta}f(\varepsilon_\alpha), \tag{5.128}$$

де

$$f(\varepsilon) = 1/[\exp[(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_F)/T] + 1] \tag{5.129}$$

є функцією Фермі. Виконавши перетворення Фур'є та використовуючи

$$\mathrm{Re}[i/(\varepsilon-\varepsilon'+\omega+i0)]=\pi\delta(\varepsilon-\varepsilon'+\omega), \qquad (5.130)$$

рівняння (5.126) зводиться до вигляду

$$g_{\mu\nu}(\omega)=\frac{\pi(ev_F)^2}{L_\mu L_\nu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\varepsilon\,\frac{f(\varepsilon_+)-f(\varepsilon_-)}{\omega}\times$$
$$\times\mathrm{Tr}\left\{\hat\sigma_\mu\delta(\epsilon_+-\hat H)_{\mathbf{rr'}}\hat\sigma_\nu\delta(\varepsilon_--\hat H)_{\mathbf{r'r}}\right\}, \qquad (5.131)$$

де $\varepsilon_\pm=\varepsilon\pm\omega/2$, і слід включати просторове інтегрування. Дельта-функції оператора можуть бути безпосередньо пов'язані з одночастинковими функціями Гріна

$$\hat G_\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\langle\mathbf{r}|(\varepsilon-\hat H)^{-1}|\mathbf{r}'\rangle \qquad (5.132)$$

співвідношенням

$$\delta(\varepsilon-\hat H_{\mathbf{rr'}})=\frac{1}{2\pi i}\left[G^a_\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{r}')-G^r_\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right], \qquad (5.133)$$

де верхній індекс a/r означає відповідно випереджуючу/відстаючу функції. Таким чином отримуємо такий вираз для провідності листа графена:

$$g_{\mu\nu}(\omega)=\frac{(ev_F)^2}{4\pi L_\mu L_\nu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\varepsilon\,\frac{f(\varepsilon_+)-f(\varepsilon_-)}{\omega}\times$$
$$\times\mathrm{Tr}\left\{\hat\sigma_\mu\left[\hat G^a_{\varepsilon_+}(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\hat G^r_{\varepsilon_+}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]\hat\sigma_\nu\left[\hat G^r_{\varepsilon_-}(\mathbf{r}',\mathbf{r})-\hat G^a_{\varepsilon_-}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\right]\right\}. \qquad (5.134)$$

Далі ми включаємо затухання, вводячи час життя частинок τ для ферміонів Дірака у функцію Гріна,

$$\langle\hat G^{r/a}_\varepsilon\rangle_{\mathrm{dis}}\approx(\varepsilon-\hat H\pm i/\tau)^{-1}, \qquad (5.135)$$

який входить через уявну частину відповідної власної енергії. Нижній індекс «dis» відноситься до випадку врахування дисипацій. Крім того, ми розкладаємо середнє значення добутку двох функцій Гріна на добуток їх середніх значень,

$$\langle \hat{G}^r_{\varepsilon_+} \hat{G}^a_{\varepsilon_-} \rangle_{\rm dis} \approx \langle \hat{G}^r_{\varepsilon_+} \rangle_{\rm dis} \langle \hat{G}^a_{\varepsilon_-} \rangle_{\rm dis} \,. \tag{5.136}$$

Це припущення повинно бути справедливим для слабкого затухання і разом з рівнянням (5.135) еквівалентно самоузгодженому наближенню Борна.

5.2.3.2. Провідність вздовж бар'єру

Тепер ми знаходимо провідність вздовж бар'єру ($\mu = \nu = y$) для геометрії, показаної на рис. 5.1. При нульовій температурі $T \to 0$, коли

$$f(\varepsilon) = \vartheta(\varepsilon_F - \varepsilon) \tag{5.137}$$

та інтегрування обмежується частотою ω, для середньої статичної провідності маємо

$$g \equiv \langle g_{yy}(\omega \to 0) \rangle_{\rm dis}, \tag{5.138}$$

що можна представити у такому вигляді:

$$g = g_{\rm cont} + g_{\rm loc} \,. \tag{5.139}$$

Перший внесок $g_{\rm cont}$ тут походить від енергетичних станів з неперервної частини спектра електронів, використовуючи рівняння (5.120), і явно визначається таким співвідношенням (зараз зберігається $\hbar$):

$$g_{\text{cont}} = \frac{\pi e^2}{16\hbar}\frac{L_x}{L_y}\left[\tau\varepsilon_F + \frac{1}{\pi}\left(1 - \tau\varepsilon_F \operatorname{arctg}\frac{1}{\tau\varepsilon_F}\right)\right]. \tag{5.140}$$

У точці $\varepsilon_F = 0$, з рівняння (5.140) отримується граничний (незалежний від часу розсіювання) результат:

$$g_{\text{cont}} = \sigma_{\min}(L_x/L_y), \tag{5.141}$$

де $\sigma_{\min} = (\pi/8)(e^2/h)$ — мінімальна провідність [341, 348]). Далеко від цієї точки провідність зростає лінійно з енергією Фермі:

$$g_{\text{cont}} = \frac{\pi e^2}{16\hbar}\frac{L_x}{L_y}\tau\varepsilon_F. \tag{5.142}$$

Важливим результатом є осцилююча частина g_{loc}, яка походить від електронних станів, локалізованих в межах бар'єру. Її можна виразити за допомогою рівняння (5.121) наступним чином:

$$g_{\text{loc}} = \frac{2e^2}{\hbar}\frac{D}{L_y}\sum_n \int_0^\infty d\mathcal{E}\left|\frac{d\mathcal{E}_n}{dQ}\right|^{-1}_{\mathcal{E}_n=\mathcal{E}} \frac{M(\mathcal{E})\eta^2}{\left[(\mathcal{E}-\mathcal{E}_F)^2+\eta^2\right]^2}, \tag{5.143}$$

де

$$M(\mathcal{E}) = \left|\int \frac{dx}{D}\psi^*(x)\hat{\sigma}_y\psi_\alpha(x)\right|^2 \tag{5.144}$$

— елемент матриці, побудований на хвильових функціях локалізованих станів, (5.109)–(5.110) та $\eta = D/\tau v_F$. Інтегрування, що залишається в рівнянні (5.143), спрощено, виходячи з того, що в точках, де підінтегральний вираз $|dQ/d\mathcal{E}_n|$ має кореневі сингулярності, M($\mathcal{E}$) гладка. Таким чином, нарешті можна знайти:

$$\frac{g_{\rm loc}(\mathcal{V},\mathcal{E}_F)}{g_{\rm cont}}=\frac{16}{\mathcal{E}_F}\frac{D}{L_x}M(\mathcal{E}_F)\sum_n\left|\frac{dQ}{d\mathcal{E}_n}\right|_{\mathcal{E}_n=\mathcal{E}_F}, \tag{5.145}$$

де провідність $g_{\rm loc}$ нормується на частину $g_{\rm cont}$, а $g_{\rm cont}\propto\tau\varepsilon_F$. Зауважте, що

$$\mathcal{E}_F=\varepsilon_F\frac{D}{v_F}. \tag{5.146}$$

Похідну, що входить у рівняння (5.145) можна обчислити за допомогою дисперсійного рівняння (5.113) так:

$$\frac{dQ}{d\mathcal{E}}=-\frac{dF/d\mathcal{E}}{dF/dQ}, \tag{5.147}$$

отже отримаэмо

$$\frac{dQ}{d\mathcal{E}}=Q\frac{\mathcal{V}-2\mathcal{E}+(\mathcal{V}-\mathcal{E})\sqrt{Q^2-\mathcal{E}^2}}{(\mathcal{V}-\mathcal{E})\mathcal{E}-Q^2-Q^2\sqrt{Q^2-\mathcal{E}^2}}. \tag{5.148}$$

Немонотонний характер $g_{\rm loc}(\mathcal{V},\mathcal{E}_F)$ проілюстровано на нижній панелі рис. 5.3. Суттєве спостереження, яке випливає з рівняння (5.145), полягає в тому, що поздовжня провідність простежує особливості густини локалізованих станів і відкриває прямий шлях для їх експериментального спостереження. Варто також згадати, що близько до точок сингулярності $dQ/\mathrm{d}\mathcal{E}$, тобто

$$|\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_F|\lesssim\eta, \tag{5.149}$$

поправка до провідності визначається скінченною шириною η-лоренціана в рівнянні (5.143).

Змінюючи концентрацію вільних частинок при постійній потужності бар'єра, можна знову спостерігати коливання густини станів (див. вставку рис. 5.4).

Таким чином, частина провідності, що походить з локалізованих станів, також немонотонно змінюється при зміні енергії Фермі (див. головну панель рис. 5.4).

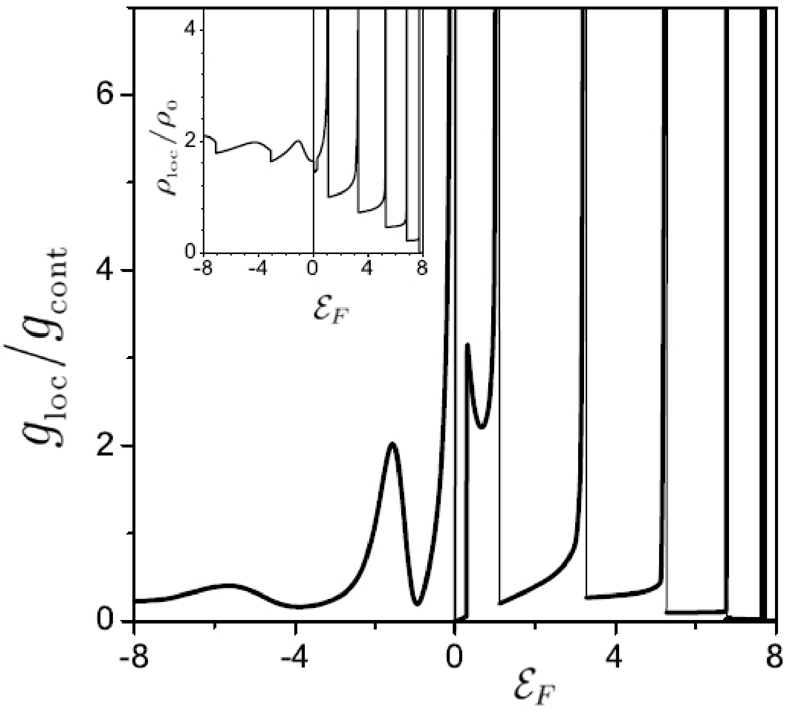

Рис. 5.4. Безрозмірні немонотонні частини густини станів $\rho_{\mathrm{loc}}/\rho_0$ на рівні Фермі (вставка) та провідності $g_{\mathrm{loc}}/g_{\mathrm{cont}}$ (основна панель) як функції енергії Фермі $\mathcal{E}_F$. Параметри: $D/L_x = 0{,}1$, $\mathcal{V} = 16$.

Таким чином, локалізовані моди у двовимірній системі, листі графена, що знаходиться в зовнішньому полі з профілем потенціального бар'єру, визначають транспортні властивості листа графена, а його провідність має сингулярності в точках, що відповідають максимумам дисперсійних кривих для локалізованих мод.

Висновки до розділу 5

У п'ятому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [16, 17]:

● Розроблено теорію теплового транспорту у одновимірній електронній системі, вігнерівському кристалі, з урахуванням нелінійності закону дисперсії. Теплопровідність цієї системи, що є граничним випадком нелінійної латтінжерівської рідини, визначається взаємодією мод коливань електронної густини — плазмонів. Основний процес, що визначає теплопровідність — парні зіткнення мод, в результаті яких одна з них може змінити напрямок свого поширення, тобто цей процес не зберігає число мод, що поширюються в один бік. Отримано залежність теплопровідності від довжини системи, яка визначається плазмовою довжиною.

● Показано, що встановлення термічної рівноваги відбувається у декілька етапів, причому повне врівноваження визначається як процесом, що зберігає число плазмонів при зіткненні, так і процесом, за якого число електронних мод змінюється. Показано, що швидкості розсіювання в цих випадках мають однакову температурну залежність, але другий процес менш ймовірний відповідно до параметру взаємодії між електронами у кристалі. Доведено, що в часових масштабах, що значно перевищують час життя плазмонів, викликаний взаємодією, теплові струми демонструють неекспоненційний спад, що може бути пояснено тим, що власні значення інтегралу зіткнення для розсіювання плазмонів охоплюють неперервний спектр збуджень.

● Досліджені локалізовані електронні моди в листі графену, на площині якого створено потенціальний бар’єр. На відміну від речовин з квадратичним законом дисперсії, діраківські моди в графені можуть існувати і у бар’єрі, що пов’зано із симетрією системи по відношенню до заміни електронів на дірки, а потенціальної ями на бар’єр. Знайдено дисперсійні криві для локалізованих мод і показано, що вони мають максимуми.

● Немонотонний характер дисперсійних кривих локалізованих мод призводить до особливостей в електропровідності графену в напрямку вздовж бар’єру. Отримано провідність у вигляді суми вкладів неперервного спектру і локалізованих мод і показано, що при зміні ширини або висоти бар’єру ця провідність має систему особливих точок.

Результати, що викладені в даному розділі дисертації, можуть бути використані при аналізі електронного транспорту у системах квантових нанотрубок або квантових волокон при формуванні на них квантових точкових контактів.

Розділ 6

ПОШИРЕННЯ, ПОГЛИНАННЯ ТА ЛОКАЛІЗАЦІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ МОД У ШАРУВАТОМУ НАДПРОВІДНИКУ

В шостому розділі роботи, заснованому на статтях [18–21], розглядається анізотропне середевище — шаруватий надпровідник. Обговорюється поширення, поглинання та локалізація електромагнітних хвиль у зразку шаруватого надпровідника з шарами, паралельними та перпендикулярними його поверхні.

У підрозділі 6.1 узагальнюються, класифікуються і доповнюються результати дослідження закону дисперсії локалізованих хвиль. Зокрема, отримано закон дисперсії для довільного напрямку поширення локалізованих мод щодо шарів у пластині шаруватого надпровідника. Завдяки сильній анізотропії цього матеріалу електромагнітне поле моди представляє собою суперпозицію звичайної і незвичайної хвиль, які, в випадку довільного напрямку поширення, не можуть бути відокремлені одна від одної. Показано, що дисперсійні криві можуть бути як монотонно зростаючими, так і немонотонними, тобто містити ділянки з аномальною дисперсією. Встановлено діапазон частот в залежності від кута поширення, у якому може спостерігатися аномальна дисперсія. Проаналізовано залежність частоти як від модуля поздовжнього хвильового вектора, так і від його проекцій, що має важливе значення для практичного застосування в електроніці терагерцового діапазону.

У підрозділі 6.2 теоретично вивчено резонансне поглинання терагерцевих електромагнітних хвиль в пластині шаруватого надпровідника, яку поміщено між двома діелектричними шарами. Це явище, відоме як аномалія Вуда, що забезпечує пригнічення дзеркального відбиття хвилі, виникає завдяки збудженню локалізованих хвиль, досліджуваних у попередньому підрозділі 6.1 та істотно відрізняється в шаруватих надпровідниках порівняно зі звичайними провідниками. Оскільки дисперсійні криві локалізованих мод немонотонні, це призводить до особливої залежності коефіцієнту поглинання від кута падіння хвилі, зокрема, до подвійних резонансних піків.

У підрозділі 6.3 досліджено вплив постійного магнітного поля на поширення джозефсонівських мод у пластині шаруватого надпровідника. Зокрема, показано, що стале магнітне поле за рахунок нелінійності джозефсонівського струму змінює тензор ефективної діелектричної проникності шаруватого надпровідника, тим самим впливаючі на поширення лінійних мод.

6.1. Локалізовані хвилі при довільному напрямку поширення

Почнемо з аналізу, узагальнення та класифікації локалізованих хвиль у шаруватому надпровіднику при різних взаємних орієнтаціях шарів зразка, поверхні розділу і поляризації хвилі [230–241, 247].

Як у випадку будь-якого одновісного провідника, у шаруватих надпровідниках можуть поширюватися два типи хвиль — звичайні і надзвичайні хвилі.

Поширення звичайних хвиль не викликає виникнення джозефсонівського струму і, отже, такі хвилі є лінійними. На відміну від них, надзвичайні хвилі мають ненульову z-компоненту електричного поля, що дозволяє їм бути нелінійними.

Як буде показано далі, локалізована в зразку шаруватого надпровідника хвиля може являти собою або звичайну хвилю, або надзвичайну, або одночасно обидва види хвиль, пов’язаних між собою граничними умовами.

6.1.1. Моди, локалізовані в зразках з надпровідними шарами, паралельними границі

У цьому пункті ми розглядаємо результати для напівнескінченних зразків [236, 240] або пластин кінцевої товщини [247], у яких надпровідні шари орієнтовані паралельно їх поверхні, уздовж якої поширюються локалізовані хвилі (див. рис. 6.1). В цьому випадку поверхня зразка ізотропна і, не порушуючи загальності, можна вважати, що хвилі поширюються уздовж осі x, тобто, $k_y = 0$, а загасають уздовж осі z.

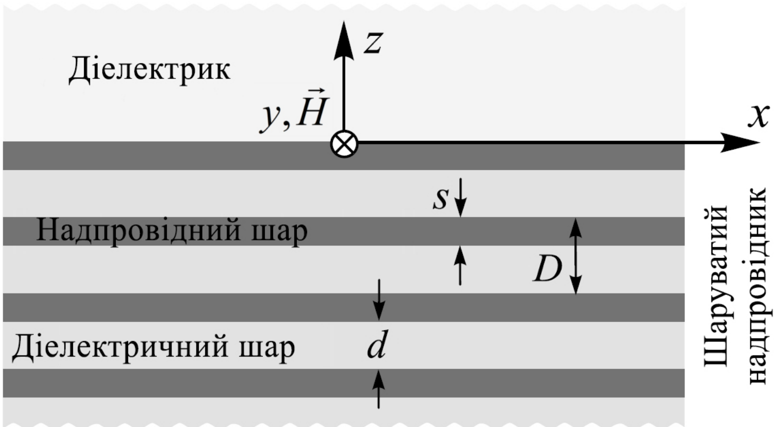

Рис. 6.1. Зразок з шарами, паралельними границі, в діелектричному оточенні.

Якщо розглядається напівнескінченний зразок, то як було показано [236, 240], вздовж межі напівнескінченного зразка можуть поширюватися поверхневі хвилі з законом дисперсії

$$K_x \lambda_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_s}} \frac{\omega}{\omega_J} \left[\varepsilon_c(\omega) \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_{ab}(\omega)}{\varepsilon_d^2 - \varepsilon_c(\omega)\varepsilon_{ab}(\omega)} \right]^{1/2}, \tag{6.1}$$

де ефективні діелектричні проникності уздовж і поперек шарів мають такі частотні залежності:

$$\varepsilon_c(\omega) = \varepsilon_s \Big(1 - \frac{\omega_J^2}{\omega^2} + i\nu_c \frac{\omega_J}{\omega} \Big), \qquad \varepsilon_{ab}(\omega) = \varepsilon_s \left(1 - \frac{\omega_J^2}{\omega^2}\gamma^2 + i\nu_{ab} \frac{\omega_J}{\omega} \right). \tag{6.2}$$

Тут $\nu_{ab,c} = 4\pi\sigma_{ab,c}/\varepsilon_s\omega_J$ — безрозмірні релаксаційні частоти, які визначаються нормальною провідністю у двох напрямках.

Для багатьох експериментальних умов [349, 350] виконуються умови:

$$\nu_x \ll 1, \qquad \nu_z \ll 1. \tag{6.3}$$

Частоти, які визначаються (6.1), менші джозефсон-плазмової частоти. Більш незвичайним є виявлення другої, високочастотної гілки дисперсійних кривих поверхневих хвиль. Ця мода існує при частотах в діапазоні від

$$\omega_{min} = \omega_J(1 - \varepsilon_d/\varepsilon_s)^{-1/2}, \tag{6.4}$$

що перевищує джозефсон-плазмову частоту, до $\gamma\omega_J$, де $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}$ — параметр анізотропії шаруватого надпровідника. У частотному інтервалі від ω_J до $\omega_{\rm min}$ поверхневі хвилі не можуть поширюватися. При цьому, як показано в (6.5), зразок може мати негативний показник заломлення. Це виявляється можливим завдяки тому, що $\varepsilon_{ab}(\Omega)$ може бути негативним через велике значення параметра анізотропії γ (наприклад, для вісмутового надпровідника $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$ параметр анізотропії γ досягає значень порядку 100, однак в сполуках $\mathrm{YBa_2Cu_3O_{7-\delta}}$ — не більше 10).

Якщо ж товщина зразка скінченна, система має симетрією відносно середини пластини шаруватого надпровідника. Це дозволяє спростити задачу, розглядаючи окремо симетричні і антисиметричні по магнітному полю хвилі. Дисперсійні рівняння для цих двох типів локалізованих хвиль мають вигляд [247]:

$$\frac{k_d}{k_s} = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_{ab}(\omega)}\,\mathrm{tg}\left(\frac{k_s L}{2}\right), \tag{6.5}$$

для симетричних і

$$\frac{k_d}{k_s} = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_{ab}(\omega)} \operatorname{ctg}\left(\frac{k_s L}{2}\right), \tag{6.6}$$

для антисиметричних хвиль. Тут L — товщина пластини,

$$k_d = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_d \omega^2 / c^2}, \tag{6.7}$$

декремент загасання в діелектричному оточенні, а

$$k_s = \sqrt{\varepsilon_{ab}(\omega)[\omega^2/c^2 - k_x^2/\varepsilon_c(\omega)]} \tag{6.8}$$

є z-проекцією хвильового вектора в шаруватому надпровіднику. Важливо, що крім поверхневих хвиль, які згасають вглиб пластини і якісно аналогічні тим, що ми розглядали для напівнескінченного зразка, наявність двох границь призводить до існування хвилеводних мод, для яких електромагнітне поле осцилює від однієї границі до іншої. Усі гілки для симетричних по магнітному полю хвиль показані на рис. 6.2.

Звернемо увагу на те, що гілок, які відповідають хвилеводним модам, виявляється нескінченно багато. Це пов'язано з періодичністю тригонометричних функцій в співвідношеннях (6.5) і (6.6). Гілка поверхневих хвиль закінчується на частоті $\gamma\omega_J$, як це передбачено і для напівнескінченних зразків. Також відзначимо, що рівняння (6.5) і (6.6) переходять в (6.1) при прямуванні товщини зразка до нескінченності, $L \to \infty$.

Розглянемо способи збудження локалізованих хвиль, описаних вище. Один зі способів заснований на використанні конфігурації Отто [237, 247]. У цій конфігурації діелектричну призму розташовують так, що її основа паралельна межі зразка шаруватого надпровідника і знаходиться на деякій, порівняно невеликій, відстані. Потім підбираються такі умови, щоб хвиля, яка опромінює, потрапляла в призму з боку її зовнішньої границі, але повністю відбивалася від основи (рис. 6.3).

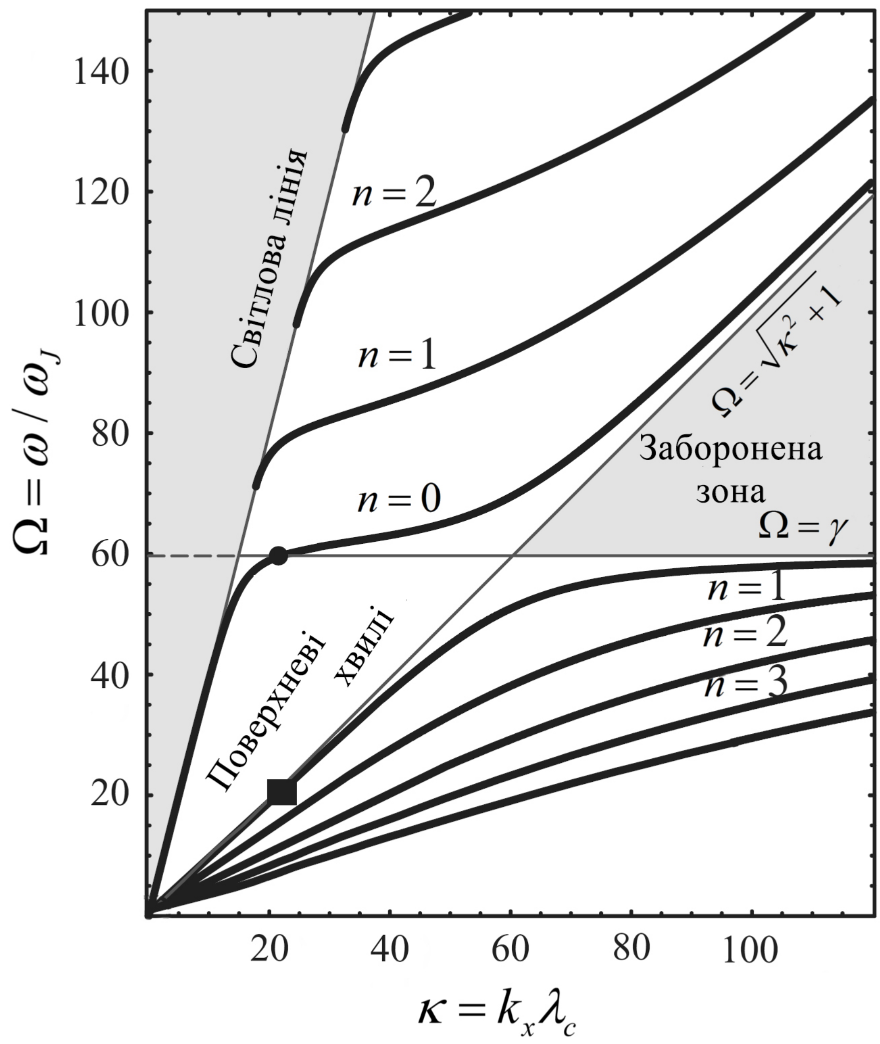

Рис. 6.2. Дисперсійні криві для локалізованих симетричних хвиль в пластині шаруватого надпровідника з шарами, паралельними поверхні [247].

При цьому електромагнітне поле проникає на невелику глибину в просторовий зазор між призмою і зразком, затухаючи експоненціально в цьому зазорі. Таке слабке проникнення може бути використано для збудження поверхневих хвиль в зразку, якщо хвильове число в просторовому зазорі, частота хвилі і ширина зазору задовольняють певним резонансним умовам. Зокрема, змінюючи величину зазору можна домагатися оптимального збудження локалізованої хвилі при заданих частоті ω і куті падіння θ.

Крім того, в роботі [237] показано, що, завдяки нелінійності рівнянь, що описують електромагнітне поле в надпровіднику, умови збудження можуть містити, крім зазначених параметрів, ще й амплітуду падаючої хвилі. Це призводить до того, що резонансний коефіцієнт відбиття хвилі, падаючої на основу призми, також залежить від її амплітуди A:

$$R^2 = \frac{S(\theta,\omega,A) – P(\theta,\omega,A)}{S(\theta,\omega,A) + P(\theta,\omega,A)}. \tag{6.9}$$

Розв'язок електродинамічної задачі в призмі, зазорі і шаруватому надпровіднику дає явний вигляд позитивних функцій S і P.

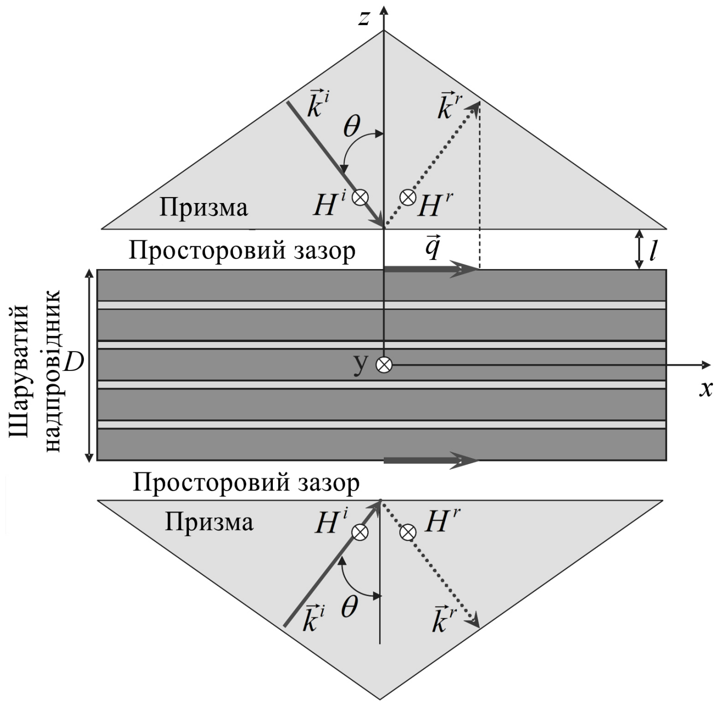

Рис. 6.3. Конфігурація Отто для збудження локалізованих хвиль в шаруватому надпровіднику [237, 247].

Ця залежність особливо яскраво проявляється поблизу джозефсонівської плазмової частоти. Виявляється, що домогтися повного придушення відбиття, тобто повної перекачки енергії падаючої хвилі в локалізовану хвилю, можна, підбираючи оптимальну амплітуду A. Цей нелінійний ефект дає додатковий спосіб управління збудженням локалізованих хвиль.

Поверхневі хвилі можна збуджувати також за допомогою дифракції падаючих плоских хвиль на будь-яких неоднорідностях поверхні. В роботі [236] показано, як за допомогою періодично модульованих властивостей шаруватого надпровідника можна забезпечити досить велике значення поздовжньої компоненти хвильового вектора дифрагованої хвилі і збудити локалізовану хвилю. В якості такої модульованої величини може виступати максимальне значення джозефсонівського струму поперек шарів. При цьому показано, що кутова залежність коефіцієнта відбиття має мінімум, в якому $R = 0$. Таким чином, цей метод також є ефективним способом збудження локалізованих хвиль.

6.1.2. Моди, локалізовані в зразках з надпровідними шарами, перпендикулярними границі

Тепер перейдемо до розгляду другої можливої конфігурації, в якій шари надпровідника перпендикулярні поверхні зразка (рис. 6.4) і поверхневі хвилі поширюються під кутом θ до шарів з хвильовим вектором

$$\vec{k} = (k_x, k_z) = (k \sin\theta, k \cos\theta). \tag{6.10}$$

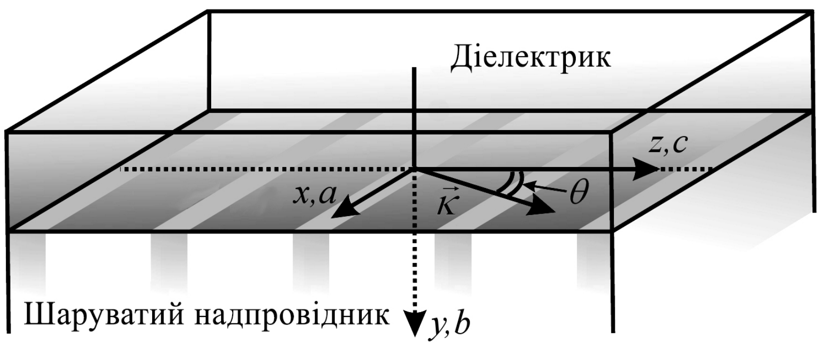

Рис. 6.4. Зразок, шари в якому перпендикулярні площині границі [238, 239].

Анізотропія в площині межі призводить до того, що закон дисперсії залежить від напрямку поширення поверхневих хвиль (так званих косих хвиль) [238, 239].

Дисперсійне рівняння для хвиль, локалізованих на межі шаруватого надпровідника і діелектрика з проникністю ε_d, має вигляд [238, 239],

$$k_z^2[k_s^{(0)}]^2(\varepsilon_{ab} - \varepsilon_d) + \varepsilon_{ab}[k_d + k_s^{(e)}][k_d k_s^{(0)} + k_x^2] = 0. \tag{6.11}$$

Тут k_d, $k_s^{(0)}$ та $k_s^{(e)}$ —- декременти загасання хвилі в діелектрику, звичайної і надзвичайної хвиль в надпровіднику, відповідно:

$$k_d = (k_x^2 + k_z^2 - \varepsilon_d \omega^2/c^2)^{1/2},$$
$$k_s^{(0)} = (k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \varepsilon_{ab}/c^2)^{1/2},$$
$$k_s^{(e)} = (k_x^2 + k_z^2 \varepsilon_c/\varepsilon_{ab} - \omega^2 \varepsilon_c/c^2)^{1/2}. \qquad (6.12)$$

На рис. 6.5 зображені дисперсійні криві, описані рівнянням 6.11 для різних значень кута θ поширення хвиль. Вставка показує ті ж криві в збільшеному масштабі. При строго нульовому куті, тобто при поширенні перпендикулярно границі, крива повністю перебуває в частотній області $\omega < \omega_J$ і прямує до джозефсонівській плазмовій частоті з ростом величини хвильового вектора. Однак при ненульових кутах максимальна частота на дисперсійній кривій може бути і більшою, доходячи до частоти (6.4). При строго поздовжньому ж поширенні, коли хвильовий вектор не має компоненти поперек шарів, крива монотонна і при більш високих частотах. Така якісна відмінність двох крайніх випадків, поздовжнього і поперечного поширення, від будь-якого проміжного кута полягає в тому, що тільки в цих випадках звичайна компонента в полі локалізованої хвилі відсутня.

Перейдемо тепер до найбільш цікового випадку пластини скінченної товщини з шарами, перпендикулярними поверхні, в якій поширюються локалізовані хвилі під довільним кутом до площини шарів. Як уже зазначалося, дисперсія локалізованих хвиль в такій геометрії буде залежати від напрямку їх поширення. Тому становить інтерес вивчення дисперсійних кривих при довільному напрямку поширення хвиль. Крім того, з експериментальної точки зору може виявитися зручним розгляд не пластини, а довгого зразка, поміщеного в планарний хвилевід, тобто між двома металевими пластинами. В цьому випадку істотно важливим є аналіз саме мод з хвильовим вектором, спрямованим під кутом до надпровідних шарів.

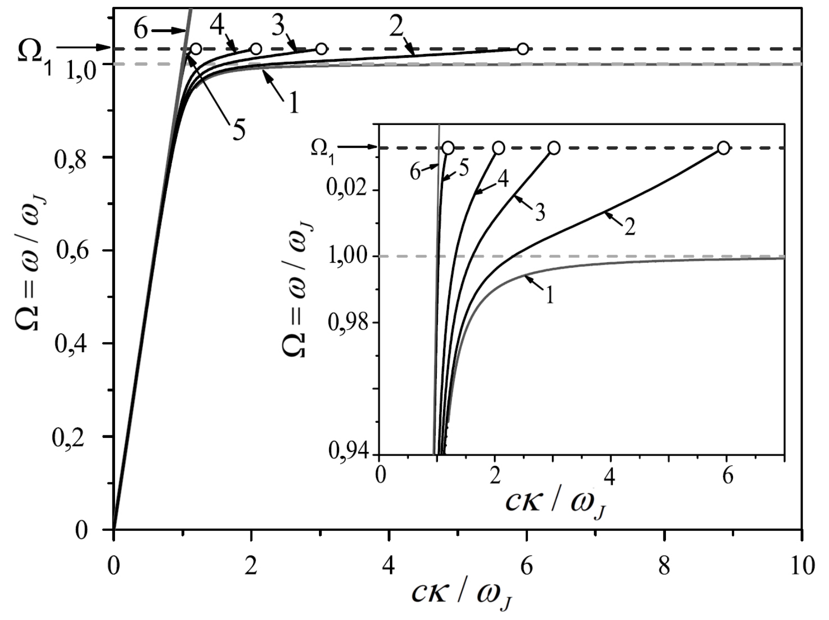

Рис. 6.5. Дисперсійні криві поверхневих хвиль при різних значеннях кута θ. Параметри: $\theta = 0°$, $10°$, $20°$, $30°$, $60°$ та $90°$ (криві 1-6) [238].

6.1.2.1. Електромагнітне поле в системі

Розглянемо нескінченну пластину шаруватого надпровідника товщиною L, оточену діелектриком з проникністю ε_d (див. рис. 6.6). Система координат вибрана таким чином, що вісь z спрямована вздовж кристалографічної осі **c**, а вісь x спрямована уздовж нормалі до поверхні пластини, так що площина yz відповідає середині пластини. Ми розглядаємо локалізовані моди, які розповсюджуються уздовж поверхні пластини з хвильовим вектором $\overrightarrow{k}_{||}$, спрямованим під кутом θ до осі z. Система має симетрію відносно площини yz, що дозволяє в лінійному наближенні шукати всі можливі власні моди у вигляді симетричних і антисиметричних за магнітним полем хвиль.

Ми шукаємо локалізовані хвилі, поля яких мають вигляд:

$$\overrightarrow{E}(x,y,z,t) = \overrightarrow{\mathcal{E}}(x)\exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)],$$
$$\overrightarrow{H}(x,y,z,t) = \overrightarrow{\mathcal{H}}(x)\exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \qquad (6.13)$$

де k_y і k_z — проекції поздовжнього хвильового вектора $\overrightarrow{k}_{||}$ на осі y і z, відповідно, а ω — частота локалізованої хвилі.

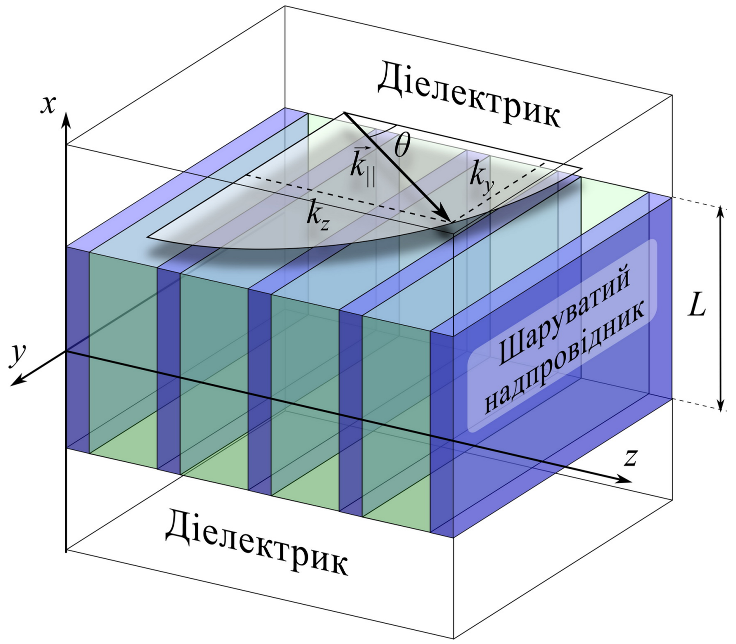

Рис. 6.6. Геометрія задачі про поширення локалізованих мод під довільним кутом до площини шарів.

Надалі ми будемо припускати, що характерні масштаби зміни електромагнітного поля в пластині істотно перевищують період шаруватої структури надпровідника. В цьому випадку можна перейти від рівнянь в скінченних різницях до диференціальних рівнянь. У пункті 1.3.2 було описано підхід до опису електромагнітного поля через зв'язані синусоїдальні рівняння Гордона. В цьому підрозділі ми застосовумо більш загальний підхід, необхідний для опису як звичайних так і надзвичайних хвиль. Він заснований на розв'язуванні рівняння для векторного потенціалу $\vec{A}$ поля (див., наприклад, [245]):

$$\Delta\vec{A} - \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) = \frac{\varepsilon_s}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c}\vec{J}, \tag{6.14}$$

де $\vec{J}$ — густина струму в системі, ε_s — проникність діелектричних шарів пластини. Векторний потенціал пов'язаний з електричним $\vec{E}$ і магнітним $\vec{H}$ полями стандартними співвідношеннями:

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \tag{6.15}$$

тут калібрування обрано таким чином, що скалярний потенціал дорівнює нулю.

Розв'язуючи рівняння (6.14) для векторного потенціалу, можна показати, що електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику можна представити у вигляді суперпозиції так званих звичайної і надзвичайної компонент, аналогічно одновісному анізотропному кристалу:

$$\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{ord}} + \overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{ext}}, \qquad \overrightarrow{\mathcal{H}} = \overrightarrow{\mathcal{H}}^{\mathrm{ord}} + \overrightarrow{\mathcal{H}}^{\mathrm{ext}}. \tag{6.16}$$

Поляризація звичайної хвилі така, що електричне поле направлено вздовж надпровідних шарів і не викликає джозефсонівського струму, $\mathcal{E}_z^{\mathrm{ord}} = 0$, і в надзвичайній хвилі магнітне поле перпендикулярно шарам, $\mathcal{H}_z^{\mathrm{ext}} = 0$.

1. Звичайна хвиля.

Як вже було сказано, завдяки симетрії системи відносно середини пластини, власні локалізовані моди також мають симетрією. Тому зручно відразу уявити електричне та магнітне поля звичайної хвилі окремо в симетричній або антисиметричній (по дотичним до поверхні пластини компонентам $\mathcal{H}_y$ та $\mathcal{H}_z$ магнітного поля) формах:

$$\overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{sym}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon_s}} h^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{sym}} \begin{bmatrix} -\kappa_y\cos(q_o x) \\ i\kappa_o\sin(q_o x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathcal{H}}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{sym}} = h^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{sym}} \begin{bmatrix} -i\kappa_o\kappa_z\sin(q_o x) \\ -\kappa_y\kappa_z\cos(q_o x) \\ (\kappa_o^2+\kappa_y^2)\cos(q_o x) \end{bmatrix}, \tag{6.17}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{asym}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon_s}} h^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{sym}} \begin{bmatrix} -\kappa_y\sin(q_o x) \\ -i\kappa_o\cos(q_o x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathcal{H}}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{asym}} = h^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{sym}} \begin{bmatrix} i\kappa_o\kappa_z\cos(q_o x) \\ -\kappa_y\kappa_z\sin(q_o x) \\ (\kappa_o^2+\kappa_y^2)\sin(q_o x) \end{bmatrix}, \tag{6.18}$$

де вводяться нормовані компоненти хвильового вектора і нормована частота:

$$\kappa_o = q_o \lambda_c = \sqrt{(\varepsilon_{ab}/\varepsilon_s)\Omega^2 - \kappa_y^2 - \kappa_z^2}, \tag{6.19}$$
$$\kappa_y = k_y \lambda_c, \quad \kappa_z = k_z \lambda_c, \quad \Omega = \omega/\omega_J,$$

а параметри $h_{\rm sym}^{\rm ord}$ та $h_{\rm asym}^{\rm ord}$ визначають амплітуди симетричної та антисиметричної хвилі, відповідно.

2. Надзвичайна хвиля.

Електромагнітне поле надзвичайної хвилі також зручно представити в симетричній або антисиметричній формах:

$$\vec{\mathcal{E}}_{\rm sym}^{\rm ext} = \frac{h_{\rm sym}^{\rm ext}\varepsilon_s^{1/2}}{i\Omega\varepsilon_{ab}} \begin{bmatrix} i\kappa_e\kappa_z\cos(q_e x) \\ -\kappa_y\kappa_z\sin(q_e x) \\ (\kappa_o^2+\kappa_y^2)\sin(q_e x) \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{H}}_{\rm sym}^{\rm ext} = h_{\rm sym}^{\rm ext} \begin{bmatrix} -i\kappa_y\sin(q_e x) \\ \kappa_e\cos(q_e x) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.20}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\rm asym}^{\rm ext} = \frac{ih_{\rm asym}^{\rm ext}\varepsilon_s^{1/2}}{\Omega\varepsilon_{ab}} \begin{bmatrix} -i\kappa_e\kappa_z\sin(q_e x) \\ -\kappa_y\kappa_z\cos(q_e x) \\ (\kappa_o^2+\kappa_y^2)\cos(q_e x) \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{H}}_{\rm asym}^{\rm ext} = h_{\rm asym}^{\rm ext} \begin{bmatrix} i\kappa_y\cos(q_e x) \\ \kappa_e\sin(q_e x) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.21}$$

де введена нормована величина:

$$\kappa_e = q_e \lambda_c = \sqrt{(\varepsilon_c/\varepsilon_s)\Omega^2 - \kappa_y^2 - (\varepsilon_c/\varepsilon_{ab})\kappa_z^2}, \tag{6.22}$$

а параметри $h_{\rm sym}^{\rm ext}$ та $h_{\rm asym}^{\rm ext}$ визначають амплітуди симетричної і антисиметричної хвилі, відповідно.

Як вже було сказано раніше, електромагнітне поле в надпровіднику представляється у вигляді суперпозиції полів звичайної і надзвичайної поляризацій, і в загальному випадку довільного напрямку поширення локалізованої хвилі обидві ці складові виявляються ненульовими. Як покаже подальший аналіз, в особливих випадках поширення уздовж ($k_z = 0$) або поперек ($k_y = 0$) шарів виявляється, що можна розглядати хвилі кожної з поляризацій незалежно.

Перейдемо тепер до розгляду електромагнітного поля поза пластинами шаруватого надпровідника. Як було відзначено, для локалізованих мод поле в діелектрику зменшується експоненціально при віддаленні від поверхні пластини. Як випливає з рівнянь Максвелла, поле в діелектрику може бути представлено в наступному вигляді:

$$\vec{\mathcal{E}}^{\pm} = \mp\frac{i\sqrt{\varepsilon_s}}{\varepsilon_d\Omega}\left\{h_y^{\pm}\begin{bmatrix}\pm i\kappa_z\kappa_d\\ \kappa_y\kappa_z\\ \kappa_d^2-\kappa_y^2\end{bmatrix} - h_z^{\pm}\begin{bmatrix}\pm i\kappa_y\kappa_d\\ \kappa_d^2-\kappa_z^2\\ \kappa_y\kappa_z\end{bmatrix}\right\}\exp\big[\mp q_d(x\mp L/2)\big], \quad (6.23)$$

$$\vec{\mathcal{H}}^{\pm} = \left\{h_y^{\pm}\begin{bmatrix}\pm i\kappa_y\\ \kappa_d\\ 0\end{bmatrix} + h_z^{\pm}\begin{bmatrix}\pm i\kappa_z\\ 0\\ \kappa_d\end{bmatrix}\right\}\exp\big[\mp q_d(x\mp L/2)\big], \quad (6.24)$$

де верхній індекс $+$ або $-$ відповідає верхньому $(x > L/2)$ або нижньому $(x < -L/2)$ діелектричному півпростору. Відповідні хвильові вектора мають компоненти $\vec{k}^{\pm} = (\pm iq_d, k_y, k_z)$, де дійсний позитивний заряд q_d задовольняє такому співвідношенню:

$$\kappa_d = q_d\lambda_c = \sqrt{\kappa_y^2+\kappa_z^2-(\varepsilon_d/\varepsilon_s)\Omega^2} > 0, \quad (6.25)$$

а параметри $h_{y,z}^{\pm}$ визначають амплітуди хвиль.

6.1.2.2. Дисперсійні співвідношення для локалізованих мод

Для знаходження дисперсійного співвідношення локалізованих мод необхідно врахувати неперервність зміни тангенціальних компонент електричного і магнітного полів на двох границях між шаруватим надпровідником і діелектриком:

$$\left(\mathcal{E}_{y,z}^{\mathrm{ord}} + \mathcal{E}_{y,z}^{\mathrm{ext}} - \mathcal{E}_{y,z}^{\pm}\right)\Big|_{x=\pm L/2} = 0,$$

$$\left(\mathcal{H}^{\mathrm{ord}}_{y,z} + \mathcal{H}^{\mathrm{ext}}_{y,z} - \mathcal{H}^{\pm}_{y,z}\right)\Big|_{x=\pm L/2} = 0. \qquad (6.26)$$

Однак в даному випадку симетрія задачі дозволяє розділити всі власні моди в пластині на симетричні і антисиметричні (по дотичним до поверхні пластини компонентам $\mathcal{H}_y$ та $\mathcal{H}_z$ магнітного поля). Це означає, що оскільки і тангенціальні компоненти полів в пластині, і поле в діелектрику мають однакову парність, для симетричних мод $h^{+}_{y,z} = +h^{-}_{y,z}$, а для антисиметричних $h^{+}_{y,z} = -h^{-}_{y,z}$. Тоді для кожної з мод досить писати умови тільки на одній з границь, наприклад, при $x = +L/2$.

Умови (6.26) неперервності тангенціальних компонент полів можуть бути переписані у вигляді наступних дисперсійних співвідношень:

$$[\mathrm{tg}(\kappa_o\Lambda) - D_{\mathrm{ord}}][\mathrm{tg}(\kappa_e\Lambda) - D_{\mathrm{ext}}] = \kappa_y^2\kappa_z^2 D_0, \qquad (6.27)$$

для симетричних мод і

$$[\mathrm{ctg}(\kappa_o\Lambda) + D_{\mathrm{ord}}][\mathrm{ctg}(\kappa_e\Lambda) + D^{\mathrm{sym}}_{\mathrm{ext}}] = \kappa_y^2\kappa_z^2 D_0, \qquad (6.28)$$

для антисиметричних мод. Тут

$$D_{\mathrm{ord}} = \frac{\kappa_d^2\left[(\kappa_o^2+\kappa_y^2)^2 + \kappa_y^2\kappa_z^2\right] - \kappa_o^4\kappa_z^2}{(\varepsilon_d/\varepsilon_s)\Omega^2\kappa_d\kappa_o(\kappa_o^2+\kappa_y^2)}, \qquad (6.29)$$

$$D_{\mathrm{ext}} = \frac{\varepsilon_{ab}\kappa_e(\kappa_d^2-\kappa_y^2)}{\varepsilon_d\kappa_d(\kappa_o^2+\kappa_y^2)}, \qquad (6.30)$$

$$D_0 = \frac{\varepsilon_s\varepsilon_{ab}\kappa_e(\kappa_d^2+\kappa_o^2)^2}{\varepsilon_d^2\Omega^2\kappa_d^2\kappa_o(\kappa_o^2+\kappa_y^2)^2}, \qquad (6.31)$$

а також введена безрозмірна товщина пластини $\Lambda = L/2\lambda_c$. Ці співвідношення пов'язують нормовану частоту Ω з двома нормованими проекціями хвильового вектора κ_y та κ_z.

Бачимо, що дисперсійні співвідношення містять як $\mathrm{tg}\,\kappa_o\Lambda$, що відноситься до звичайної хвилі, так і $\operatorname{tg}\kappa_e\Lambda$, що відповідає надзвичайній хвилі. Це є проявом того, що, в загальному випадку довільного напрямку поширення локалізованої моди, в ній присутні обидві складові.

У разі симетричних мод умови (6.26) неперервності тангенціальних компонент полів дозволяють виразити параметри h_y^+, h_z^+, $h_{\rm sym}^{\rm ord}$ та $h_{\rm sym}^{\rm ext}$, що визначають поля в діелектрику і шаруватому надпровіднику, через єдиний параметр $h_{\rm sym}$:

$$\begin{aligned}
h_y^+ &= \frac{1}{\kappa_d}\big[h_{\rm sym}^{\rm ext}\kappa_e\cos(\kappa_e\Lambda) - h_{\rm sym}^{\rm ord}\kappa_y\kappa_z\cos(\kappa_o\Lambda)\big],\\
h_z^+ &= \frac{1}{\kappa_d}h_{\rm sym}^{\rm ord}(\kappa_o^2+\kappa_y^2)\cos(\kappa_o\Lambda),\\
h_{\rm sym}^{\rm ord} &= h_{\rm sym}\sqrt{[\operatorname{tg}(\kappa_e\Lambda) - D_{\rm ext}]/(\kappa_o^2+\kappa_y^2)}\cos(\kappa_e\Lambda),\\
h_{\rm sym}^{\rm ext} &= h_{\rm sym}\sqrt{(\kappa_o/\kappa_e)[\operatorname{tg}(\kappa_o\Lambda) - D_{\rm ord}]}\cos(\kappa_o\Lambda).
\end{aligned} \tag{6.32}$$

У разі непарних мод параметри h_y^+, h_z^+, $h_{\rm asym}^{\rm ord}$ та $h_{\rm asym}^{\rm ext}$ можуть бути виражені через єдиний параметр $h_{\rm asym}$ аналогічним чином, як в рівняннях (6.32), тільки з заміною $\cos$ на $\sin$, а tg на $(-\operatorname{ctg})$.

На рис. 6.7 показано поперечний розподіл поздовжнього магнітного поля $\overrightarrow{H}_t = (H_y, H_z)$ в симетричній локалізованій хвилі, яка поширюється під кутом до площини шарів, поблизу однієї з границь пластини шаруватого надпровідника.

Значення хвильового вектора і частоти обрані таким чином, щоб звичайна складова локалізованої моди затухала всередину пластини, а надзвичайна — осцилювала. У надзвичайній хвилі поле направлено перпендикулярно осі z, $H_z = 0$, див. рівняння (6.20) та (6.21), а в звичайній — майже перпендикулярно осі y, $|H_y| \ll |H_z|$, див. рівняння (6.17) та (6.18). Таким чином, поздовжні магнітні поля звичайної і надзвичайної хвиль становлять практично прямий кут одне з одним. У той же час поле суми цих хвиль, яке відповідає самій локалізованої хвилі, направлено під деяким ненульовим кутом до осей, щоб задовольнити умовам неперервності на границі.

Звернемо увагу на те, що права частина дисперсійного співвідношення містить множник $\kappa_y^2\kappa_z^2$ і, отже, вона може обертатися в нуль при виділених напрямках поширення: $\theta = 0$ та $\theta = \pi/2$. У цих випадках виявляється можливим відокремити звичайну і надзвичайну хвилі одну від одної. Іншими словами, при поширенні в зазначених напрямках, в пластині можуть поширюватися локалізовані моди, в яких дорівнює нулю або амплітуда звичайної хвилі, або амплітуда надзвичайної хвилі.

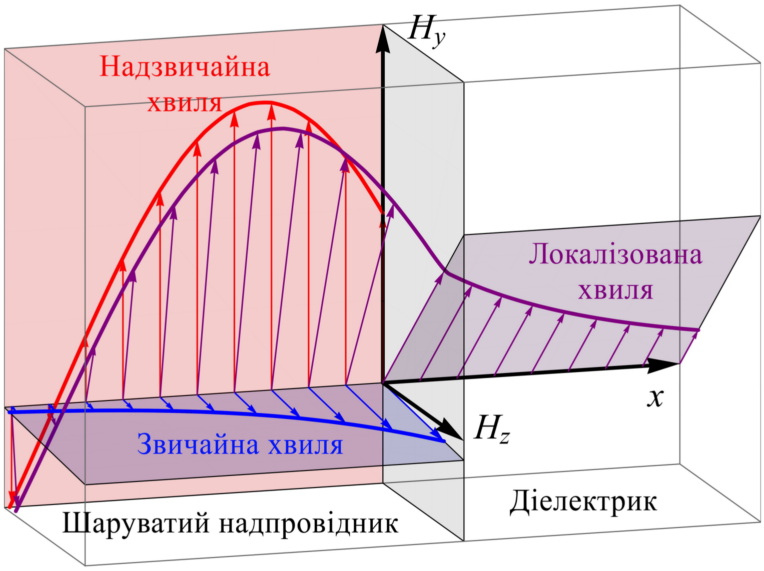

Рис. 6.7. Поперечний розподіл поздовжнього магнітного поля $\vec{H}_t = (H_y, H_z)$ в локалізованій хвилі поблизу границі шаруватого надпровідника та діелектрика і окремо в звичайній та надзвичайній хвилях. Параметри: $\Omega = \omega/\omega_J = 4$, $\theta = \mathrm{arctg}(k_y/k_z) = \pi/6$, $\kappa = \lambda_c(k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \approx 3{,}5$, $\varepsilon = \varepsilon_d/\varepsilon_s = 1/4$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$, $\Lambda = L/2\lambda_c = 3/4$.

У разі поширення локалізованих мод перпендикулярно шарам ($\theta = 0$) дисперсійні співвідношення 6.27 і 6.28 розщеплюються на пари:

$$\mathrm{tg}(\kappa_o\Lambda) + \frac{\kappa_o}{\kappa_d} = 0, \qquad \mathrm{tg}(\kappa_e\Lambda) - \frac{\varepsilon_c\kappa_d}{\varepsilon_d\kappa_e} = 0, \tag{6.33}$$

для симетричних і

$$\mathrm{ctg}(\kappa_o\Lambda) - \frac{\kappa_o}{\kappa_d} = 0, \qquad \mathrm{ctg}(\kappa_e\Lambda) + \frac{\varepsilon_c\kappa_d}{\varepsilon_d\kappa_e} = 0, \tag{6.34}$$

для антисиметричних (по дотичним до поверхні пластини компонентам $\mathcal{H}_y$ і $\mathcal{H}_z$ магнітного поля) локалізованих мод. Тут κ_o, κ_e та κ_d спрощуються, оскільки $\kappa_y = 0$:

$$\kappa_o = \sqrt{(\varepsilon_{ab}/\varepsilon_s)\Omega^2 - \kappa_z^2}, \qquad \kappa_e = \sqrt{\varepsilon_c(\Omega^2/\varepsilon_s - \kappa_z^2/\varepsilon_{ab})},$$
$$\kappa_d = \sqrt{\kappa_z^2 - (\varepsilon_d/\varepsilon_s)\Omega^2}. \tag{6.35}$$

У разі поширення локалізованих мод уздовж шарів ($\theta = \pi/2$), також відбувається розщеплення закону дисперсії:

$$\mathrm{tg}(\kappa_o\Lambda) - \frac{\varepsilon_{ab}\kappa_d}{\varepsilon_d\kappa_o} = 0, \qquad \mathrm{tg}(\kappa_e\Lambda) + \frac{\kappa_e}{\kappa_d} = 0, \tag{6.36}$$

для симетричних і

$$\mathrm{ctg}(\kappa_o\Lambda) + \frac{\varepsilon_{ab}\kappa_d}{\varepsilon_d\kappa_o} = 0, \qquad \mathrm{ctg}(\kappa_e\Lambda) - \frac{\kappa_e}{\kappa_d} = 0, \tag{6.37}$$

для антисиметричних локалізованих мод. Тут κ_o, κ_e та κ_d спрощуються, оскільки $\kappa_z = 0$:

$$\kappa_o = \sqrt{(\varepsilon_{ab}/\varepsilon_s)\Omega^2 - \kappa_y^2}, \qquad \kappa_e = \sqrt{(\varepsilon_c/\varepsilon_s)\Omega^2 - \kappa_y^2},$$
$$\kappa_d = \sqrt{\kappa_y^2 - (\varepsilon_d/\varepsilon_s)\Omega^2}. \tag{6.38}$$

Отже, ми бачимо, що крім двох виділених напрямків поширення, в загальному випадку локалізована мода містить як звичайну, так і надзвичайну складові. Перейдемо тепер до аналізу дисперсійних кривих при різних напрямках поширення мод.

6.1.2.3. Аналіз дисперсійних кривих

У розглянутій геометрії дисперсійні співвідношення (6.27) і (6.28) визначають нормовану частоту локалізованої моди Ω як функцію двох проекцій, κ_y та κ_z, нормованого хвильового вектора в площині пластини. Для більшої наочності ми будемо вивчати дисперсійні криві як функції частоти від однієї змінної при фіксованому значенні іншої.

Спочатку проаналізуємо дисперсійні криві, що представляють залежність частоти від модуля хвильового вектора при фіксованому значенні кута поширення. Такі криві цікаві з фундаментальної точки зору, але для реального експерименту може виявитися більш доречним досліджувати закон дисперсії, що описує залежність частоти від однієї з проекцій, κ_y або κ_z, хвильового вектора при фіксованому значенні іншої проекції. Наприклад, така ситуація виникає, якщо зразок шаруватого надпровідника, обмежений у двох напрямками, поміщений в планарний хвилевід, тобто між двома металевими стінками. В цьому випадку електромагнітне поле в поперечному до стінок напрямку є стоячою хвилею з фіксованим значенням відповідної проекції хвильового вектора. Такі дисперсійні криві вивчаються далі в цьому розділі.

Почнемо з залежності Ω від модуля $\kappa = (\kappa_y^2 + \kappa_z^2)^{1/2}$ хвильового вектора в площині пластини при фіксованому напрямку поширення локалізованої моди, який визначається кутом $\theta = \mathrm{arctg}(\kappa_y/\kappa_z)$. На рис. 6.8 представлені такі дисперсійні криві для кута $\theta = \pi/6$. Суцільні товсті криві на ньому відповідають симетричним (по дотичним до поверхні пластини компонентам $\mathcal{H}_y$ та $\mathcal{H}_z$ магнітного поля) локалізованим модам, а штрихові товсті криві — антисиметричним. Всі криві розташовані при $\kappa_d^2 > 0$, тобто нижче світловий лінії, яка визначається співвідношенням $\Omega = \kappa/\varepsilon^{1/2}$ і зображена на рис. 6.8 тонкою прямою. Тонкі суцільні криві на рис. 6.8 задані умовою $\kappa_e = 0$ і відокремлюють області, де величина κ_e^2 змінює знак. Знизу вгору ці криві відповідають умовам: $\Omega = \Omega_1(\kappa)$, $\Omega = \gamma$ та $\Omega = \Omega_2(\kappa)$, де

$$\Omega_1(\kappa) \approx \sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2\theta \cdot (1 - \kappa^2 \cos^2\theta/\gamma^2)},$$
$$\Omega_2(\kappa) \approx \sqrt{\gamma^2 + \kappa^2 \cos^2\theta \cdot (1 + \kappa^2 \sin^2\theta/\gamma^2)}. \tag{6.39}$$

В останніх рівностях знак $\approx$ позначає наближене значення при $\kappa \ll \gamma$. Тонка штрихова крива задана умовою $\kappa_o = 0$ і відокремлює області, де величина κ_o^2 змінює знак. Ця крива описується рівністю $\Omega = \Omega_3(\kappa)$, де

$$\Omega_3(\kappa) = \sqrt{\gamma^2 + \kappa^2}. \tag{6.40}$$

Частотна область, розташована при $\Omega < \Omega_1(\kappa)$, відповідає загасаючим вглиб пластини як звичайним, так і надзвичайним складовим локалізованої моди, оскільки там $\kappa_o^2 < 0$ та $\kappa_e^2 < 0$. Ділянки дисперсійних кривих, розташовані в цій області, позначені зеленим кольором на рис. 6.8. Звернемо увагу на те, що в цій області може бути розташовані тільки одна симетрична і одна антисиметрична криві, оскільки електромагнітне поле в пластини не осцилює поперек пластини. Крім того, криві, що починаються в цій області, можуть перетинати границю $\Omega = \Omega_1(\kappa)$.

У другій знизу області, розташованої при $\Omega_1(\kappa) < \Omega < \gamma$, звичайна складова локалізованої моди загасає поперек пластини, $\kappa_o^2 < 0$, а надзвичайна — осцилює, $\kappa_e^2 > 0$. Завдяки останній умові, в даній області є нескінченне сімейство кривих, кожна з яких відповідає певному числу осциляцій надзвичайної хвилі, що укладаються поперек пластини. Зі збільшенням кількості осциляцій дисперсійні криві наближаються до верхньої межі області $\Omega = \gamma$. Ділянки дисперсійних кривих у цій області позначені на рис. 6.8 червоним кольором.

Цікавою особливістю, яку мають криві в цій області, є їх аномальна дисперсія, тобто на цих ділянках $d\Omega/d\kappa < 0$. Деякі криві виявляються немонотонними. Зауважимо, що всі дисперсійні криві при $\Omega < \gamma$ діляться на два типи. Перші монотонно зростають, прямуючи до граничного значення Ω_{anom} при великих значеннях модуля κ хвильового вектора. Інші криві, розташовані вище цього значення, спочатку зростають, досягають максимуму, а потім зменшуються, прямуючи до цього ж граничного значення.

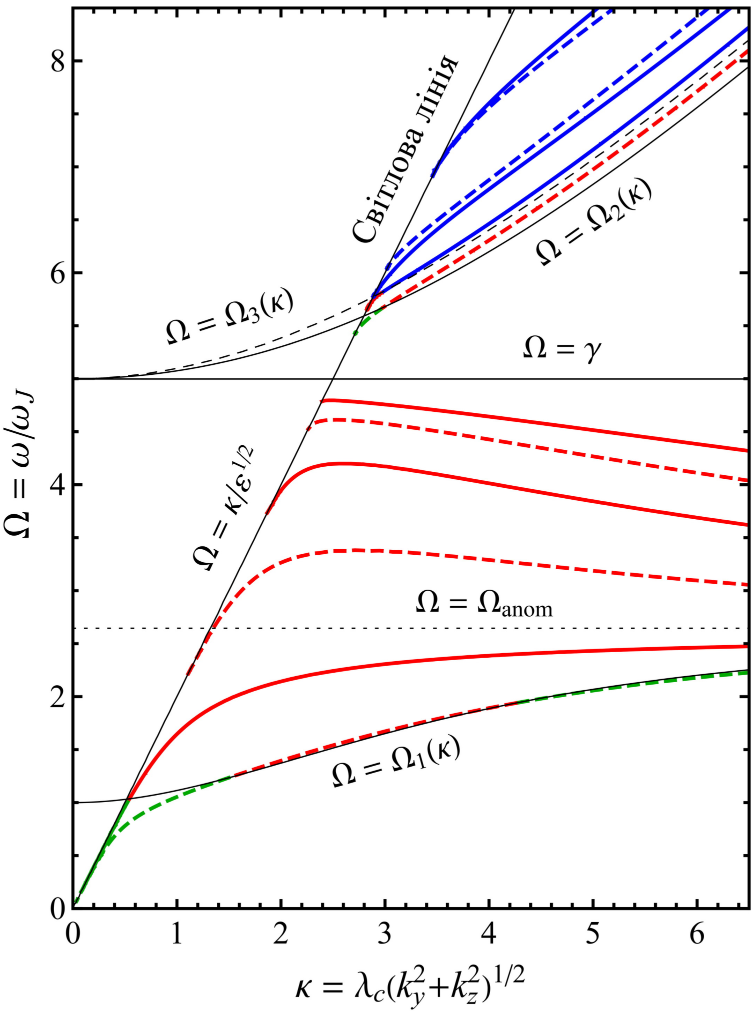

Рис. 6.8. Дисперсійні криві $\Omega(\kappa)$ для симетричних (суцільні лінії) і антисиметричних (штрихові лінії) мод в пластині шаруватого надпровідника при фіксованому куті поширення $\theta = \pi/6$. Параметри такі ж, як на рис. 6.7.

Таким чином, положення $\Omega_{\rm anom}$ відокремлює область, в якій дисперсійні криві містять ділянки з аномальною дисперсією. Для $\Omega_{\rm anom}$ справедливо наступне співвідношення:

$$\Omega_{\rm anom} = \sqrt{\gamma^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta}, \tag{6.41}$$

з якого видно, що зі збільшенням кута поширення θ значення $\Omega_{\rm anom}$ зростає, аж до

γ, при якому всі криві стають монотонними.

Звернемо увагу на те, що розглянуті дисперсійні криві, розташовані нижче границі $\Omega = \gamma$, не перетинають її. Дисперсійні криві, розташовані вище, при $\Omega > \gamma$, також не перетинають цю границю, і такі криві завжди монотонно зростають, розташовуючись в одній або декількох з наступних трьох частотних областей:

$$\gamma < \Omega < \Omega_2(\kappa), \quad \Omega_2(\kappa) < \Omega < \Omega_3(\kappa), \quad \Omega_3(\kappa) < \Omega. \tag{6.42}$$

У нижній області, при $\gamma < \Omega < \Omega_2(\kappa)$, звичайна і надзвичайна складові локалізованої моди загасають поперек пластини, оскільки $\kappa_o^2 < 0$ та $\kappa_e^2 < 0$. У цій області може бути не більш однієї симетричної і однієї антисиметричної дисперсійних кривих, як і показано на рис. 6.8 зеленим кольором. У відносно вузькій проміжній області, при $\Omega_2(\kappa) < \Omega < \Omega_3(\kappa)$, звичайна складова затухає поперек пластини, $\kappa_o^2 < 0$, а надзвичайна — осцилює, $\kappa_e^2 > 0$. У цій області може бути декілька дисперсійних кривих, але їх кількість обмежена розміром області, як показано на рис. 6.8 червоним кольором. І нарешті, в самій верхній області, при $\Omega > \Omega_3(\kappa)$, обидві складові, звичайна і надзвичайна, осцилюють, оскільки $\kappa_o^2 > 0$ і $\kappa_e^2 > 0$. В цій області розташовується нескінченна кількість кривих, кожна з яких відповідає певному числу осциляцій, що укладаються поперек пластини. Ділянки кривих, розташовані в цій областіі, зображені на рис. 6.8 синім кольором.

Звернемо увагу на те, що в загальному випадку дисперсійні криві, що відповідають симетричним і антисиметричним локалізованим модам, чергуються. Це ясно видно для кривих, розташованих при $\Omega < \gamma$. Однак можна бачити, що для кривих, розташованих при $\Omega > \gamma$, суворе чергування симетричних і антисиметричних мод порушується. Пов'язано це з важливою особливістю досліджуваної задачі, а саме, наявністю звичайної і надзвичайної складових в локалізованій хвилі. Наприклад, якщо ми розглядаємо поширення строго уздовж шарів, $\theta = 0$, то як говорилося вище, локалізовані моди розщеплюються на два типи: звичайні і надзвичайні моди. При деякому малому куті розповсюдження, $\theta \ll 1$, моди не розщеплюються, і у всіх модах присутні обидві складові. Проте як і раніше присутні два різних типи дисперсійних кривих, які приблизно відповідають окремим звичайним і надзвичайним модам для $\theta = 0$. Для обох типів кривих окремо зберігається чергування симетричних і антисиметричних мод. Однак для всіх дисперсійних кривих, розташованих при $\Omega > \gamma$, виникає ефект порушення чергування.

Дисперсійні криві, що представляють залежність $\Omega(\kappa_z)$ при фіксованому значенні κ_y, зображені на рис. 6.9. Як і на рис. 6.8 суцільні товсті криві відповідають симетричним локалізованим модам, а штрихові товсті криві — антисиметричним. Всі криві розташовані при $\kappa_d^2 > 0$, тобто нижче світлової лінії. При цьому на відміну від рис. 6.8 світлова лінія тепер не проходить через початок координат $\kappa_z = 0$, $\Omega = 0$ і являє собою не пряму, а криву, оскільки κ в співвідношенні $\Omega = \kappa/\varepsilon^{1/2}$ має вигляд $\kappa = (\kappa_y^2 + \kappa_z^2)^{1/2}$, де κ_z — змінна величина, а κ_y має фіксоване значення.

Подібно рис. 6.8, тонкі суцільні і штрихова криві на рис. 6.9 задані умовами $\kappa_e = 0$ і $\kappa_o = 0$, відповідно, і відокремлюють області, де відповідні величини κ_e^2 і κ_o^2 змінюють знак. Знизу вгору ці криві відповідають умовам: $\Omega = \Omega_1(\kappa_z)]$, $\Omega = \gamma$, $\Omega = \Omega_2(\kappa_z)$ і $\Omega = \Omega_3(\kappa_z)$, де визначення Ω_1, Ω_2 і Ω_3, відповідають (6.39), що переписані в термінах κ_y та κ_z:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\kappa_z) &\approx \sqrt{1 + \kappa_y^2(1 - \kappa_z^2/\gamma^2)}, \\ \Omega_2(\kappa_z) &\approx \sqrt{\gamma^2 + \kappa_z^2(1 + \kappa_y^2/\gamma^2)}, \\ \Omega_3(\kappa_z) &= \sqrt{\gamma^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

В останніх рівностях знак $\approx$ позначає наближене значення при $\kappa_{y,z} \ll \gamma$.

Майже всі міркування, що стосуються частотних областей, наведені вище, залишаються справедливими і в разі фіксованого κ_y. Звернемо увагу лише на ту відмінність, що всі дисперсійні криві при $\Omega < \gamma$ містять ділянки аномальної дисперсії. Це пов'язано з тим, що при досить великому значенні $\kappa_z \gg \kappa_y$ локалізовані моди поширюються майже перпендикулярно шарам, а при такому поширенні на дисперсійних кривих завжди містяться ділянки з аномальною дисперсією.

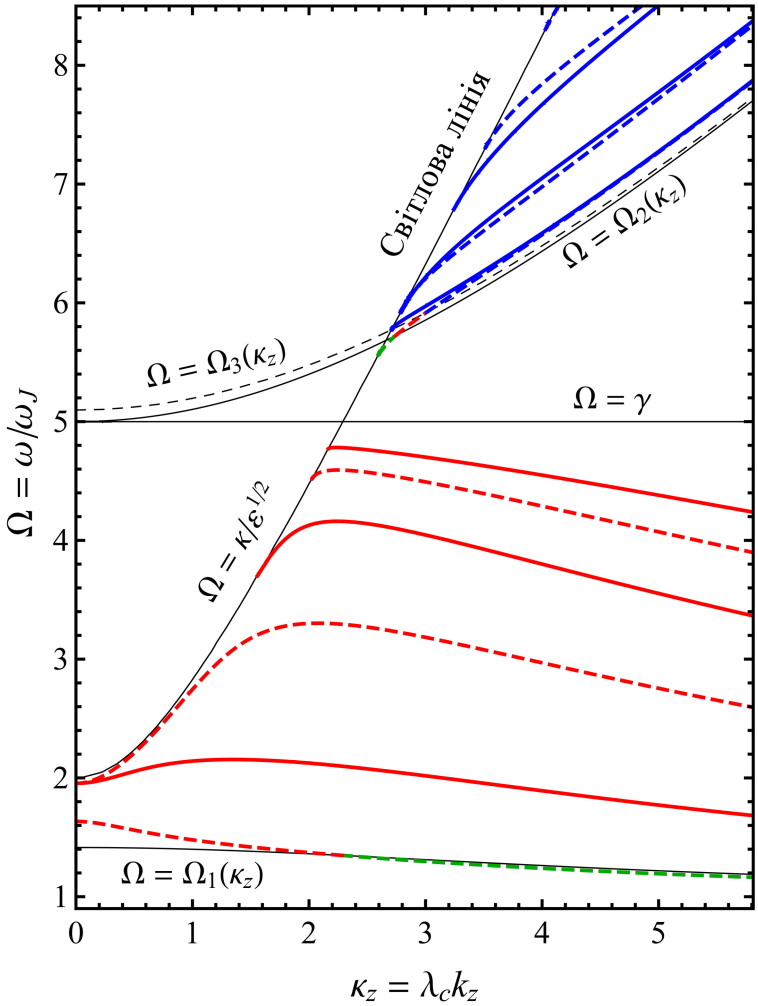

Рис. 6.9. Дисперсійні криві для симетричних (суцільні лінії) і антисиметричних (штрихові лінії) мод в пластині шаруватого надпровідника при фіксованій проекції хвильового вектора на напрямок уздовж шарів, $\kappa_y = 1$. Параметри такі ж, як на рис. 6.8.

Дисперсійні криві, що представляють залежність $\Omega(\kappa_y)$ при фіксованому значенні κ_z, зображені на рис. 6.10. Як і на рис. 6.8 і 6.9, суцільні товсті криві відповідають симетричним локалізованим модам, а штрихові товсті криві — антисиметричним. Всі криві так само розташовані нижче світлової лінії, $\Omega = (\kappa_y^2 + \kappa_z^2)^{1/2}/\varepsilon^{1/2}$, де κ_y — змінна величина, а κ_z має фіксоване значення.

Так само, як і на рис. 6.8 та 6.9, тонкі суцільні і штрихові криві на

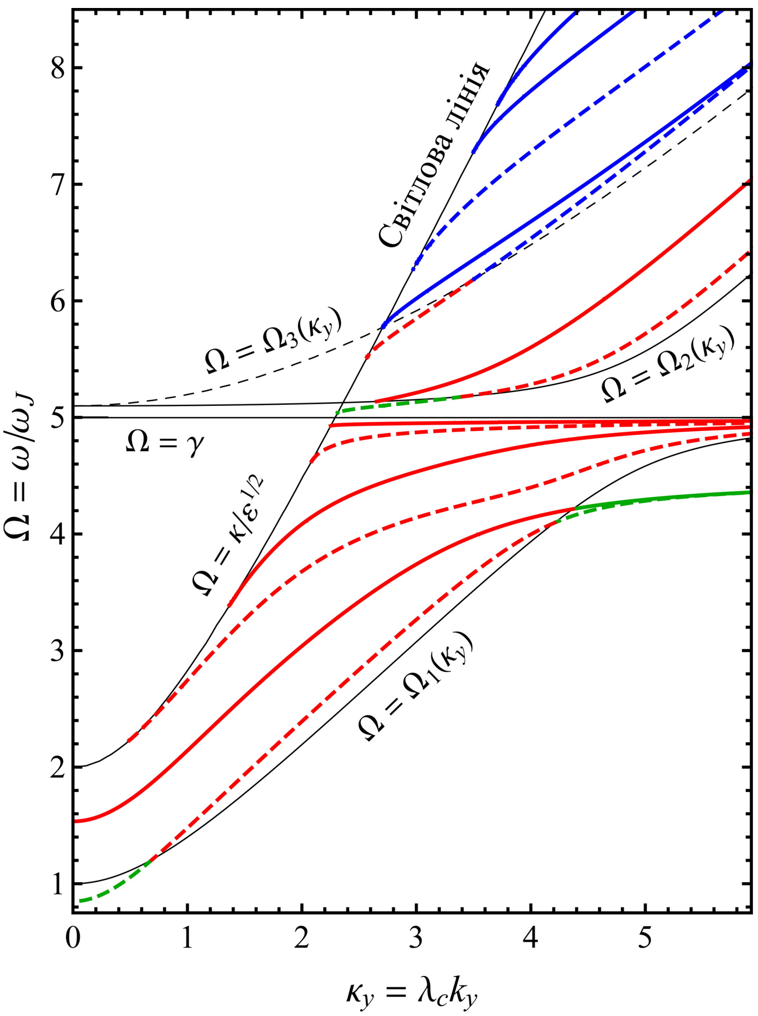

Рис. 6.10. Дисперсійні криві для симетричних (суцільні лінії) і антисиметричних (штрихові лінії) мод в пластині шаруватого надпровідника при фіксованій проекції хвильового вектора на напрямок уздовж шарів, $\kappa_z = 1$. Параметри такі ж, як на рис. 6.8.

рис. 6.10 задані умовами $\kappa_e = 0$ та $\kappa_o = 0$, відповідно, і відокремлюють області, де відповідні величини κ_e^2 і κ_o^2 змінюють знак. Знизу вгору ці криві відповідають рівністям: $\Omega = \Omega_1(\kappa_y)$, $\Omega = \gamma$, $\Omega = \Omega_2(\kappa_y)$ і $\Omega = \Omega_3(\kappa_y)$, де визначення Ω_1, Ω_2 і Ω_3 представлені рівняннями (6.43), які тепер треба розглядати як функції κ_y при фіксованому κ_z.

Майже всі міркування, що стосуються частотних областей, наведені вище, зберігаються і в разі фіксованого κ_z. Звернемо увагу лише на ту відміну, що всі дисперсійні криві виявляються монотонними. Це пов’язано з тим, що при збільшенні κ_y напрямок розповсюдження наближається до $\theta = \pi/2$, при якому відсутня аномальна дисперсія.

6.2. Резонансне поглинання терагерцових хвиль у шаруватих надпровідниках

У цьому підрозділі теоретично вивчено резонансне поглинання монохроматичних електромагнітних хвиль у пластині шаруватого надпровідника, що виникає внаслідок збудження локалізованих мод, описаних у попередньому підрозділі. Посилене поглинання світла було виявлено Вудом у 1902 р. під час спостереження за дифракцією світла на оптичній металевій гратці. Це явище, що отримало назву аномалій Вуда, було інтерпретоване Фано в 1941 р. через збудження поверхневих хвиль та інтенсивно досліджено [351], у 1960-70-ті роки. Послідовні дослідження аномалій Вуда охоплюють широкий спектр геометрій та матеріалів (див., наприклад, посилання [352] та посилання у ньому). В цьому підрозділі увага приділяється специфічній особливості цього явища, що виникає в результаті аномальної дисперсії хвиль, локалізованих в шаруватих надпровідниках.

У роботі [352] повідомляється про подвійний пік частотної залежності поглинання, що нагадує дві близькі криві Лоренца. Цей подвійний пік виникає внаслідок збудження двох локалізованих хвиль, що відповідають симетричному та антисиметричному збудженню з близькими частотами. У цьому підрозділі аналізується подвійна пікова структура залежності поглинання *від кута падіння для даної частоти*. Ця структура виникає внаслідок немонотонності дисперсійних кривих.

Слід підкреслити, що навіть невелике загасання може забезпечити загальне поглинання в пластині, оскільки резонансна амплітуда локалізованої хвилі виявляється значно вищою, ніж амплітуда падаючої хвилі. Ми формулюємо умову повного поглинання, яка поєднує в собі управляючі параметри задачі, такі як кут падіння θ, частота хвилі ω та товщина просторових проміжків.

6.2.1. Електромагнітне поле у системі

Ми розглядаємо пластину c шаруватого надпровідника (див. рис. 6.11), що складається із надпровідних та діелектричних шарів, перпендикулярних до її границь. Пластина затиснута між двома діелектричними напівнескінченними середовищами, a_R і a_L, з діелектричною проникністю ε_a. Діелектрики a_R і a_L відокремлені від пластини c просторовими зазорами, b_R і b_L, заповненими діелектриком проникності ε_b, див. рис. 6.11. Прямокутна правобічна декартова система координат вибирається таким чином: вісь x перпендикулярна до всіх поверхонь, вісь z перпендикулярна до шарів пластини.

Розглядається поширення монохроматичної плоскої електромагнітної хвилі через установку, звертаючи увагу на збудженні хвилеводних/поверхневих мод, локалізованих в пластині c. Такі локалізовані моди не є поверхневими хвилями, оскільки це об'ємні хвилі всередині пластини.

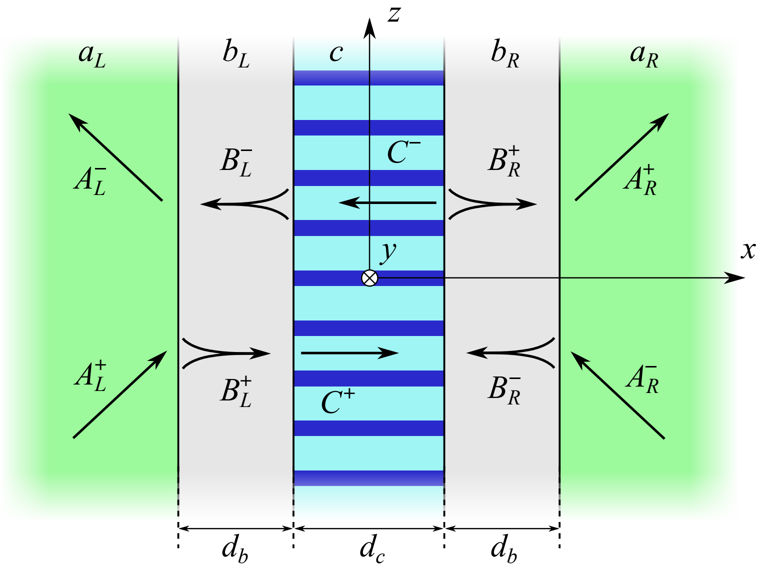

Рис. 6.11. Геометрія задачі про проходження терагерцевого випромінення крізь пластину шаруватого надпровідника та система координат.

Вважатимемо, що хвилі мають ТМ-поляризацію, яка відповідає

$$\vec{E}(x,z,t) = \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp\left(-i\omega t + ik_z z\right),$$
$$\vec{H}(x,z,t) = \{0, H_y(x), 0\} \exp\left(-i\omega t + ik_z z\right). \tag{6.44}$$

Саме для такої поляризації резонансне явище аномалій Вуда набуває особливих рис завдяки аномальній дисперсії локалізованих плазмових джозефсонівських хвиль. Тут ω — частота хвилі, а k_z — проекція хвильового вектора.

Щоб забезпечити можливість локалізованого хвильового збудження, діелектрики вважаються оптично щільнішими, ніж зазори, тобто

$$\varepsilon_b < \varepsilon_a. \tag{6.45}$$

За цим припущенням електромагнітна хвиля, що поширюється в діелектрику a, може зникнути в просторових проміжках b. Останнє відбувається, коли кут θ задовольняє умові

$$\theta = \arcsin(k_z/k_0\sqrt{\varepsilon_a}), \qquad k_0 = \omega/c, \tag{6.46}$$

тобто кут падіння з середовища a на границю $(a|b)$ виявляється більшим за кут θ_b повного внутрішнього відбиття,

$$\theta_b < \theta < \pi/2. \tag{6.47}$$

Очевидно, граничний кут падіння θ_b визначається як

$$\theta_b = \arcsin\sqrt{\varepsilon_b/\varepsilon_a}. \tag{6.48}$$

Оскільки електромагнітне випромінення загасає в просторових зазорах b через умову (6.47), повне внутрішнє відбиття слід спостерігати на границях $(a_L|b_L)$ і $(a_R|b_R)$. Однак навіть при такому падінні хвилі резонансне збудження мод, локалізованих в пластині шаруватого надпровідника, може спричинити придушення дзеркального відбиття (аномалії Вуда), що має незвичні спектральні властивості.

У межах необхідного діапазону (6.47), проекція на x хвильового вектора k_a в діелектрику a очевидно реальна, тоді як проекція на x хвильового вектора k_b в просторових зазорах b виявляється уявною,

$$k_a = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_a - k_z^2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_a} \cos\theta,$$
$$k_b = i\kappa_b, \qquad \kappa_b = \sqrt{k_z^2 - k_0^2 \varepsilon_b} = k_0 \sqrt{\varepsilon_a} \sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_b}\,. \tag{6.49}$$

Електромагнітне поле всередині пластини шаруватого надпровідника визначається калібровано-інваріантною різницею фаз параметра порядку між сусідніми надпровідними шарами, що підпорядковується множині зв'язаних рівнянь синусоїд Гордона, як було показано у пункті 1.3.2.

Ефективне хвильове число k_c у шаруватому надпровіднику, відповідальному за поширення ТМ-поляризованої хвилі (6.44) через пластину c вздовж осі x, має вигляд:

$$k_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{xx} - k_z^2} = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \varepsilon_a} \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_a} - \sin^2\theta}. \tag{6.50}$$

Слід підкреслити, що навіть за відсутності дисипації $\nu_{x,z} = 0$, хвильове число k_c може мати дійсне або уявне значення в залежності від частоти хвилі ω. На низьких частотах, $\omega < \omega_J \ll \gamma\omega_J$, абсолютне значення k_c зростає із кутом падіння θ і k_c уявно. У межах проміжного частотного діапазону, $\omega_J < \omega < \gamma\omega_J$, шаруватий надпровідник представляє так зване гіперболічне середовище з різними знаками компонентів тензора діелектричної проникності, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} < 0$ і $\varepsilon_{zz} > 0$. Отже, k_c дійсне і збільшується з кутом θ. Більше того, нетривіальна залежність k_c від θ забезпечує аномальну дисперсію локалізованих мод. Діапазон високих частот, $\omega_J \ll \gamma\omega_J < \omega$, навряд чи досягається через руйнування куперівських пар.

Коли дисипацію враховано, $\nu_{x,z} \neq 0$, хвильове число k_c приймає комплексні значення, що означає поглинання енергії хвилі всередині пластини шаруватого надпровідника. Далеко від резонансних умов, слабка дисипація, відповідно до нерівностей (6.3), призводить лише до невеликого ненульового поглинання, $A \ll 1$. Однак збудження локалізованих мод із комплексним хвильовим числом k_c породжує аномалії Вуда, тобто значне збільшення поглинання до $A = 1$. Далі за допомогою методу трансфер-матриць ми вивчаємо це явище.

6.2.2. Локалізовані моди у системі

Для всіх просторових областей, a, b, і c (див. рис. 6.11) магнітне поле $H_y(x)$ ТМ-поляризованої хвилі отримується з одновимірного рівняння Гельмгольца з квадратами хвильових чисел k_a^2, k_b^2, і k_c^2, відповідно. Загальні розв'язки цього рівняння можна відповідним чином представити у вигляді двох плоских хвиль, що рухаються в протилежних напрямках (див., наприклад, посилання [353]). Замінивши розв'язки в граничних умовах на відповідних границях, можна дійти до матричного відношення, що описує проходження хвилі через систему в цілому,

$$\begin{pmatrix} A_R^+ \\ A_R^- \end{pmatrix} = \hat{M}^{(T)} \begin{pmatrix} A_L^+ \\ A_L^- \end{pmatrix}. \tag{6.51}$$

Тут A_L^+ і A_L^- — це відповідно амплітуди хвиль, що падають зліва і відбиваються ліворуч, тоді як A_R^- і A_R^+ — амплітуди хвиль, що падають праворуч і відбиваються праворуч, див. рис. 6.11.

Відповідно до загальноприйнятої техніки [354], загальна трансфер-матриця $\hat{M}^{(T)}$ може бути побудована шляхом послідовного множення трансфер-матриць, пов'язаних з кожним з елементів системи,

$$\hat{M}^{(T)} = \hat{M}^{(ab)^{-1}} \hat{M}^{(b)} \hat{\mathcal{D}} \hat{M}^{(b)} \hat{M}^{(ab)}, \tag{6.52}$$

$$\hat{\mathcal{D}} = \hat{M}^{(bc)^{-1}} \hat{M}^{(c)} \hat{M}^{(bc)}. \tag{6.53}$$

Матриці $\hat{M}^{(ab)}$ і $\hat{M}^{(b)}$ описують проходження хвилі через границю $(a_L|b_L)$ та вільне поширення хвилі через просторовий зазор b, відповідно,

$$\hat{M}^{(ab)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a} & 1-\dfrac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a} \\ & \\ 1-\dfrac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a} & 1+\dfrac{k_a\varepsilon_b}{k_b\varepsilon_a} \end{pmatrix}, \tag{6.54}$$

$$\hat{M}^{(b)} = \begin{pmatrix} \exp(i\varphi_b) & 0 \\ & \\ 0 & \exp(-i\varphi_b) \end{pmatrix}. \tag{6.55}$$

Тут ми ввели фазовий зсув φ_b,

$$\varphi_b = k_b d_b = i\phi_b, \qquad \phi_b = \kappa_b d_b, \tag{6.56}$$

що зазнає електромагнітна хвиля, коли вона проходить просторові зазори, b_L або b_R, товщиною d_b.

Матриця $\hat{M}^{(bc)}$, що описує проходження хвилі через границю $(b_L|c)$, має структуру, подібну структурі $\hat{M}^{(ab)}$, і їх можна легко отримати з рівняння (6.54), замінивши $k_a\varepsilon_b \to k_b\varepsilon_{zz}$ і $k_b\varepsilon_a \to k_c\varepsilon_b$. Матриця $\hat{M}^{(c)}$ відповідає вільному поширенню хвилі всередині пластини товщиною d_c. Тому вона відрізняється від матриці $\hat{M}^{(b)}$ лише хвильовим фазовим зсувом,

$$\varphi_c = k_c d_c. \tag{6.57}$$

Матриці $\hat{M}^{(ab)^{-1}} = \hat{M}^{(ba)}$ і $\hat{M}^{(bc)^{-1}} = \hat{M}^{(cb)}$ описують проходження хвилі через границі $(b_R|a_R)$ і $(c|b_R)$. Їх явні вирази випливають із виразів для $\hat{M}^{(ab)}$ і $\hat{M}^{(bc)}$ із заміною індексів $a \leftrightarrow b$ і $b \leftrightarrow c$, відповідно.

Пряме множення відповідних матриць, що входять у (6.52) та (6.53), дає шукані елементи для загальної трансфер матриці $\hat{M}^{(T)}$,

$$2M_{11}^{(T)} = \big(\mathcal{D}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} + \mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big) - i\beta_+\big(\mathcal{D}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} - \mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big) + 2i\beta_-\mathcal{D}_{12}\,, \tag{6.58}$$

$$2M_{12}^{(T)} = -2i\beta_+\mathcal{D}_{12} + i\beta_-\big(\mathcal{D}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} - \mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big)\,, \tag{6.59}$$

$$2M_{21}^{(T)} = 2i\beta_+\mathcal{D}_{12} - i\beta_-\big(\mathcal{D}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} - \mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big)\,, \tag{6.60}$$

$$2M_{22}^{(T)} = \big(\mathcal{D}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} + \mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big) + i\beta_+\big(\mathcal{D}_{11}\mathrm{e}^{-2\phi_b} - \mathcal{D}_{22}\mathrm{e}^{2\phi_b}\big) - 2i\beta_-\mathcal{D}_{12}\,; \tag{6.61}$$

а також для матриці $\hat{\mathcal{D}}$, що відповідає поширенню хвилі через пластину c шаруватого надпровідника,

$$\mathcal{D}_{11} = \cos\varphi_c - \alpha_+\sin\varphi_c\,, \tag{6.62}$$

$$\mathcal{D}_{12} = \alpha_-\sin\varphi_c\,,$$

$$\mathcal{D}_{21} = -\alpha_-\sin\varphi_c\,,$$

$$\mathcal{D}_{22} = \cos\varphi_c + \alpha_+\sin\varphi_c\,. \tag{6.63}$$

Тут коефіцієнти $\alpha_\pm$ і $\beta_\pm$, що визначають відповідний зв'язок пластини c та діелектрика a з просторовим зазором b, визначаються співвідношеннями

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_b\varepsilon_{zz}}{k_c\varepsilon_b} \mp \frac{k_c\varepsilon_b}{\kappa_b\varepsilon_{zz}}\right), \tag{6.64}$$

$$\beta_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{k_a\varepsilon_b}{\kappa_b\varepsilon_a} \mp \frac{\kappa_b\varepsilon_a}{k_a\varepsilon_b}\right). \tag{6.65}$$

Слід зазначити, що множники $\alpha_\pm$ приймають комплексні значення через дисипацію в пластині шаруватого надпровідника. Навпаки, множники $\beta_\pm$ мають реальні значення і не залежать від частоти хвилі ω, вони визначаються кутом падіння θ та характерним кутом θ_b,

$$\beta_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta_b\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_b}} \mp \frac{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_b}}{\sin^2\theta_b\cos\theta}\right). \tag{6.66}$$

Відповідно до припущення про слабку дисипацію (6.3), матрицю передачі $\hat{\mathcal{D}}$ можна розкласти до лінійного порядку за безрозмірними частотами релаксації ν_x

та ν_z,

$$\hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}^{(0)} - i\hat{\mathcal{D}}^{(1)}. \tag{6.67}$$

Хоча дійсна матриця $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$ визначає поширення хвилі через пластину шаруватого надпровідника без розсіювання, рівняння (6.63) з $\nu_{x,z} = 0$, реальна матриця $\hat{\mathcal{D}}^{(1)}$ містить відповідні поправки. Її елементи визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{(1)}_{11} &= \Gamma_+\varphi_c\left(\sin\varphi_c + \alpha_+\cos\varphi_c\right) - \Gamma_-\alpha_-\sin\varphi_c\,,\\
\mathcal{D}^{(1)}_{12} &= -\Gamma_+ + \Gamma_-\alpha_+\sin\varphi_c\,,\\
\mathcal{D}^{(1)}_{21} &= \Gamma_+ - \Gamma_-\alpha_+\sin\varphi_c\,,\\
\mathcal{D}^{(1)}_{22} &= \Gamma_+\varphi_c\left(\sin\varphi_c - \alpha_+\cos\varphi_c\right) + \Gamma_-\alpha_-\sin\varphi_c\,.
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Тут коефіцієнти $\alpha_\pm$ і зсув фази φ_c обчислюються без дисипації, тоді як параметри $\Gamma_\pm = \Gamma_x \pm \Gamma_z$ пропорційні частотам релаксації,

$$\begin{aligned}
\Gamma_x &= \nu_x\frac{\Omega}{2\left(1-\Omega^2/\gamma^2\right)}\left[1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_a\sin^2\theta}\left(\frac{\gamma}{\Omega}\right)^2\right]^{-1},\\
\Gamma_z &= \nu_z\frac{\Omega}{2\left(\Omega^2-1\right)}.
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Важливо підкреслити, що через умову (6.3), параметри Γ_x і Γ_z виявляються малими, коли частота хвилі ω не є близькою як до ω_J, $|\Omega - 1| \gtrsim 1$, так і до частоти $\gamma\omega_J$, $\Omega \lesssim \gamma^{2/3} \ll \gamma$. Цей факт дозволяє нам вважати елементи матриці $\hat{\mathcal{D}}^{(1)}$ набагато меншими, ніж елементи $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$.

Основною причиною поглинання в пластині шаруватого надпровідника є резонансне збудження локалізованих електромагнітних мод. З загальної точки зору (див., наприклад, книгу [354]), такі збудження належать до сімейства власних мод, що існують у системах, які складаються з пластини, що знаходиться в нескінченному середовищі b м'якшої оптичної густини.

Дисперсійне відношення для локалізованих мод можна сформулювати через трансфер матрицю $\hat{\mathcal{D}}$,

$$\mathcal{D}_{22}^{(0)} = 0. \tag{6.70}$$

Як було описано у цьому розділі, дисперсія хвиль, локалізованих на пластині шаруватого надпровідника, може бути аномальною, тобто фазова швидкість ω/k_z і групова швидкість $d\omega/dk_z$ може мати різні знаки.

Таким чином, дисперсійні криві $\omega(k_z)$ можуть бути немонотонними. Ця особливість добре видна на рис. 6.12 і застосовується далі.

6.2.3. Коефіцієнт поглинання пластини

Розглянемо двостороннє збудження двома падаючими монохроматичними хвилями, які відрізняються виключно постійним зсувом фаз φ_0. Це означає, що безрозмірні амплітуди вхідних хвиль у лівому та правому діелектричних просторах a можна вибрати як $A_L^+ = 1$ та $A_R^- = \mathrm{e}^{i\varphi_0}$, відповідно (див. рис. 6.11). Тоді амплітуди відбиття на лівій та правій границях, $(a_L|b_L)$ та $(b_R|a_R)$, можна позначити як $A_L^- = r_L$ та $A_R^+ = r_R$.

З точки зору загального співвідношення (6.51), ці амплітуди визначаються так:

$$r_L = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi_0} + M_{12}^{(T)}}{M_{22}^{(T)}}, \qquad r_R = \frac{1 + M_{12}^{(T)}\mathrm{e}^{i\varphi_0}}{M_{22}^{(T)}}\,. \tag{6.71}$$

Тут, згідно визначенню (6.58)–(6.61), ми використали $M_{21}^{(T)} = -M_{12}^{(T)}$ та $\det \hat{M}^{(T)} = 1$.

Можна показати, що лівий і правий коефіцієнти відбиття однакові,

$$R = \left|r_L\right|^2 = \left|r_R\right|^2 = \frac{\left|1 \pm M_{12}^{(T)}\right|^2}{\left|M_{22}^{(T)}\right|^2}, \tag{6.72}$$

для симетричного ($\varphi_0 = 0$) або антисиметричного ($\varphi_0 = \pi$) збудження відносно магнітного поля. Далі верхні та нижні знаки пов'язані з симетричними та антисиметричними збудженнями.

Відповідне поглинання визначається як

$$A \equiv 1 - R = 1 - \frac{\left|1 \pm M_{12}^{(T)}\right|^2}{\left|M_{22}^{(T)}\right|^2}. \tag{6.73}$$

6.2.3.1. Умови резонансного поглинання

Тепер ми зосередимося на виразах (6.72, 6.73). Повне поглинання хвилі ($A = 1$), і тому зникнення відбиття ($R = 0$), досягаються за умови

$$\left|1 \pm M_{12}^{(T)}\right| = 0\,. \tag{6.74}$$

Оскільки матричний елемент $M_{12}^{(T)}$ має комплексне значення, див. рівняння (6.59) і (6.67), вимога (6.74) означає одночасне задоволення двох дійсних умов

$$\mathrm{Im} M_{12}^{(T)} = 0, \qquad 1 \pm \mathrm{Re} M_{12}^{(T)} = 0. \tag{6.75}$$

Як показано нижче, резонансне поглинання супроводжується збудженням мод, локалізованих на пластині c шаруватого надпровідника. Останнє найбільш виражене для досить великих значень фазового зсуву, ϕ_b (6.56), (6.49), тобто коли просторові зазори b досить товсті,

$$\exp(-2\phi_b) \ll 1. \tag{6.76}$$

Тоді, нехтуючи малим доданком з $\exp(-2\phi_b)$, ми можемо наблизити точний вираз (6.59) для матричного елемента $M_{12}^{(T)}$ до його асимптотики

$$2M_{12}^{(T)} = -i\beta_{-}\mathcal{D}_{22}\exp(2\phi_b) - 2i\beta_{+}\mathcal{D}_{12}. \tag{6.77}$$

Така заміна зводить співвідношення (6.75) до форми

$$\rho(\theta, \Omega) = 0, \tag{6.78а}$$

$$\chi_{\pm}(\theta, \Omega) = 0, \tag{6.78б}$$

з дійсними спектральними функціями, $\rho(\theta, \Omega)$ і $\chi_{\pm}(\theta, \Omega)$, визначеними як

$$\rho \equiv -\mathrm{Im} M_{12}^{(T)} = \frac{\beta_{-}}{2}\mathcal{D}_{22}^{(0)}\exp(2\phi_b) + \beta_{+}\mathcal{D}_{12}^{(0)}, \tag{6.79}$$

$$\chi_{\pm} \equiv 1 \pm \mathrm{Re} M_{12}^{(T)} = 1 \mp \left[\frac{\beta_{-}}{2}\mathcal{D}_{22}^{(1)}\exp(2\phi_b) + \beta_{+}\mathcal{D}_{12}^{(1)}\right]. \tag{6.80}$$

Умова (6.78а) показує, що загальне поглинання походить від резонансного збудження локалізованих мод. Дійсно, переписане в явній формі,

$$\mathcal{D}_{22}^{(0)} = -2\beta_{+}\beta_{-}^{-1}\mathcal{D}_{12}^{(0)}\exp(-2\phi_b), \tag{6.81}$$

це рівняння є узагальненням дисперсійного відношення $\mathcal{D}_{22}^{(0)} = 0$ для хвильових мод, локалізованих на пластині c. Хоча звичайне дисперсійне співвідношення (6.70) є достатнім для випадку нескінченно товстих просторових зазорів b, $d_b \to \infty$, в реальній установці товщина d_b змінює дисперсійне відношення до форми (6.81). Внаслідок припущення (6.76), обидві версії дисперсійного співвідношення виявляються експоненціально близькими одна до одної. Останнє продемонстровано на головній панелі рис. 6.12, де набір спектральних кривих $\Omega = \Omega_n(\theta)$ збурений скінченним d_b, тобто розв'язок рівняння (6.81), зображений суцільними лініями, порівнюється з набором відповідних не збурених спектральних кривих, отриманих з рівняння (6.70) і нанесених штриховими лініями. Ціле число $n = 1, 2, 3, \dots$ перераховує спектральні криві знизу вгору. Відмітимо, що при дослідженні структури локалізованих мод виявляється, що моди з парними індексами $n = 2, 4, \dots$ є симетричними, тоді як непарні індекси $n = 1, 3, \dots$ відповідають антисиметричним локалізованим модам.

На відміну від першої резонансної умови (6.78а), друга, рівняння (6.78б), по суті визначається слабким розсіюванням хвилі всередині пластини шаруватого надпровідника. Отже, спектральну функцію $\chi_{\pm}(\theta, \Omega)$ можна правильно назвати дисипативною спектральною функцією. Варто зазначити, що доданком $\beta_{+}\mathcal{D}_{12}^{(1)}$ в рівнянні (6.80) слід нехтувати в межах лінійного наближення для частот релаксації ν_x і ν_z. Отже, друга резонансна умова (6.78б) виконується взаємною компенсацією великого експоненціального коефіцієнта $\exp(2\phi_b)$ та малих параметрів дисипації $\Gamma_{\pm}$, що містяться в дисипативному матричному елементі $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$, див. рівняння (6.68) та (6.69). Іншими словами, невелике ослаблення забезпечує загальне поглинання в пластині завдяки сильному резонансному посиленню локалізованої хвилі.

На вставці рис. 6.12 показані спектральні криві $\Omega = \Omega_n(\theta)$, визначені дисперсійним співвідношенням (6.78а) та дисипативними спектральними кривими $\Omega = \Omega_{n\pm}(\theta)$, що визначаються умовою (6.78б). Вони нанесені товстими суцільними та пунктирними лініями відповідно. Слід підкреслити, що нулі $\Omega = \Omega_{n\pm}(\theta)$ дисипативної спектральної функції $\chi_{\pm}(\theta, \Omega)$ з парними індексами $n = 2, 4, \dots$ з'являються лише при симетричному збудженні ($\chi_{+}(\theta, \Omega) = 0$), тоді як дисипативні спектри $\Omega = \Omega_{n\pm}(\theta)$ з непарними індексами $n = 1, 3, \dots$ виникають виключно для антисиметричного збудження ($\chi_{-}(\theta, \Omega) = 0$). Очевидно, що спектральні криві $\Omega = \Omega_n(\theta)$ і $\Omega = \Omega_{n\pm}(\theta)$ можуть перетинатися лише при однаковій симетрії, тобто з тим же індексом n.

Кола позначають точки перетину $(\theta_{\text{tot}}, \Omega_{\text{tot}})$ кривих, де обидві умови (6.78) виконуються одночасно,

$$\Omega_{\text{tot}} = \Omega_n(\theta_{\text{tot}}), \qquad \Omega_{\text{tot}} = \Omega_{n\pm}(\theta_{\text{tot}}). \tag{6.82}$$

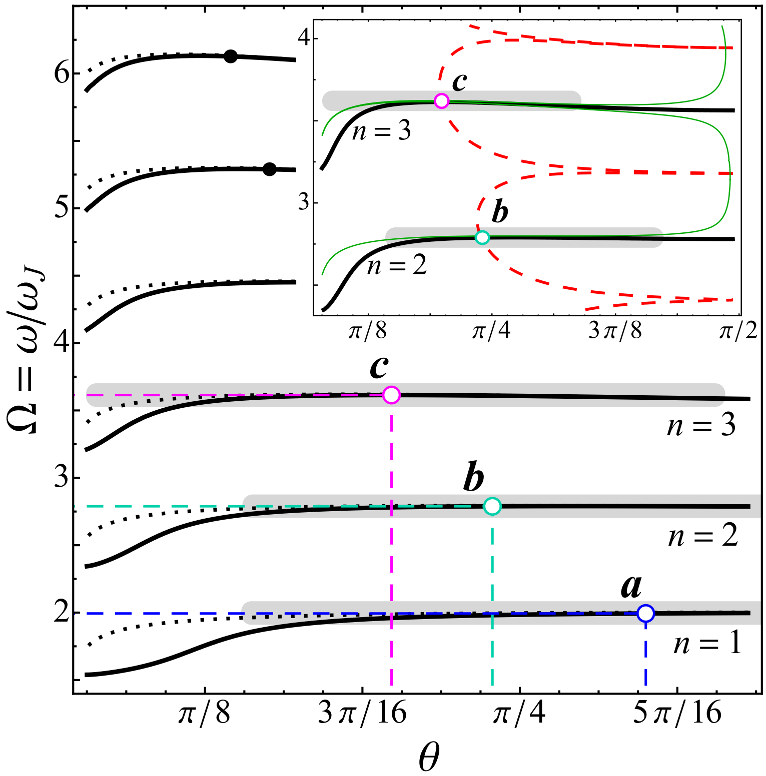

Рис. 6.12. Спектральні криві (6.70), уточнені криві (6.81) (основна панель) і спектральні криві, що відповідають $\rho = 0$ і $\chi_{\pm} = 0$ в співвідношенні (6.78) (вставка). Параметри: $\varepsilon_a = 20$, $\varepsilon_b = 1$, $\varepsilon_c = 15$, $\gamma = 15$, $\nu_x = 10^{-3}$, $\nu_z = 10^{-3}$, $d_c = 3{,}5\lambda_c$, $d_b = 0{,}747\lambda_c$.

У таких точках відбувається загальне поглинання, $A = 1$. Мітки ***a***, ***b*** і ***c*** кіл відповідають рисункам 6.13, 6.14 і 6.15.

Власне, співвідношення (6.78) представляють собою набір двох рівнянь відносно трьох зовнішніх параметрів: нормована частота хвилі Ω, кут падіння хвилі θ і товщина зазору d_b. Отже, положення $(\theta_{\mathrm{tot}}, \Omega_{\mathrm{tot}})$ точок перетину, де відбувається загальне поглинання, контролюється параметром d_b.

Цікаво, що, виключаючи множник $\exp(2\phi_b)$, замість другого рівняння (6.78б), можна використовувати інше,

$$\mathcal{D}_{22}^{(0)} = \mp\beta_+ \mathcal{D}_{12}^{(0)} \mathcal{D}_{22}^{(1)}. \tag{6.83}$$

Як і рівняння (6.81), це співвідношення сформульовано для того самого елемента матриці $\mathcal{D}_{22}^{(0)}$. Однак це не залежить від товщини d_b.

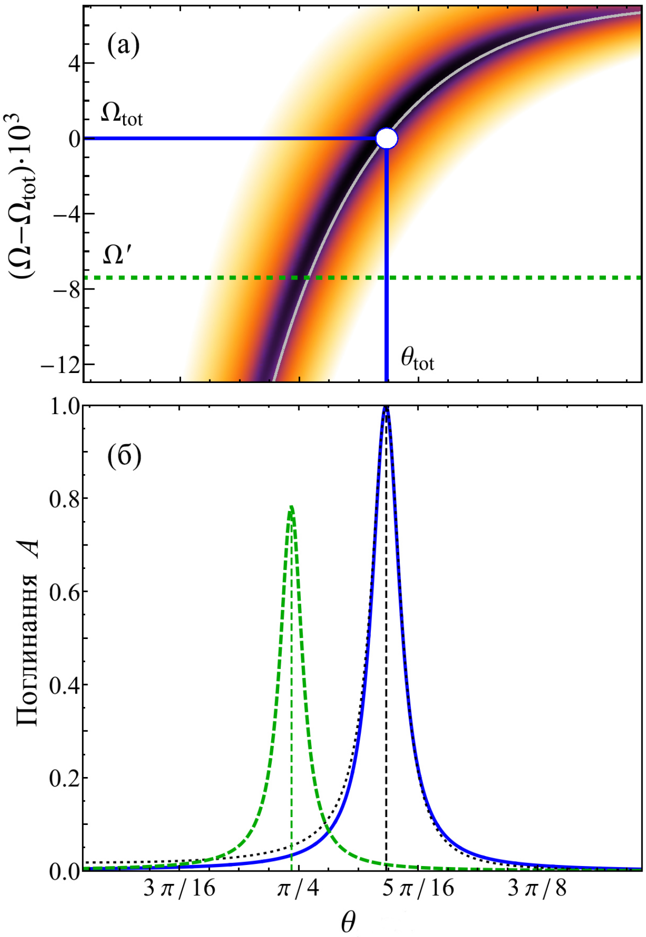

Рис. 6.13. Спектр $\Omega = \Omega_n(\theta)$ локалізованих мод (тонкі лінії), коефіцієнт поглинення $A(\theta, \Omega)$ (градієнт кольору) (панель а) і коефіцієнт поглинання $A(\theta)$ для двох частот, $\Omega = \Omega_{\text{tot}}$ і $\Omega = \Omega'$ (панель б) для точки a на рис. 6.12. Параметри: $n_a = \sqrt{\varepsilon_a} \approx 4{,}5$, $n_b = \sqrt{\varepsilon_b} = 1$, решта параметрів такі ж, як на рис. 6.12.

Отже, можна стверджувати, що рівняння (6.83) визначає значення частоти Ω та кута θ, при яких загальне поглинання, $A = 1$, може бути здійснено шляхом налаштування товщини d_b у відповідності з рівнянням (6.81). Тонкі суцільні криві на вставці рис. 6.12 зображують розв'язки рівняння (6.83).

6.2.3.2. Резонансна форма лінії

Відповідно до основних особливостей спектра $\Omega = \Omega_n(\theta)$ локалізованих хвильових мод, поведінку поглинання (6.73) доцільно аналізувати у трьох характерних випадках, коли форма лінії резонансної залежності $A(\theta)$ має:

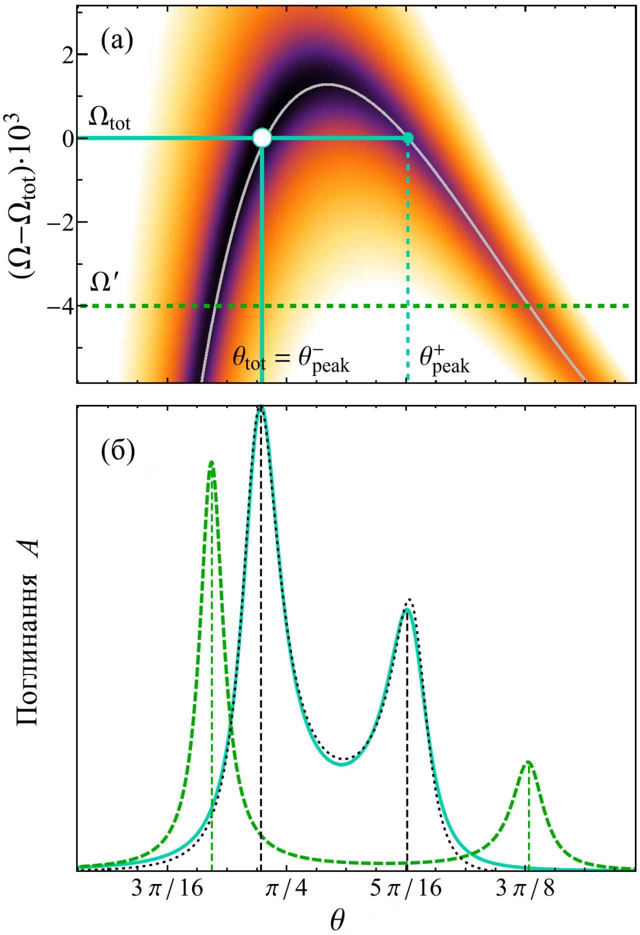

Рис. 6.14. Спектр $\Omega = \Omega_n(\theta)$ локалізованої моди (тонка лінія), коефіцієнт поглинення $A(\theta, \Omega)$ (градієнт кольору) (панель а) і коефіцієнт поглинення $A(\theta)$ для двох частот, $\Omega = \Omega_{tot}$ і $\Omega = \Omega'$ (панель б) для точки b на рис. 6.12. Параметри такі ж, як на рис. 6.12.

випадок 1 – одиночний резонансний пік, що відповідає діапазону частот, який відповідає ділянці спектральної кривої $\rho(\theta, \Omega) = 0$ лише з нормальною дисперсією;

випадок 2 – подвійні резонансні піки за умови, що частота нижче верхньої точки $(\theta_{max}, \Omega_{max})$ на немонотонній частині спектральної кривої $\rho(\theta, \Omega) = 0$;

випадок 3 – одиночний розширений резонансний пік, реалізований на частоті, яка налаштована дуже близько до верхньої точки спектральної кривої.

Важливо, що для кожного випадку ми вибираємо кут падіння θ і безрозмірну частоту хвилі Ω в безпосередній близькості від точок $(\theta_{tot}, \Omega_{tot})$ повного поглинання, $A = 1$, позначених колами ***a***, ***b***, і ***c*** на рис. 6.12, у відповідності з вищезазначеними випадками 1, 2 та 3. Зверніть увагу, що випадок ***2*** плавно перетворюється у випадок ***3***, коли частота наближається до верхньої точки $(\theta_{\max}, \Omega_{\max})$ і два вузькі резонансні піки зливаються в єдиний розширений.

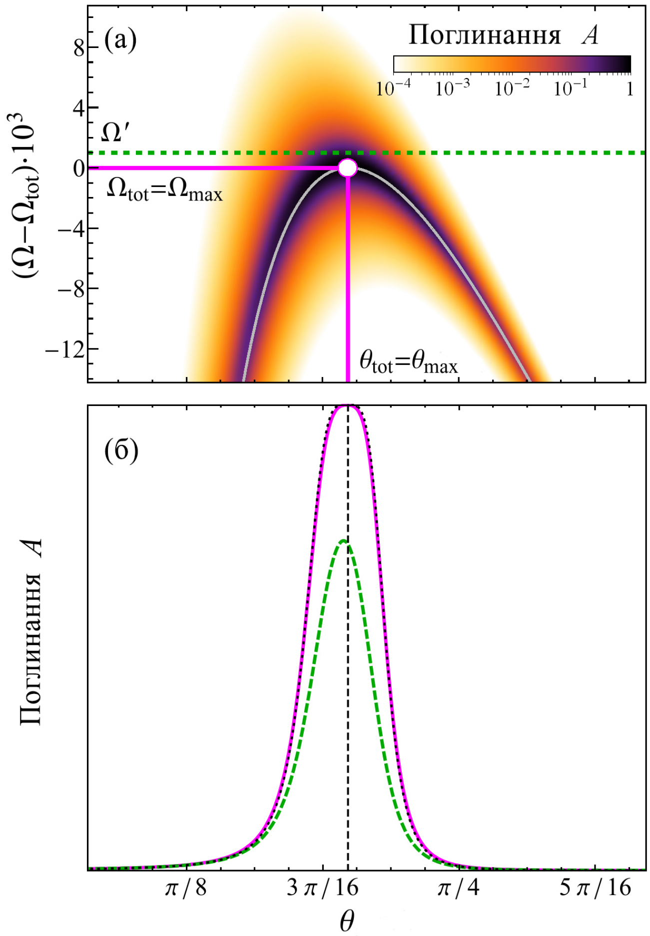

Рис. 6.15. Спектр $\Omega = \Omega_n(\theta)$ локалізованої моди (тонка лінія), коефіцієнт поглинання $A(\theta, \Omega)$ (градієнт кольору) (панель а) і коефіцієнт поглинання $A(\theta)$ для двох частот, $\Omega = \Omega_{\text{tot}}$ і $\Omega = \Omega'$ (панель б) для точки с на рис. 6.12. Параметри такі ж, як на рис. 6.12.

Ці випадки розглянуті на рисунках 6.13, 6.14, 6.15. На верхніх панелях цих рисунків відображається коефіцієнт поглинання $A(\theta, \Omega)$ за допомогою градієнту кольору, де темніший колір відповідає більшому значенню A. Тонкі світлі лінії представляють спектральні криві $\Omega = \Omega_n(\theta)$ локалізованих мод, де $\rho(\theta, \Omega) = 0$. Кола позначають точки $(\theta_{\text{tot}}, \Omega_{\text{tot}})$, рівняння (6.82), повного поглинання, $A = 1$. Вертикальні та горизонтальні прямі лінії вказують координати θ_{tot}, Ω_{tot} (суцільні лінії) та значення Ω' (пунктирна лінія), де загальне поглинання не може бути досягнуто. Залежність коефіцієнта поглинання A від кута θ для двох характерних значень частоти хвилі $\Omega = \Omega_{\rm tot}$ та $\Omega = \Omega'$ показані на нижніх панелях. Суцільні лінії відповідають резонансним пікам $A(\theta, \Omega_{\rm tot})$ із повним поглинанням, $A(\theta_{\rm tot}, \Omega_{\rm tot}) = 1$, тоді як пунктирні лінії побудовані для резонансної залежності $A(\theta, \Omega')$ з частковим поглинанням, $A < 1$.

Для подальшого нашого аналітичного дослідження коефіцієнта поглинання $A(\theta, \Omega)$, доречно переформулювати його визначення (6.73) через введені раніше спектральні функції (6.79) і (6.80), нулі яких визначальні для ефектів локалізованого збудження мод та загального поглинання хвилі. Для цього спочатку слід переписати знаменник $\left|M_{22}^{(T)}\right|^2$ рівняння (6.72) у відповідну форму,

$$\left|M_{22}^{(T)}\right|^2 = 1 + \rho^2(\theta, \Omega) + \mu(\theta, \Omega). \tag{6.84}$$

Відповідно до прийнятого припущення (6.76), дисипативний внесок $\mu(\theta, \Omega)$ має вигляд:

$$\mu(\theta, \Omega) = \beta_- \left[\mathcal{D}_{12}^{(0)}\mathcal{D}_{22}^{(1)} - \mathcal{D}_{22}^{(0)}\mathcal{D}_{12}^{(1)}\right] \exp(2\phi_b) + \left[\frac{\beta_-}{2}\mathcal{D}_{22}^{(1)} \exp(2\phi_b)\right]^2. \tag{6.85}$$

З точки зору дійсних спектральних функцій $\rho(\theta, \Omega)$, $\chi_\pm(\theta, \Omega)$ і $\mu(\theta, \Omega)$, коефіцієнт поглинання (6.73) отримує вид:

$$A(\theta, \Omega) = \frac{1 + \mu(\theta, \Omega) - \chi_\pm^2(\theta, \Omega)}{1 + \mu(\theta, \Omega) + \rho^2(\theta, \Omega)}. \tag{6.86}$$

Останній вираз, очевидно, відповідає умові, що $A \leqslant 1$, і загальне поглинання, $A = 1$, досягається, коли умови (6.78a) і (6.78б) виконуються одночасно.

Ми починаємо з випадку частотного діапазону, в якому частина спектральної кривої $\Omega = \Omega_n(\theta)$ локалізованої моди має нормальну дисперсію, $d\Omega/d\theta > 0$, і знаходиться далеко від верхньої точки $(\theta_{\max}, \Omega_{\max})$ кривої. Як визнано вище, кут θ і частота Ω знаходяться поблизу точки $(\theta_{\rm tot}, \Omega_{\rm tot})$ повного поглинання, $A = 1$.

Тому ми розкладаємо спектральні функції $\rho(\theta,\Omega)$ і $\chi_{\pm}(\theta,\Omega)$ в межах лінійного наближення при невеликих відхиленнях $\theta-\theta_{\mathrm{tot}}$ та $\Omega-\Omega_{\mathrm{tot}}$,

$$\rho \approx \left[\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right]_{\mathrm{tot}}(\theta-\theta_{\mathrm{tot}}) + \left[\frac{\partial\rho}{\partial\Omega}\right]_{\mathrm{tot}}(\Omega-\Omega_{\mathrm{tot}}), \tag{6.87}$$

$$\chi_{\pm} \approx \left[\frac{\partial\chi_{\pm}}{\partial\theta}\right]_{\mathrm{tot}}(\theta-\theta_{\mathrm{tot}}) + \left[\frac{\partial\chi_{\pm}}{\partial\Omega}\right]_{\mathrm{tot}}(\Omega-\Omega_{\mathrm{tot}}). \tag{6.88}$$

Тут символ $[...]_{\mathrm{tot}}$ означає оцінку в точці $(\theta_{\mathrm{tot}},\Omega_{\mathrm{tot}})$. Крім того, плавну функцію $\mu(\theta,\Omega)$ можна замінити на її значення $\mu(\theta_{\mathrm{tot}},\Omega_{\mathrm{tot}})$, оскільки вона не важлива для обговорюваної резонансної поведінки поглинання. Як результат, асимптотика рівняння (6.86) для коефіцієнта поглинання в разі одиничного піку задається формулою

$$A(\theta) \approx \frac{1-(\theta-\theta_{\chi})^2/\Theta_{\chi}^2}{1+(\theta-\theta_{\rho})^2/\Theta_{\rho}^2}, \tag{6.89}$$

де були введені такі позначення:

$$\begin{aligned}
\theta_{\chi} &= \theta_{\mathrm{tot}} + \left[\frac{\partial\Omega_{n\pm}}{\partial\theta}\right]_{\mathrm{tot}}^{-1}(\Omega-\Omega_{\mathrm{tot}}),\\
\theta_{\rho} &= \theta_{\mathrm{tot}} + \left[\frac{\partial\Omega_{n}}{\partial\theta}\right]_{\mathrm{tot}}^{-1}(\Omega-\Omega_{\mathrm{tot}}),\\
\Theta_{\chi} &= \left|1+\mu\right|_{\mathrm{tot}}^{1/2}\left|\frac{\partial\chi_{\pm}}{\partial\theta}\right|_{\mathrm{tot}}^{-1},\\
\Theta_{\rho} &= \left|1+\mu\right|_{\mathrm{tot}}^{1/2}\left|\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right|_{\mathrm{tot}}^{-1}.
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Нагадаємо, що функції $\Omega_n(\theta)$ та $\Omega_{n\pm}(\theta)$ є явними рішеннями рівнянь дисперсії (6.78), $\rho(\theta,\Omega)=0$ та $\chi_{\pm}(\theta,\Omega)=0$, відповідно; ціле число n перераховує спектральні криві знизу вгору, як показано на рис. 6.12.

Зауважимо, що $\Theta_{\rho}/\Theta_{\chi} \ll 1$ через слабку дисипацію, див. рівняння (6.3). Отже, кут падіння θ в чисельнику асимптотики (6.89) може бути приблизно замінений на θ_{ρ}. Таким чином, залежність $A(\theta)$ набуває лоренцівської форми з максимальним значенням коефіцієнта поглинання

$$A_{\text{peak}} \approx 1 - (\theta_\rho - \theta_\chi)^2/\Theta_\chi^2 \leqslant 1 \tag{6.91}$$

при $\theta = \theta_\rho$ і напівширині $\Theta_\rho \propto \exp(-2\phi_b)$ резонансного піку. Повне поглинання, $A = 1$, може бути досягнуто лише при $\Omega = \Omega_{\text{tot}}$ і $\theta = \theta_\chi = \theta_\rho = \theta_{\text{tot}}$, тобто в точці перетину двох кривих $\Omega = \Omega_n(\theta)$ і $\Omega = \Omega_{n\pm}(\theta)$. Відповідні резонансні лінії $A(\theta)$ побудовані на нижній панелі рис. 6.13 для антисиметричного збудження хвилі в діапазоні частот, де генерується локалізована мода з індексом $n = 1$. Суцільна крива описує резонанс у $A(\theta, \Omega_{\text{tot}})$ з максимальним $A_{\text{peak}} = A(\theta_{\text{tot}}, \Omega_{\text{tot}}) = 1$, тоді як пунктирна крива зображує резонансну форму лінії $A(\theta, \Omega')$ з $A_{\text{peak}} < 1$.

Найбільш важливий діапазон частот — той, який проілюстрований на рис. 6.14, де спектр $\Omega = \Omega_n(\theta)$ локалізованої моди досягає максимального значення $\Omega = \Omega_{\max}$ в $\theta = \theta_{\max}$. Тут $\Omega = \Omega_n(\theta)$ очевидно немонотонна, і маємо як нормальну ($d\Omega/d\theta > 0$), так і аномальну ($d\Omega/d\theta < 0$) дисперсію. Наближення спектральної функції $\Theta_{\max}, \Omega_{\max}$ має бути квадратичним по $\theta - \theta_{\max}$ і лінійним за $\Omega - \Omega_{\max}$,

$$\rho(\theta, \Omega) \approx \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2}\right]_{\max} (\theta - \theta_{\max})^2 + \left[\frac{\partial \rho}{\partial \Omega}\right]_{\max} (\Omega - \Omega_{\max}). \tag{6.92}$$

Квадратні дужки $[...]_{\max}$ означають значення внутрішньої величини в верхній точці $(\theta_{\max}, \Omega_{\max})$. Підставивши цей розклад в загальний вираз (6.86) для коефіцієнта поглинання A, отримуємо його відповідну асимптотику,

$$A(\theta) \approx \frac{1 - X(\theta)}{1 + \left[(\theta - \theta_{\max})^2 - \delta\theta_{\text{peak}}^2\right]^2/\Theta_{\text{twin}}^4}. \tag{6.93}$$

Тут ми ввели такі позначення:

$$\delta\theta_{\text{peak}}^2 = \left[\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \theta^2}\right]_{\max}^{-1} (\Omega - \Omega_{\max}), \tag{6.94}$$

$$\Theta_{\text{twin}} = \left[\sqrt[4]{1+\mu}\right]_{\max} \times \left|\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2}\right|_{\max}^{-1/2}, \tag{6.95}$$

$$X(\theta) = \frac{\chi_{\pm}^2(\theta,\Omega)}{1+\mu(\theta,\Omega)}. \tag{6.96}$$

У верхній точці $(\theta_{\max}, \Omega_{\max})$ друга похідна спектральної кривої $\Omega = \Omega_n(\theta)$ від'ємна. Отже, для частот $\Omega < \Omega_{\max}$, зсув квадрата θ у (6.94) є додатним, $\delta\theta_{\text{peak}}^2 > 0$. Як наслідок, форма лінії поглинання (6.93) явно демонструє подвійні піки, розташовані на рівні

$$\theta_{\text{peak}}^{\pm} = \theta_{\max} \pm \delta\theta_{\text{peak}}. \tag{6.97}$$

Поблизу кожного піку,

$$|\theta - \theta_{\text{peak}}^{\pm}| \ll \delta\theta_{\text{peak}}, \tag{6.98}$$

резонансна форма лінії має лоренцівську форму,

$$A(\theta) \approx \frac{1 - X(\theta_{\max} \pm \delta\theta_{\text{peak}})}{1 + \left[\theta - (\theta_{\max} \pm \delta\theta_{\text{peak}})\right]^2 / \Theta_{\text{peak}}^2}, \quad \Omega < \Omega_{\max}, \tag{6.99}$$

з параметром напівширини Θ_{peak},

$$\Theta_{\text{peak}} = \Theta_{\text{twin}}^2 / 2\delta\theta_{\text{peak}} \propto \exp(-2\phi_b). \tag{6.100}$$

Максимальне значення $A_{\text{peak}}^{\pm}$ поглинання (6.99) досягається на піках і, загалом, є меншим одиниці,

$$A_{\text{peak}}^{\pm} \approx 1 - X(\theta_{\max} \pm \delta\theta_{\text{peak}}) \leqslant 1. \tag{6.101}$$

Таку ситуацію продемонстровано пунктирною кривою поглинання $A(\theta, \Omega')$ на правій панелі рис. 6.14.

Однак якщо спектральна крива $\Omega = \Omega_n(\theta)$ налаштована так, щоб вловити точку $(\theta_{\text{tot}}, \Omega_{\text{tot}} = \Omega_n(\theta_{\text{tot}}))$, в якій обидва дисперсійні співвідношення (6.78) виявляються виконаними, тоді амплітуда одного з піків сягає одиниці. Зокрема, коли правильний кут падіння θ_{tot} виникає ліворуч від $\theta_{\max}$ (інтервал з нормальною дисперсією), лівий пік виявляє повне поглинання, а правий — ні, тобто $A^{-}_{\text{peak}} = 1$ і $A^{+}_{\text{peak}} < 1$. В іншому випадку кут падіння θ_{tot} знаходимо праворуч від $\theta_{\max}$ і, отже, повне поглинання виникає для правого піку з аномальною дисперсією, тобто $A^{-}_{\text{peak}} < 1$ та $A^{+}_{\text{peak}} = 1$. Перший описується суцільною кривою на правій панелі на рис. 6.14 для випадку симетричного збудження хвилі ($n = 2$). Слід підкреслити, що лівим або правим положенням піку із повним поглинанням можна маніпулювати, змінюючи товщину d_b просторових b зазорів.

Вважаючи точку $(\theta_{\text{tot}}, \Omega_{\text{tot}})$ повного поглинання близькою до максимальної точки $(\theta_{\max}, \Omega_{\max} = \Omega_n(\theta_{\max}))$, спектральну функцію $\chi_{\pm}(\theta, \Omega)$ можна відповідним чином замінити її асимптотичним наближенням (6.88). Це дозволяє представити амплітудну функцію $X(\theta)$, (6.96), у простішій формі,

$$X(\theta) = (\theta - \theta_\chi)^2/\Theta_\chi^2, \tag{6.102}$$

де θ_χ і Θ_χ визначаються рівняннями (6.90). Як результат, резонансну залежність (6.93) поглинання $A(\theta, \Omega_{\text{tot}})$ з двома піками можна апроксимувати як

$$A(\theta, \Omega_{\text{tot}}) \approx \frac{1 - (\theta - \theta_\chi)^2/\Theta_\chi^2}{1 + \left[(\theta - \theta_{\max})^2 - \delta\theta_{\text{peak}}^2\right]^2/\Theta_{\text{twin}}^4}. \tag{6.103}$$

Ця асимптотика показана пунктирною кривою на правій панелі рис. 6.14. Можна переконатися в ідеальній відповідності між нею та суцільною кривою, отриманою за допомогою чисельного моделювання точного рівняння (6.73).

Коли нормована частота Ω наближається дуже близько до верхньої точки спектральної кривої, $\Omega \approx \Omega_{\max}$, резонансний зсув за θ в рівнянні (6.93) зникає, $\delta\theta_{\text{peak}} \approx 0$, перетворюючи два піки в єдиний. Відповідна залежність коефіцієнта поглинання $A(\theta, \Omega_{\max})$ від кута падіння θ має вигляд:

$$A(\theta, \Omega_{\max}) \approx \frac{1 - X(\theta_{\max})}{1 + (\theta - \theta_{\max})^4/\Theta_{\text{twin}}^4}. \tag{6.104}$$

Його напівширина $\Theta_{\text{twin}} \propto \exp(-\phi_b)$ виявляється в $\exp(\phi_b) \gg 1$ разів більшою, ніж напівширини Θ_ρ і Θ_{peak} як окремого піку, так і кожного з пари піків, що визначається рівняннями (6.89) і (6.99), відповідно.

Загалом, максимальне значення поглинання, що досягається при $\theta = \theta_{\max}$, менше одиниці,

$$A_{\text{peak}} \approx 1 - X(\theta_{\max}) \leqslant 1. \tag{6.105}$$

Однак, якщо верхня точка $(\theta_{\max},\Omega_{\max})$ спектральної кривої $\Omega = \Omega_n(\theta)$ збігається з точкою $(\theta_{\text{tot}}, \Omega_{\text{tot}})$ повного поглинання, амплітуда піку $A_{\text{peak}} = 1$. Така ситуація описується точними суцільними та асимптотичними пунктирними кривими на нижній панелі рис. 6.15, яка відповідає випадку антисиметричного збудження, що генерує локалізовану моду із індексом $n = 3$.

Пунктирна крива на нижній панелі рис. 6.15 відповідає залежності $A(\theta, \Omega')$ для фіксованої частоти $\Omega' > \Omega_{\max}$. Ця залежність визначається рівнянням (6.93), при $\delta\theta_{\text{peak}}^2 < 0$. Як наслідок, форма лінії представляє лише широкий пік у $\theta \approx \theta_{\max}$ з напівшириною $\Theta_{\text{twin}} \propto \exp(-\phi_b)$ і пікової амплітудою

$$A_{\text{peak}} \approx \frac{1 - X(\theta_{\max})}{1 + \delta\theta_{\text{peak}}^4/\Theta_{\text{twin}}^4} < 1. \tag{6.106}$$

Важливо, що псевдорезонансна поведінка $A(\theta, \Omega')$ виникає тут через близькість до спектрального максимуму $\Omega_{\max} = \Omega_n(\theta_{\max})$.

Нарешті, коли діапазон частот/кутів не охоплює спектр $\Omega = \Omega_n(\theta)$ локалізованих мод і, крім того, виявляється далеко за його межами, поглинання $A(\theta, \Omega)$ є незначним,

$$A(\theta,\Omega) \approx \frac{4\big[\mathcal{D}_{12}^{(0)}\mathcal{D}_{22}^{(1)} - \mathcal{D}_{22}^{(0)}\mathcal{D}_{12}^{(1)} - \mathcal{D}_{22}^{(1)}\big]}{\beta_{-}\mathcal{D}_{22}^{(0)}}\exp(-2\phi_b), \tag{6.107}$$

через слабку дисипацію.

6.3. Вплив постійного магнітного поля на поширення джозефсонівських мод

У цьому підрозділі вивчається вплив зовнішнього постійного магнітного поля на поширення локалізованних джозефсонівських хвиль у пластині шаруватого надпровідника. Цей вплив призводить до зміни прозорості пластини, як це зрозуміло з попереднього підрозділу.

6.3.1. Основні рівняння

Ми вивчаємо одностороннє опромінення пластини і знаходимо коефіцієнт проходження електромагнітних хвиль через пластину шаруватого надпровідника товщиною D. Система координат вибирається таким чином, щоб кристалографічна **ab**-площина шаруватого надпровідника збігалася з площиною xy, а вісь **c** спрямована вздовж вісі z. Пластина знаходиться у області $0 < x < D$ (див. рис. 6.16). Ми вважаємо, що зразок нескінченний вздовж осей y та z, і нехтуємо відповідними граничними ефектами.

ТМ-поляризована хвиля одиничної амплітуди, терагерцової частоти ω та з компонентами хвильового вектора $k_x = k\cos\theta$, $k_z = k\sin\theta$ ($k = \omega/c$) опромінює поверхню $x = 0$ надпровідника з кутом падіння θ. Така геометрія дозволяє представити електромагнітне поле як

$$\vec{E}(x,z,t) = \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp(ik_z - i\omega t),$$
$$\vec{H}(x,z,t) = \{0, H_y(x), 0\} \exp(ik_z z - I\omega t). \tag{6.108}$$

Падаюча хвиля частково відбивається від шаруватого надпровідника і частково проходить крізь нього, як показано на рис. 6.16. Зовнішнє постійне магнітне поле $\vec{H}_0$ направлено вздовж осі y. Ми вивчали випадок відносно слабких постійних магнітних полів, коли Джозефсонові вихори не проникають у пластину.

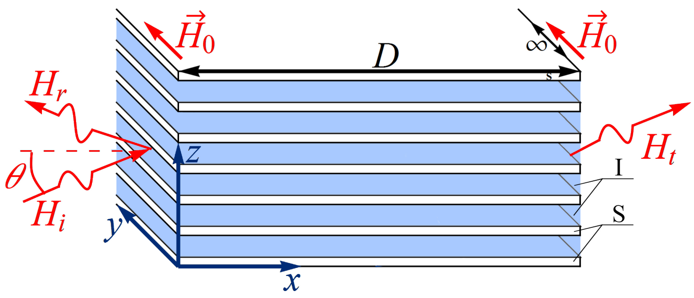

Рис. 6.16. Схематична геометрія відбиття і проходження хвиль через пластину шаруватого надпровідника.

Електромагнітне поле у вакуумних областях праворуч та ліворуч від зразка (див. рис. 6.16) є суперпозицією постійного магнітного поля та полів хвилі, що падає, відбивається і проходить. Використовуючи рівняння Максвелла, можна легко отримати такі вирази для тангенціальних складових електричного та магнітного полів у лівій вакуумній області:

$$H_y^{\text{left}}(x) = \exp(ik_x x)] + H_r \exp(-ik_x x),$$
$$E_z^{\text{left}}(x) = -\frac{k_x}{k}[\exp(ik_x x) - H_r \exp(-ik_x x)], \tag{6.109}$$

де H_r — амплітуда хвилі, що відбита.

Тангенціальні складові магнітного та електричного полів хвилі, що пройшла, в правій вакуумній області є:

$$
\begin{aligned}
&H_y^{\mathrm{right}}(x) = H_t\, \exp[ik_x(x-D)],\\
&E_z^{\mathrm{right}}(x) = -\frac{k_x}{k} H_t\, \exp[ik_x(x-D)],
\end{aligned}
\tag{6.110}
$$

де H_t — амплітуда хвилі, що пройшла.

Електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику визначається розподілом $\varphi(\vec{r}, t)$ міжшарової калібрувально-інваріантної різниці фаз параметра порядку. Ця різниця фаз регулюється набором зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона (1.46). Спочатку ми опишемо, як постійне магнітне поле проникає в пластину шаруватого надпровідника. Тут ми припускаємо, що пластина досить товста,

$$
D \gg \lambda_c \gg \lambda_{ab}. \tag{6.111}
$$

У цьому випадку ми можемо нехтувати взаємодією двох магнітних потоків, що проникли в пластину з протилежних її сторін $x = 0$ та $x = D$, оскільки постійне поле згасає всередині пластини на відстані близько λ_c від границі пластини. Використовуючи рівняння (1.46), отримуємо вирази для сталої різниці фаз φ_0 в границях від $x = 0$ до $x = D$,

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0^{\mathrm{left}}(\xi) = -4\,\mathrm{arctg}[\exp(-\xi - \xi_0)],\\
&\varphi_0^{\mathrm{right}}(\xi) = 4\,\mathrm{arctg}\exp[\xi - (\delta - \xi_0)].
\end{aligned}
\tag{6.112}
$$

Тут ми знову використовуємо безрозмірну координату ξ та нормовану на λ_c товщину δ пластини. Стала ξ_0 визначається величиною H_0 зовнішнього постійного магнітного поля,

$$
\xi_0 = \mathrm{arch}\left(\frac{1}{h_0}\right), \qquad h_0 = \frac{H_0}{\mathcal{H}_0}. \tag{6.113}
$$

Значення h_0 являє собою зовнішнє постійне магнітне поле, нормоване на критичне поле $\mathcal{H}_0 = \Phi_0/\pi d\lambda_c$. Типове значення $\mathcal{H}_0$ для $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$ становить близько 100 Ое. Якщо $H_0 > \mathcal{H}_0$, стан Мейснера стає нестабільним. Тут ми розглянемо протилежний випадок, коли постійне магнітне поле слабке,

$$h_0 \leq 1. \tag{6.114}$$

За цієї умови магнітний потік всередині шаруватого надпровідника існує лише у вигляді хвостів двох джозефсонівських вихорів, центри яких розташовані поза пластиною в точках $\xi = -\xi_0$ та $\xi = \delta + \xi_0$. Рівняння (6.112) представляє відомий розв'язок сінусоїдального рівняння Гордона для фази φ_0. Як ми показуємо нижче, навіть слабке постійне магнітне поле має суттєвий вплив на високочастотні властивості шаруватих надпровідників і, зокрема, на пропускання надпровідної пластини.

Тепер розглянемо змінні поля, пов'язані з джозефсонівською хвилею, що поширюється всередині шаруватого надпровідника в присутності неоднорідно розподіленого постійного магнітного поля. Це неоднорідне постійне поле визначається талою різницею фаз (6.112). Розглянемо випадок, коли амплітуда падаючої хвилі набагато менша за величину магнітного поля постійного струму, а калібрувально-інваріантну різницю фаз можна представити як суму трьох доданків,

$$\varphi(\xi, z, t) = \varphi_0^{\text{left}}(\xi) + \varphi_0^{\text{right}}(\xi) + \varphi_w(\xi, z, t), \tag{6.115}$$

де перші два доданки, задані рівняннями (6.112), описують сталу частину φ. Останній доданок — це невелика добавка змінного поля моди.

Лінеаризуємо рівняння (6.112) за малою змінною складовою різниці фаз φ_w, відповідно до рівняння (6.108), і шукатимемо φ_w у формі:

$$\varphi_\omega(\xi, z, t) = a(\xi) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \tag{6.116}$$

Тоді в межах лінійного наближення рівняння для коефіцієнта $a(\xi)$ має вигляд:

$$\frac{\partial^2 a(\xi)}{\partial \xi^2} + (1 + k_z^2\lambda_{ab}^2)\left[\frac{2}{\mathrm{ch}^2(\xi+\xi_0)} + \frac{2}{\mathrm{ch}^2(\delta+\xi_0-\xi)} + \Omega^2 - 1\right]a(\xi) = 0. \quad (6.117)$$

Важливо, що з співвідношень

$$E_z^s = \frac{\mathcal{H}_0}{2\omega_J\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_y^s}{\partial t} = \frac{\mathcal{H}_0}{2\lambda_c}\left[\sin\varepsilon + \frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] \quad (6.118)$$

і рівняння (6.117) можна отримати відоме рівняння для z-компоненти електричного поля у хвилі з ТМ-поляризацією (6.108),

$$\frac{d^2E_z}{dx^2} + \left(k^2\varepsilon_{zz} - k_z^2\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}\right)E_z = 0, \quad (6.119)$$

але з модифікованими компонентами тензора діелектричної проникності. З урахуванням умов розсіювання, ці компоненти можна записати так:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}(\Omega) = \varepsilon_{yy}(\Omega) = \varepsilon\left[1 + \frac{i\nu_{ab}}{\Omega} - \frac{\lambda_c^2}{\lambda_{ab}^2}\frac{1}{\Omega^2}\right],\\
&\varepsilon_{zz}(\xi,\Omega) = \varepsilon\left\{1 + \frac{i\nu_c}{\Omega} - \frac{1}{\Omega^2}\left[1 - \frac{2}{\mathrm{ch}^2(\xi+\xi_0)} - \frac{2}{\mathrm{ch}^2(\delta+\xi_0-\xi)}\right]\right\}. \quad (6.120)
\end{aligned}$$

Таким чином, можна зробити висновок, що плазма в шаруватих надпровідниках у зовнішньому постійному магнітному полі являє собою дисперсійне неоднорідне середовище, задане одновісним діагональним тензором діелектричної проникності (6.120). Важливо, що неоднорідність, яка виникає в ε_{zz}, походить від зовнішнього магнітного поля та регулюється ним. Без магнітного поля постійного струму діелектричні функції (6.120) зводяться до тих, що записані, наприклад, в [355].

Зауважимо, що через сильну анізотропію, $\lambda_{ab} \ll \lambda_c$, параметр $k_z\lambda_{ab}$ завжди малий,

$$k_z\lambda_{ab} = \frac{\lambda_{ab}}{\lambda_c}\frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\theta \ll 1. \tag{6.121}$$

Тому в рівнянні (6.117) вираз в дужках $(1 + k_z^2\lambda_{ab}^2)$ можна, опустити. Тоді, з точністю до експоненціально малого параметра $\exp(-\delta) = \exp(D/\lambda_c) \ll 1$, отримуємо асимптотично точний загальний розв'язок рівняння (6.117):

$$\begin{aligned} a(\xi) = C_1 \mathrm{e}^{i\tilde{\Omega}\xi}\Big[pa_0(\xi) + p^{-1}a_0(\delta-\xi) + \sqrt{\tilde{\Omega}^2+1}\Big] + \\ + C_2 \mathrm{e}^{-i\tilde{\Omega}\xi}\Big[p^{-1}a_0(\xi) + pa_0(\delta-\xi) + \sqrt{\tilde{\Omega}^2+1}\Big], \end{aligned} \tag{6.122}$$

де C_1, C_2 — константи інтегрування, і

$$a_0(\xi) = \mathrm{th}(\xi_0 + \xi) - 1, \qquad p = \frac{1 + i\tilde{\Omega}}{\sqrt{\tilde{\Omega}^2+1}}, \tag{6.123}$$

де $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + i\nu_c\Omega - 1}$.

Тепер, використовуючи рівняння (6.118), (6.115), (6.116) та (6.122), можемо знайти електромагнітне поле в пластині шаруватого надпровідника. Тангенціальними компонентами електричного та магнітного полів є:

$$\begin{aligned} E_z^s(x) &= -\frac{i\Omega}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\mathcal{H}_0}{2}a(x/\lambda_c), \\ H_y^s(x) &= \frac{\mathcal{H}_0}{2}a'(x/\lambda_c), \end{aligned} \tag{6.124}$$

де штрих означає першу похідну функції за її аргументом.

Зшиваючи тангенціальні компоненти електричного та магнітного полів (6.109), (6.110) у вакуумних областях з полями (6.122), (6.124) всередині пластини, ми знаходимо невідомі константи H_r, H_t, C_1 та C_2. В результаті для амплітуди хвилі, що пройшла, можна отримати таке співвідношення:

$$H_t = \frac{4\Omega\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}^2+1)^2\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}{e^{-i\delta\Omega}(i-\tilde{\Omega})^2M_+^2 - e^{i\delta\Omega}(i+\tilde{\Omega})^2M_-^2}, \tag{6.125}$$

де

$$M_\pm = \sqrt{\varepsilon}\cos\theta(h_0^2 \pm i\tilde{h}_0\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}^2) + \Omega(i\tilde{h}_0 \pm \tilde{\Omega}). \tag{6.126}$$

6.3.2. Вплив магнітного поля на прозорість пластини

Тепер ми можемо отримати аналітичний вираз для коефіцієнта пропускання $T = |H_t|^2$. При $\nu_c = \nu_{ab} = 0$, рівняння (6.125) дає такий вираз для коефіцієнта пропускання $T = |H_t|^2$:

$$T = \frac{1}{1 + \sin^2(\tilde{\Omega}\delta - \phi)\Big\{\Big[\frac{1}{4\Theta} + \Big(\frac{h_0^4\tilde{h}_0^2}{\Omega^4\tilde{\Omega}^2}+1\Big)\Theta\Big]^2 - 1\Big\}}, \tag{6.127}$$

де

$$\tilde{h}_0 = \sqrt{1-h_0^2}, \qquad \Theta = \frac{\Omega\tilde{\Omega}\sqrt{\varepsilon}}{2(\tilde{h}_0^2+\tilde{\Omega}^2)}\cos\theta,$$
$$\phi = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{1-\tilde{\Omega}^2}{2\tilde{\Omega}} + \frac{\Omega^4\tilde{h}_0}{2\tilde{\Omega}h_0^2}P\right),$$
$$P = \Big[\frac{\Omega^2\varepsilon\cos^2\theta}{\Omega^2 + (\tilde{h}_0^2-\Omega^2)\varepsilon\cos^2\theta} - \frac{\tilde{h}_0+\tilde{\Omega}^2}{\tilde{h}_0+1}\Big]^{-1}. \tag{6.128}$$

За відсутності постійного магнітного поля ($h_0 = 0$) загальний вираз (6.127) для пропускання набуває простий вигляд,

$$T(h_0=0)=\Big[1+\Big(\frac{1}{4\Theta_0}-\Theta_0\Big)^2\sin^2(\tilde{\Omega}\delta)\Big]^{-1},\quad \Theta_0=\frac{\tilde{\Omega}}{\Omega}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\cos\theta. \qquad (6.129)$$

Видно, що пластина шаруватого надпровідника стає повністю прозорою ($T=1$) при певному куті падіння, коли виконується рівність $\cos\theta=\Omega/\tilde{\Omega}\sqrt{\varepsilon}$, незалежно від товщини пластини D. Цей випадок може бути реалізований при досить високій частоті, що відповідають умові

$$\Omega>(1-\varepsilon^{-1})^{-1/2}. \qquad (6.130)$$

При критичному значенні постійного магнітного поля $h_0=1$ коефіцієнт пропускання має такий вигляд:

$$T(h_0=1)=\Big[1+\Big(\frac{1}{4\Theta_1}-\Theta_1\Big)^2\sin^2(\tilde{\Omega}\delta-\phi_1)\Big]^{-1},$$
$$\phi_1=2\,\mathrm{arctg}\,\tilde{\Omega},\qquad \Theta_1=\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\cos\theta. \qquad (6.131)$$

У цьому випадку також може спостерігатися повна прозорість, однак для іншого кута падіння, коли

$$\cos\theta=\tilde{\Omega}/\Omega\sqrt{\varepsilon}. \qquad (6.132)$$

Цю умову можна виконати для будь-якої частоти $\Omega>1$.

Тепер ми переходимо до загального випадку ненульового постійного магнітного поля. Ми обговоримо залежність коефіцінта проходження хвиль від товщини пластини $\delta=D/\lambda_c$, кута падіння θ та частоти $\Omega=\omega/\omega_J$, та вивчимо вплив постійного магнітного поля $h_0=H_0/\mathcal{H}_0$ на цю залежність.

Загальний вираз (6.127) для коефіцієнта пропускання залежить від товщини пластини $D=\lambda_c\delta$ лише за рахунок аргументу синуса. Якщо $\sin(\tilde{\Omega}\delta-\phi)=0$, пластина повністю прозора. За відсутності зовнішнього постійного магнітного поля фаза $\phi = 0$. У цьому випадку $T = 1$, коли товщина пластини дорівнює цілому числу, кратному половині довжин хвиль,

$$D = \frac{\pi n c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_J^2}}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{6.133}$$

В результаті на залежності $T(D)$ мають місце коливання типу Фабрі-Перо, модифіковані законом гіперболічної дисперсії для мод в шаруватому надпровіднику. Якщо постійне магнітне поле H_0 увімкнено, H_0-залежний фазовий зсув ϕ з'являється в аргументі синуса в рівнянні (6.127). Таким чином, постійне магнітне поле зміщує криву $T(D)$ вліво, тоді як періодичність функції $T(D)$ залишається незмінною. Крім того, амплітуда резонансу Фабрі-Перо зростає при $H_0 = \mathcal{H}_0$ у порівнянні з випадком $H_0 = 0$. Однак більш детальне дослідження показує, що залежність амплітуди резонансу Фабрі-Перо від H_0 виявляється немонотонною, якщо кути падіння θ задовольняють нерівностям

$$\frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon(\Omega^2 + 1)}} < \cos\theta < \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon(\Omega^2 - 1)}}, 1. \tag{6.134}$$

На рис. 6.17, панель а, показано залежність коефіцієнта пропускання T від безрозмірної товщини пластини δ для $H_0 = 0$ та $H_0 = \mathcal{H}_0$. Відповідний фазовий зсув показано стрілкою.

Залежність пропускання T від кута падіння θ є більш складною. На рис. 6.18 показано значення T кольором як функцію кута падіння та зовнішнього постійного магнітного поля на частотах Ω = 1,1; 1,15; 1,2; 1,28. Хоча ця залежність кількісно змінюється із збільшенням Ω, можна помітити якісний повтор її поведінки. Дійсно, коли $\tilde{\Omega}$ змінюється на π/δ, аргумент синуса в рівнянні (6.127) змінюється приблизно на π (див., наприклад, панелі з $\Omega = 1,28$ та $\Omega = 1,1$ на рис. (6.18). Коефіцієнт пропускання T дорівнює 1, коли $\sin(\tilde{\Omega}\delta - \phi) = 0$. Ця умова відповідає пунктирним чорним лініям на рис. (6.18). Крім того, ми показуємо точки, де коефіцієнт в дужках рівняння (6.127) досягає мінімуму як функція θ, пунктирна сіра лінія.

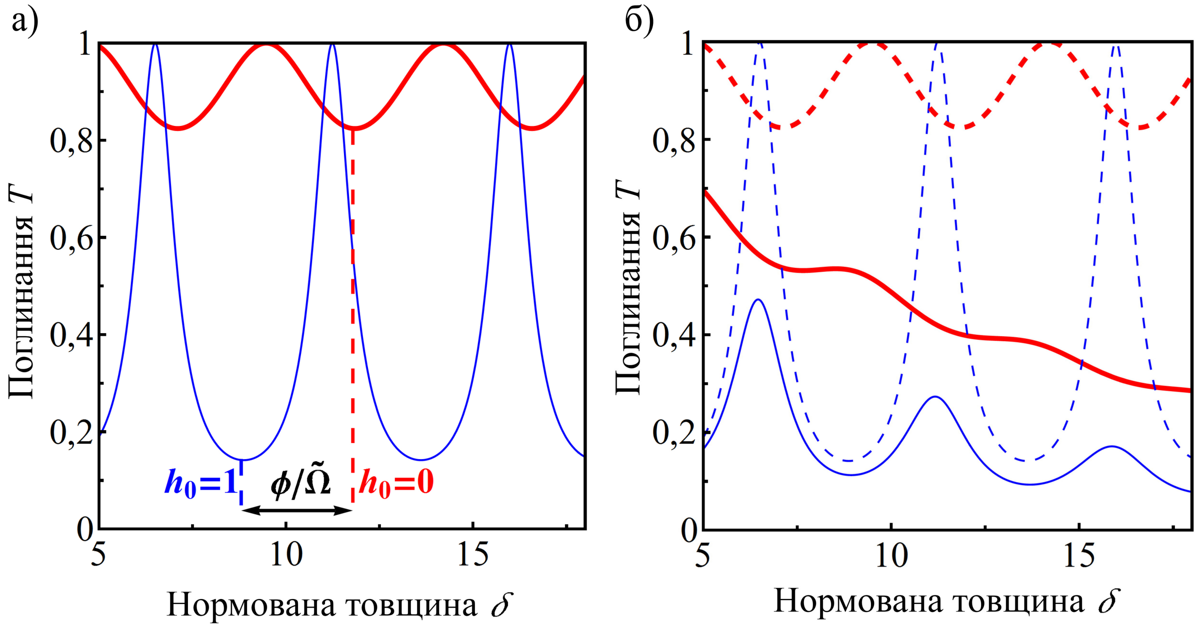

Рис. 6.17. Залежність коефіцієнта пропускання T від нормованої товщини пластини $\delta = D/\lambda_c$ за відсутності постійного магнітного поля (товста червона крива на панелі а, $h_0 = 0$) та для критичного поля $h_0 = 1$ (тонка синя крива на панелі а) та для $\nu_{ab} = \nu_c = 0{,}03\ \Omega$ (суцільні криві на панелі б) та $\nu_{ab} = \nu_c = 0$ (штрихові криві на панелі б). Параметри: $\Omega = 1{,}2$, $\theta = \pi/4$, $\lambda_c = 4 \times 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2 \times 10^{-5}$ см, $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц і $\varepsilon = 16$.

Як видно на головній панелі на рис. 6.18, постійне поле може різко змінити поведінку функції $T(\theta)$. Зокрема, для $0 \leq h_0 \lesssim 0{,}2$ ця функція є немонотонною. Зі збільшенням кута падіння θ коефіцієнт пропускання спочатку збільшується, а потім зменшується до нуля.

У інтервалі $0{,}2 \lesssim h_0 \lesssim 0{,}5$ функція $T(\theta)$ монотонно зменшується від $T(\theta = 0) = 1$ до $T(\theta = \pi/2) = 0$. Для $0,5 \lesssim h_0 \lesssim 0{,}8$ зміна θ не призводить до помітної зміни коефіцієнта пропускання $T(\theta)$. Нарешті, коли постійне поле вище $\approx 0{,}8$, залежність $T(\theta)$ знову стає немонотонною.

Слід зазначити, що при правильному виборі кута падіння θ можна досягти майже ідеальної прозорості надпровідної пластини майже для будь-яких значень постійного поля H_0 і частоти ω. Щоб показати цей факт, ми знайшли з рівняння (6.127) максимальні значення T_{max} функції $T(\theta)$ для різних постійних магнітних полів та частот. Ці максимальні значення зображені на фазовій площині (h_0, Ω) на рис. 6.19.

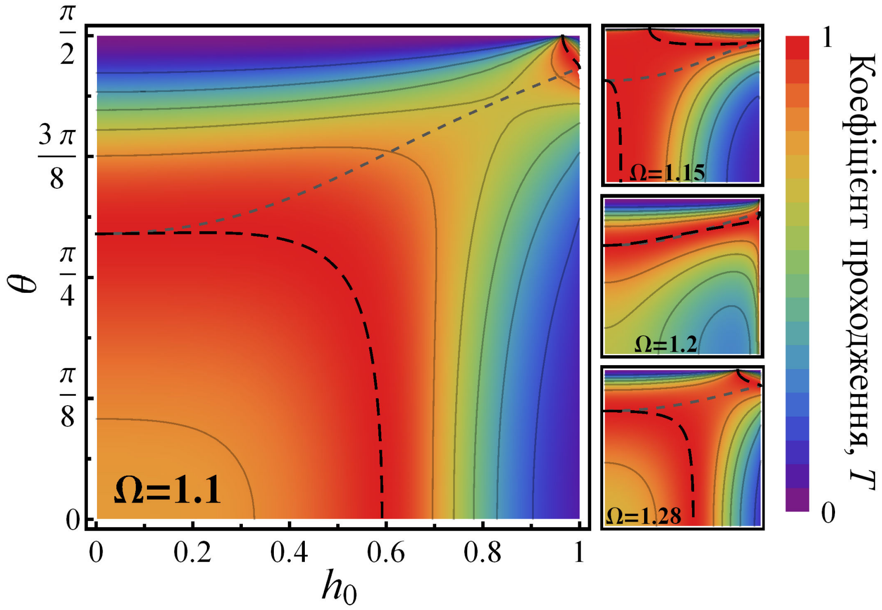

Рис. 6.18. Залежність коефіцієнта пропускання T (показана кольором) від кута падіння θ та зовнішнього постійного магнітного поля h_0. Параметри: $\Omega = 1{,}1$ (головна панель), $\Omega = 1{,}15$, $\Omega = 1{,}2$, $\Omega = 1{,}28$ (бокові панелі), $\delta = 11$, $\lambda_c = 4 \times 10^{-3}$ см; $\lambda_{ab} = 2 \times 10^{-5}$ см; $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц і $\varepsilon = 16$.

Видно, що повне проходження, $T_{max} = 1$, можна спостерігати на широкій ділянці цієї площини (світло-сірі області, обмежені штриховими лініями). Значення θ у цих областях вибрані так, що значення синуса в рівнянні (6.127) дорівнює нулю. Неможливо досягти ідеальної прозорості, $T_{max} < 0$, для h_0 і Ω в більш синіх областях.

Коефіцієнт пропускання шаруватого надпровідника T від частоти ω і постійного поля H_0 показаний кольором на рис. 6.20, панель а. Області ідеальної прозорості позначені червоним кольором. Збільшуючи частоту ω при будь-якому фіксованому H_0, коефіцієнт пропускання коливається і приймає значення до одиниці на частотах резонансів Фабрі-Перо (коли синус в рівнянні (6.127) дорівнює нулю), див. рис. 6.20, панель б. Відповідно до рис. 6.20, панель а, постійне поле зміщує максимуми пропускання і робить резонанси більш різкими.

Важливо, що резонанси Фабрі-Перо можуть бути реалізовані шляхом зміни постійного магнітного поля H_0, однак, лише для спеціальних фіксованих інтервалів частоти ω.

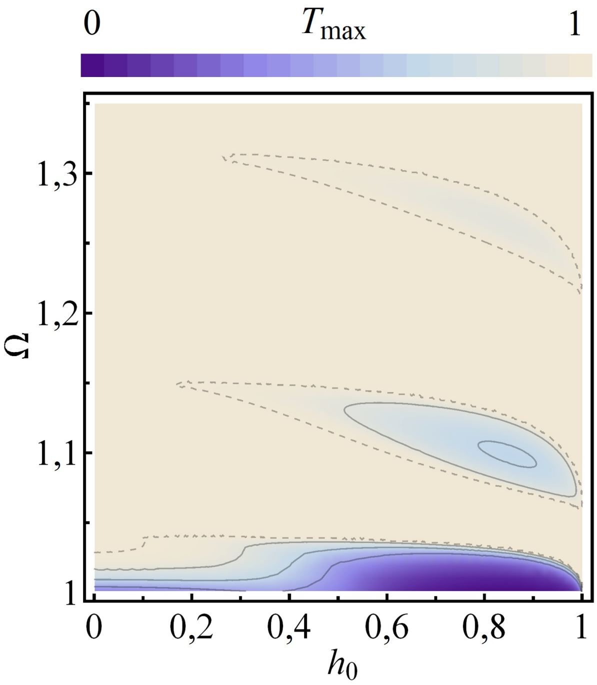

Рис. 6.19. Максимум T_{max} функції $T(\theta)$ (показаний кольором) в залежності від нормованої частоти та безрозмірного зовнішнього постійного магнітного поля h_0. Параметри: $\delta = 11$, $\lambda_c = 4 \times 10^{-3}$ см; $\lambda_{ab} = 2 \times 10^{-5}$ см; $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц і $\varepsilon = 16$.

Щоб показати діапазон зміни коефіцієнта пропускання при зміні постійного магнітного поля, ми побудували дві граничні криві на рис. 6.21. Зокрема, верхня червона та нижня сині криві представляють відповідно коефіцієнт пропускання, максимізований та мінімізований за величиною поля, як функції безрозмірної частоти Ω. Сіра проміжна область між кривими показує діапазон зміни коефіцієнта пропускання. З рис. 6.21 видно, що цей діапазон суттєво залежить від вибору частоти. Наприклад, можна порівняти діапазони, позначені штриховими лініями **a** та **b** на рис. 6.20, панель а, і 6.21. Для частоти, що відповідає лінії **a**, можна змінювати коефіцієнт пропускання майже від нуля до одиниці, тоді як діапазон змін коефіцієнта пропускання набагато менший вздовж лінії **b**. Очевидно, що в останньому випадку ідеальної прозорості не спостерігається.

Усі результати, отримані вище, є дійсними у випадку незначних дисипацій в пластині. Однак навіть у випадку не дуже малої дисипації невелике постійне магнітне поле може суттєво вплинути на прозорість надпровідних пластин. Для демонстрації цього, використовуючи рівняння (6.125), побудовано графік залежності коефіцієнта пропускання T від нормованої товщини пластини $\delta = D/\lambda_c$ для випадку нульової дисипації, $\nu_{ab} = \nu_c = 0$, та для випадку $\nu_{ab} = \nu_c = 0,03$ (див. рис. 6.17, панель б).

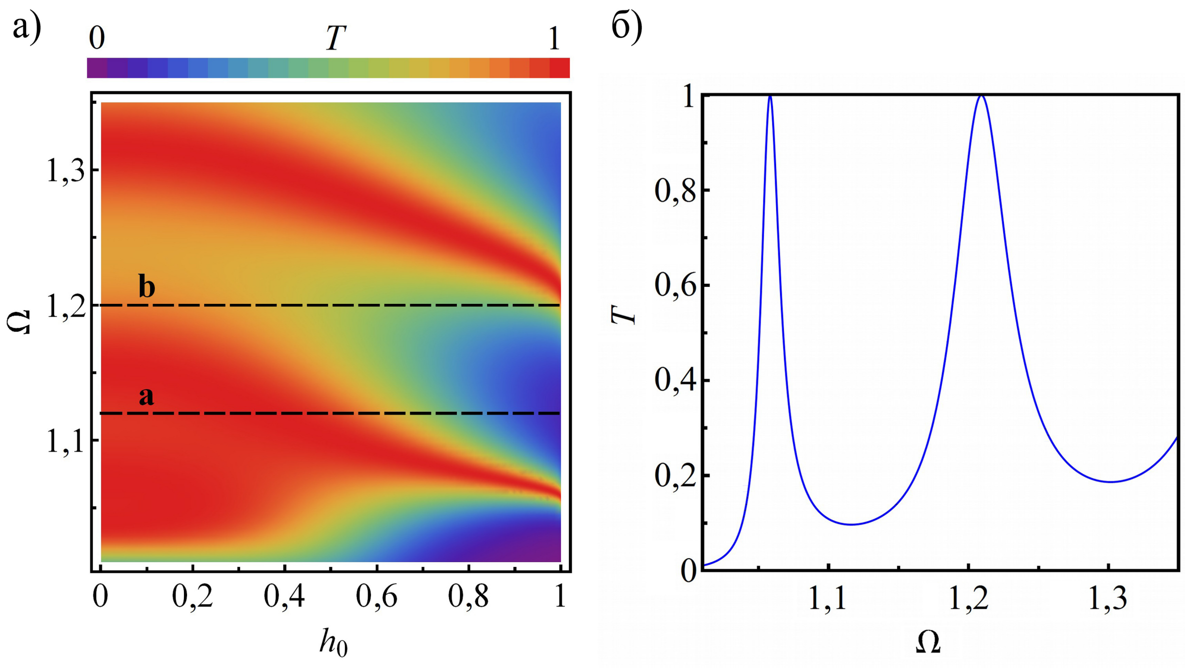

Рис. 6.20. Залежність коефіцієнта пропускання T (відображається кольором на панелі а) від нормованої частоти Ω та зовнішнього постійного магнітного поля h_0 (панель а) та для $h_0 = 1$ (панель б). Параметри: $\theta = \pi/4$, $\delta = 11$, $\lambda_c = 4 \times 10^{-3}$ см; $\lambda_{ab} = 2 \times 10^{-5}$ см; $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц і $\varepsilon = 16$.

Штрихові криві, отримані для $\nu_{ab} = \nu_c = 0$, збігаються з кривими на рис. 6.17, панель а. Вони показують коливання Фабрі-Перо за відсутності постійного магнітного поля (товста червона пунктирна крива) та для $h_0 = 1$ (тонка синя пунктирна крива). Суцільні криві на рис. 6.17, панель б, побудовані для тих самих умов, що і штрихові лінії, але для $\nu_{ab} = \nu_c = 0{,}03\ \Omega$. Видно, що коливання Фабрі-Перо спостерігаються навіть у випадку невеликої (але реалістичної) дисипації.

Більше того, на рис. 6.17 видно, що постійне магнітне поле змінює коефіцієнт пропускання в широкому діапазоні навіть у випадку ненульової дисипації.

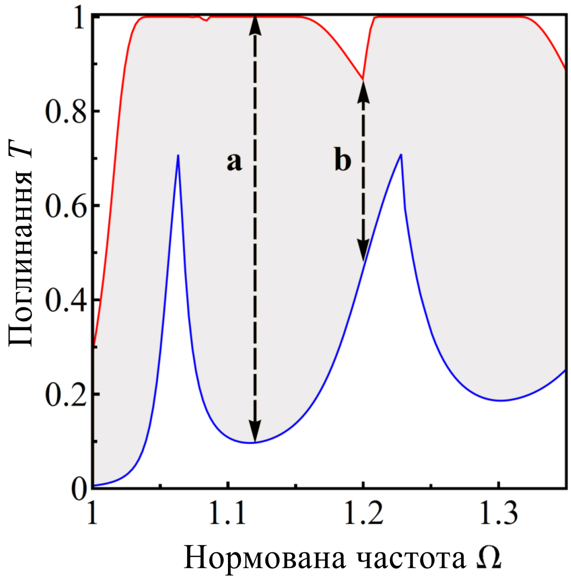

Рис. 6.21. Діапазон варіації (сіра зона) функції $T(h_0)$, її максимальне (червона крива) та мінімальне (синя крива) значення в залежності від нормованої частоти Ω. Параметри: $\theta = \pi/4$, $\delta = 11$, $\lambda_c = 4 \times 10^{-3}$ см; $\lambda_{ab} = 2 \times 10^{-5}$ см; $\omega_J/2\pi = 0{,}3$ ТГц і $\varepsilon = 16$.

Висновки до розділу 6

У шостому розділі дисертації, написаному за матеріалами статей [18–21]:

- Узагальнено, класифіковано і доповнено результати, отримані для мод локалізованих в пластинах шаруватого надпровідника. Теоретично вивчено поширення власних локалізованих терагерцових хвиль уздовж пластини шаруватого надпровідника, шари якого перпендикулярні поверхні пластини. Розглядається загальний випадок довільного напрямку поширення, при якому електромагнітне поле локалізованої моди в пластині є суперпозицією двох типів хвиль, звичайної і незвичайної, причому ці дві складові не можуть бути відокремлені одна від одної. В окремих випадках поширення строго уздовж або перпендикулярно шарам показано, що сімейство локалізованих мод розщеплюється на два набори, електромагнітне поле в кожному з яких описується тільки одним типом хвиль, звичайною або незвичайною модами. Показано, що при довільному напрямку поширення, крім випадку поширення строго уздовж шарів, дисперсійні криві містять ділянки з аномальною дисперсією. Залежно від кута поширення визначений частотний діапазон, в якому може спостерігатися аномальна дисперсія. Крім цього, проаналізовані дисперсійні криві, що представляють залежність частоти від однієї з проекцій хвильового вектора при фіксованому значенні іншої проекції. Показано, що при фіксованій проекції хвильового вектора поперек шарів аномальна дисперсія не спостерігається, а при певному значенні проекції вздовж шарів аномальна дисперсія спостерігається в широкому частотному діапазоні.

● Показано, що проходження терагерцевого випромінення крізь зразок може бути суттєво пригнічено за рахунок збудження локалізованих джозефсонівських мод у пластині. Залежність коефіцієнта поглинання енергії падаючої хвилі пластиною від кута падіння хвиль може мати один пік, два, або один уширений пік.

● Показано, що завдяки нелінійності рівнянь, що описують електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику, принцип суперпозиції мод не виконується. Це приводить до зміни ефективного тензора діелектричної проникності шаруватого надпровідника. Зокрема, стале магнітне поле і терагерцеві хвилі не є незалежними, і сталим полем можна впливати на розповсюдження локалізованих терагерцевих мод.

Результати, що викладені в даному розділі дисертації, можуть бути використані при проектуванні пристроїв терагерцевого діапазону.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено важливу задачу теоретичної фізики, а саме: виявлено специфічні особливості при поширенні, взаємодії, затуханні та декогеренції мод у лінійних та нелінійних квантових системах із скінченною кількістю ступенів вільності при врахуванні взаємодії з зовнішнім термостатом, джерелами адитивних та фазових шумів, одно- та двовимірних кристалічних системах, сильноанізотропних пластинах надпровідників, і досліджені ефекти, викликані цими модами.

Основні результати дисертаційної роботи сформульовані в наступних положеннях:

1. Розвинуто теоретичний метод відокремлення впливів адитивного і частотного шумів для аналізу динаміки квантової моди за наявності її затухання та декогеренції при збудженні системи на частоті, близькій до резонансу. Метод полягає у аналізі моментів старших порядків комплексної координати осцилятора, яку можна експериментально отримати за допомогою гомодинної схеми. Показано, як вивчення статистичних моментів старших порядків системи дозволяє виявити наявність різних шумів, що не є можливим виходячи з аналізу лише спектру відгуку. Отримані результати справедливі як для класичного, так і для квантового осцилятора. Цей метод дозволяє вивчати властивості відгуку систем на частотний шум навіть за наявності адитивного шуму, що має більший вплив на спектр системи.

2. Отримані аналітичні вирази для статистичних моментів старшого порядку комплексної координати моди за наявності частотного шуму з різними статистичними властивостями з урахуванням ефектів затухання та декогеренції. Отримані і проаналізовані асимптотичні вирази для моментів старших порядків та кореляційної функції комплексної координати у випадках гауссівського, пуассонівського та

телеграфного шумів. В граничному випадку слабкого шуму моменти координати виражені через моменти старших порядків частотного шуму. Проаналізовані вклади від нелінійних доданків у гамільтоніані осцилятора і показано, що їх вплив можна відокремити від впливу шумів. Показано, як аналіз саме старших моментів дозволяє характеризувати частотний шум, наявний у системі. Запропоновано схему проведення експериментальної перевірки отриманих закономірностей для механічного торсіонного мікрорезонатора і доведено можливість відокремлення частотного шуму від адитивного. Перевірено, що отримані теоретичні результати для старших моментів узгоджуються з експериментальними даними.

3. Побудовано теорію нелінійного відгуку гармонічної моди, дисперсійно зв'язаної з квантовою дворівневою системою. У наближенні середнього поля показано, що завдяки цьому зв'язку стани дворівневої системи і моди самоузгоджуються. Рівняння, які описують відгуки двох систем на зовнішнє збудження, мають декілька коренів, що призводить до мультистабільності. При монотонному зростанні і зменшенні зовнішньої сили, що забезпечує коливання моди, її амплітуда проявляє гістерезисні властивості, а при деяких амплітудах зовнішнього збудження можуть спостерігатися декілька станів системи. Зокрема, для випадку контакту з дворівневою системою, мода може проявляти бістабільність або тристабільність. Ця специфічна мультистабільність пояснена особливою ефективною нелінійністю моди, що є наслідком дисперсійного зв'язку з квантовою системою. Розрахована швидкість переходу системи між станами рівноваги поблизу точок біфуркації у квазікласичному наближенні.

4. Досліджено функцію розподілу коливальної системи за модами аргументальних коливань на прикладі маятника Дубошинського. Показано, що навіть у класичній аргументальній системі може формуватися псевдоквантовий спектр вимушених коливань під дією локалізованої сильнонелінійної зовнішньої сили. В залежності від параметрів системи і початкових умов коливань, зокрема, фази струму у котушці і енергії маятника, в системі може встановлюватися декілька станів вимушених коливань. Показано, що навіть при початковому відхиленні, яке

точно відповідає одній з амплітуд дискретного спектра, можливе встановлення і інших амплітуд зі спектра.

5. Вивчено ефект Казимира впливу квантових мод вакуума на взаємодію тонкої плівки та масивного тіла за наявності дисипацій при ненульовій температурі. Цей ефект призводить до виникнення сили тяжіння, яка складається з двох вкладів, радіаційного та дисипаційного. Загальні вирази для цих вкладів для випадку тяжіння тонкої плівки до масивного металу вперше отримані та проаналізовані у дисертації. Прозорість плівки для електромагнітних хвиль вакуума робить можливим досліджувати діелектричні властивості речовини плівки за допомогою вимірювання сили Казимира. Зокрема при монотонному збільшенні температури в залежності від параметрів плівки, її температури Дебая і залишкової частоти релаксації, сила Казимира може як монотонно зменшуватися, так і мати мінімум.

6. Досліджено вплив сили Казимира на точність спектроскопії Лемба-Діка ультрахолодних атомів стронція у фотонно-кристалічному волокні. Поправка до частоти за рахунок ефекту Казимира визначається відмінністю поляризованостей атома у двох станах, що відповідають переходу, геометрією його положення у фотонному кристалі у волокні, прозорістю і діелектричною проникністю речовини стінок волокна, а також температурою. Досліджено ширину спектральної лінії і вплив на неї різних факторів, зокрема ефекту Казимира взаємодії зі стінками порожнини та взаємодії атомів одного з іншим. Досліджено час декогеренції стану захопленого атома в залежності від часу його затримки у порожнині та відстані від місця його захоплення до краю порожнини. Оцінена точність оптичного атомного годинника, який побудований таким чином. Відносний вклад ефекту Казимира не перевищує $3 \cdot 10^{-18}$, в той час як у існуючих установках за рахунок інших факторів точність не перевищує 10^{-17}.

7. Побудовано теорію теплового транспорту у вігнерівському кристалі, що супроводжується взаємодією електронних мод. Показано, що саме нелінійність закону дисперсії і врахування міжмодового розсіювання дозволяє коректно описувати динаміку термічного врівноваження системи. Отримана теплопровідність

одновимірного вігнерівського кристалу з урахуванням ефектів міжмодового розсіювання. Зокрема, важливими є процеси, в яких при зіткненні одна з мод змінює напрямок свого поширення. Ці процеси вперше враховані в роботі і дозволили отримати характерну довжину розсіяння моди для системи.

8. Досліджено вплив густини електронних мод, локалізованих на потенціальному бар'єрі, створеному електричним полем, на електропровідність листа графена. На відміну від систем з квадратичним законом дисперсії, у графені існує симетрія по відношенню до заміни електронів на дірки, а потенціальної ями на бар'єр. Тому завдяки специфічній будові поверхні Фермі в графені існують моди, які локалізовані поблизу потенціального бар'єру і поширюються вздовж нього. Розраховано електропровідність листа графену у вигляді суми вкладів за модами.

9. Вивчено поширення локалізованих джозефсонівських мод у пластині шаруватого надпровідника, для довільного напрямку їх хвильового вектора по відношенню до площини шарів. Знайдено і проаналізовано закон дисперсії таких мод в залежності від параметрів системи. Зокрема, при зміні кута між хвильовим вектором і площиною шарів матеріалу дисперсійні криві можуть трансформуватися від монотонних до таких що мають максимум. Показано, що проходження терагерцевого випромінювання крізь зразок може бути суттєво пригнічено за рахунок збудження локалізованих джозефсонівських мод у пластині. Залежність коефіцієнта поглинання енергії падаючої хвилі пластиною від кута падіння хвиль може мати один пік, два, або один уширений пік. Окрім того, показано, що зовнішнє статичне магнітне поле за рахунок нелінійності джозефсонівської плазми вносить просторову неоднорідність в тензор ефективної діелектричної проникності, що може суттєво впливати на поширення лінійних мод у шаруватому надпровіднику.

Таким чином, усі поставлені завдання виконані, і мета дисертаційної роботи досягнута.

Одержані результати доповнюють і розширюють наявні уявлення про динаміку мод у квантових системах при наявності контакту з термостатом, іншими квантовими системами або модами, а також джерелами шумів. Ці результати можуть бути використані при проектуванні та оптимізації роботи нанопристроїв, систем зчитування інформації квантових комп'ютерів, в експериментальних установках спектроскопії, детектування мас макромолекул, метрології. Дослідження поширення мод у шаруватих надпровідниках можуть бути використані для побудови детекторів терагерцового діапазону, важливого у медицині та контролі навколишнього середовища.

ПОДЯКИ

На закінчення хочу висловити подяку моєму науковому консультанту, доктору фіз.-мат. наук, доценту Станіславу Сергійовичу Апостолову, а також доктору фіз.-мат. наук, професору, чл.-кор. НАН України Ямпольському В. О. за всебічну підтримку, допомогу в роботі над дисертацією, обговорення проблем сучасної теоретичної фізики, фізики надпровідності та фізики твердого тіла.

Також виражаю подяку всім своїм співавторам, доктору фіз.-мат. наук, професору, акад. НАН України, Яковенко В. М., доктору фіз.-мат. наук, професору, акад. НАН України, Шматько А. А., доктору фіз.-мат. наук, професору Макарову Н. М., професору Перес-Родрігесу Ф., професору Дикману М. І., професору Roukes M., професору Sun F., професору Zou J., професору Chan H. B., професору Rudner M., професору Okaba S., професору Takano T., професору Benabid F., професору Bradley T., професору Vincetti L., професору Katori H., професору Nori F., канд. фіз.-мат. наук Савєльєву С. Є., канд. фіз.-мат. наук Рохмановій Т. М., канд. фіз.-мат. наук Кадигробу Д. В., Шумаєву О. І., Левченко О. О., Мазанову М. В., Шимків Д. В., Квітці Н., за плідну співпрацю, участь в постановці наукових проблем та обговоренні результатів.

Я щиро вдячний всім співробітникам кафедри теоретичної фізики імені І. М. Ліфшиця Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна та співробітникам відділів теоретичної фізики та радіофізики твердого тіла Інституту радіофізики і електроніки імені О. Я. Усикова НАН України за корисні дискусії за темою дисертації. У нашому інституті завжди панує наукова атмосфера, всі дуже привітні і готові прийти на допомогу один одному в будь-якій ситуації, що сприяє успішним науковим дослідженням.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Tzou H. S., Bergman L. A. Dynamics and control of distributed systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 396 p.
2. Girvin S. M., Yang K. Modern condensed matter physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. 566 p.
3. Fabre C., Treps N. Modes and states in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.* 2020. Sep. Vol. 92. P. 035005.
4. Group P. D., Zyla P., Barnett R., Beringer J., Dahl O., Dwyer D. et al. Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics: Gauge and Higgs bosons*. 2020. 08. Vol. 2020, No. 8.
5. Kamihara Y., Hiramatsu H., Hirano M., Kawamura R., Yanagi H., Kamiya T., Hosono H. Iron-based layered superconductor: LaOFeP. *Journal of the American Chemical Society*. 2006. Vol. 128, No. 31. P. 10012–10013.
6. Gusynin V., Sharapov S., Carbotte J. AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics. *International Journal of Modern Physics B*. 2007. Vol. 21, No. 27. P. 4611–4658.
7. Wait J. R. Electromagnetic wave theory. New York: Harper & Row, 1985.
8. Maizelis Z., Roukes M., Dykman M. Detecting and characterizing frequency fluctuations of vibrational modes. *Phys. Rev. B*. 2011. Vol. 84, No. 14. P. 144301.
9. Maizelis Z. Electromechanical resonator under the influence of telegraph unbalanced frequency noise. *Telecomm. Radio. Eng.*. 2016. Vol. 75, No. 9. P. 811–821.

10. Sun F., Zou J., Maizelis Z. A., Chan H. B. Telegraph frequency noise in electromechanical resonators. *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 91, No. 17. P. 174102.

11. Maizelis Z., Rudner M., Dykman M. Vibration multistability and quantum switching for dispersive coupling. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 89, No. 15. P. 155439.

12. Shumaev A., Maizelis Z. Distribution functions of argumental oscillations of the Duboshinskiy pendulum. *J. Appl. Phys*. 2017. Vol. 121, No. 15. P. 154902.

13. Yampol'skii V., Savel'ev S., Mayselis Z., Apostolov S., Nori F. Anomalous temperature dependence of the Casimir force for thin metal films. *Phys. Rev. Lett*. 2008. Vol. 101, No. 9. P. 096803.

14. Yampol'skii V., Savel'ev S., Maizelis Z., Apostolov S., Nori F. Temperature dependence of the Casimir force for bulk lossy media. *Phys. Rev. A*. 2010. Vol. 82, No. 3. P. 032511.

15. Okaba S., Takano T., Benabid F., Bradley T., Vincetti L., Maizelis Z. et al. Lamb-Dicke spectroscopy of atoms in a hollow-core photonic crystal fibre. *Nature Comm*. 2014. Vol. 5, No. 1. P. 4096.

16. Apostolov S., Liu D. E., Maizelis Z., Levchenko A. Thermal transport and quench relaxation in nonlinear Luttinger liquids. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88, No. 4. P. 045435.

17. Yampol'skii V., Apostolov S., Maizelis Z., Levchenko A., Nori F. Voltage-driven quantum oscillations of conductance in graphene. *EPL (Europhys. Lett.)*. 2011. Vol. 96, No. 6. P. 67009.

18. Apostolov S., Kadygrob D., Maizelis Z., Rokhmanova T., Shmat'ko A., Yampol'skii V. Localized waves in layered superconductors. *Telecomm. Radio. Eng.*. 2019. Vol. 78, No. 7. P. 615–631.

19. Apostolov S., Maizelis Z., Shimkiv D., Shmat'ko A., Yampol'skii V. Anomalous dispersion of oblique terahertz waves localized in the plate of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2019. Vol. 45, No. 8. P. 885–893.

20. Mazanov M., Apostolov S., Maizelis Z., Makarov N., Shmat'ko A., Yampol'skii V. Resonant absorption of terahertz waves in layered superconductors: Wood's anomalies and anomalous dispersion. *Phys. Rev. B*. 2020. Vol. 101, No. 2. P. 024504.

21. Apostolov S., Maizelis Z., Makarov N., Pérez-Rodríguez F., Rokhmanova T., Yampol'skii V. Transmission of terahertz waves through layered superconductors controlled by a dc magnetic field. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 94, No. 2. P. 024513.

22. Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А., Савельев С. Е., Nori F. Немонотонная температурная зависимость силы Казимира для металлических нанопленок. *НТ-35*: тезисы докладов XXXV Совещания по физике низких температур, г. Черноголовка, Россия, 29 сентября – 9 октября 2009 г. Черноголовка, 2009. С. 220.

23. Yampol'skii V. A., Savel'ev S., Mayselis Z. A., Apostolov S. S., Nori F. Anomal temperature dependence of the Casimir force for thin metal films. *Modern Challenges in Microwave Superconductivity, Photonics and Electronics*: Proceedings of Mini-Colloquium and International Workshop, Kharkiv, Ukraine, 11–12 June 2009. Kharkv, 2009. P. 23.

24. Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А., Савельев С. Е., Nori F. Температурная зависимость силы казимировского притяжения металлических пластин конечных размеров. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали IX міжнародної конференції (м. Харків, 1–4 груд. 2009 р.). Kharkiv, 2009. С. 31.

25. Majzelis Z. O., Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Applying a dc magnetic field as a way to control the reflectance of layered superconductors. *ICPS 2014*: Proceedings of International Conference of Physics Students, Heidelberg, Germany, 10–17 August, 2014. Heidelberg, 2014. P. 22.

26. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Reflectivity of semi-infinite layered superconductors in presence of external dc magnetic field. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics* Proceedings of 14th Kharkiv

Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 14–17 October 2014. Kharkiv, 2014. P. 1.

27. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Transparency of finite-thickness layered superconductors controlled by dc magnetic field. *Open Readings 2015*: Proceedings of 58th Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences, Vilnius, Lithuania, 24–27 March, 2015. Vilnius, 2015. P. 64.

28. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Effect of dc magnetic field on reflectivity of layered superconductors. *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves*: Proceedings of 9th International Kharkiv Symposium, Kharkiv, Ukraine, 21–24 June, 2016. Kharkiv, 2016. P. 21.

29. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transmittance of THz waves through finite-thickness layered superconductors in the presence of external dc magnetic field. *Applied Physics and Engineering – 2016*: Proceedings of International Young Scientists Forum, Kharkiv, Ukraine, 10–14 October, 2016. Kharkiv, 2016. P. 23.

30. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Перес-Родригес Ф., Макаров Н. М., Ямпольский В. А. Отражение, прохождение и трансформация поляризации волн в слоистых сверхпроводниках. *Current problems in Solid State Physics*: Proceedings of International Jubilee Seminar, Kharkiv, Ukraine, 22–23 November, 2016. Kharkiv, 2016. С. 40–41.

31. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. dc magnetic field control of wave transformation in layered superconductors. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. P. 39.

32. Майзелис З. А. Тристабильность колебательной моды, связанной с двухуровневой системой. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XI міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 3–6 грудня 2013 р.). Харків, 2013. С. 1.

33. Sun F., Zou J., Maizelis Z., Chan H. B. Characterizing random telegraph frequency noise in a micromechanical oscillator. *APS March Meeting 2014*: Bulletin of the American Physical Society, Denver, Colorado, USA, 3–7 March, 2014. Denver, 2014. P. S24.00005.

34. Shymkiv D. V., Rokhmanova T., Maizelis Z. A., Kadygrob D. V., Apostolov S. S. Oblique localized Josephson plasma waves in a plate of layered superconductor. *Clusters and Nanostructured Materials (CNM-5)*: Proceedings of International meeting, Uzhgorod, Ukraine, 22–26 October 2018. Uzhgorod, 2018. P. 88–90.

35. Mazanov M. V., Apostolov S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Resonant absorption of electromagnetic waves accompanied by localized modes with anomalous dispersion in layered superconductors. *Low temperature physics – 2019*: Proceedings of 8th International Conference for for Professionals and Young Scientists, Kharkiv, Ukraine, 3–7 June 2019. Kharkiv, 2019. P. 83.

36. Апостолов С. С. Електродинамічні й оптичні явища в нормальних і надпровідних наносистемах: дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут». Харків, 2010. 113 с.

37. Апостолов С. С. Електромагнітний та електронний транспорт у надпровідних структурах: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук / Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут». Харків, 2019. 335 с.

38. Shearer P. M. Introduction to seismology. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 412 p.

39. Fabre C., Treps N. Modes and states in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.* 2020. Sep. Vol. 92. P. 035005.

40. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 р.

41. Kivshar Y. S., Flach S. Introduction: Nonlinear localized modes. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2003. Vol. 13, No. 2. P. 586–587.

42. Adesso G., Illuminati F. Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2007. Vol. 40, No. 28. P. 7821–7880.

43. Ansari V., Donohue J. M., Brecht B., Silberhorn C. Tailoring nonlinear processes for quantum optics with pulsed temporal-mode encodings. *Optica*. 2018. Vol. 5, No. 5. P. 534–550.

44. Korolkova N., Leuchs G. Quantum correlations in separable multi-mode states and in classically entangled light. *Reports on Progress in Physics*. 2019. Vol. 82, No. 5. P. 056001.

45. Sakoda K. Optical Properties of Photonic Crystals. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. 265 p.

46. Deshpande V. V., Bockrath M., Glazman L. I., Yacoby A. Electron liquids and solids in one dimension. *Nature*. 2010. Vol. 464, No. 7286. P. 209–216.

47. Katsnelson M. I. Graphene: carbon in two dimensions. Cambridge: Cambridge Uiversity Press, 2012.

48. Kleiner R., Steinmeyer F., Kunkel G., Müller P. Intrinsic Josephson effects in $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_8}$ single crystals. *Physical review letters*. 1992. Vol. 68, No. 15. P. 2394.

49. Schwab K. C., Roukes M. L. Putting mechanics into quantum mechanics. *Physics Today*. 2005. Vol. 58, No. 7. P. 36–42.

50. Steele G. A., Hüttel A. K., Witkamp B., Poot M., Meerwaldt H. B., Kouwenhoven L. P., van der Zant H. S. Strong coupling between single-electron

tunneling and nanomechanical motion. *Science*. 2009. Vol. 325, No. 5944. P. 1103–1107.

51. Lassagne B., Tarakanov Y., Kinaret J., Garcia-Sanchez D., Bachtold A. Coupling mechanics to charge transport in carbon nanotube mechanical resonators. *Science*. 2009. Vol. 325, No. 5944. P. 1107–1110.

52. Chan H. B., Aksyuk V. A., Kleiman R. N., Bishop D. J., Capasso F. Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the Casimir force. *Science*. 2001. Vol. 291, No. 5510. P. 1941–1944.

53. Anetsberger G., Gavartin E., Arcizet O., Unterreithmeier Q. P., Weig E. M., Gorodetsky M. L. et al. Measuring nanomechanical motion with an imprecision below the standard quantum limit. *Physical Review A*. 2010. Vol. 82, No. 6. P. 061804.

54. Jensen K., Kim K., Zettl A. An atomic-resolution nanomechanical mass sensor. *Nature nanotechnology*. 2008. Vol. 3, No. 9. P. 533–537.

55. Naik A. K., Hanay M., Hiebert W., Feng X., Roukes M. L. Towards single-molecule nanomechanical mass spectrometry. *Nature nanotechnology*. 2009. Vol. 4, No. 7. P. 445–450.

56. Lee J., Shen W., Payer K., Burg T. P., Manalis S. R. Toward attogram mass measurements in solution with suspended nanochannel resonators. *Nano letters*. 2010. Vol. 10, No. 7. P. 2537–2542.

57. Schuster D., Wallraff A., Blais A., Frunzio L., Huang R.-S., Majer J. et al. AC-Stark shift and dephasing of a superconducting qubit strongly coupled to a cavity field. *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 94, No. 12. P. 123602.

58. Gitterman M. Noisy Oscillator, The: The First Hundred Years, From Einstein Until Now. World Scientific, 2005. P. 144.

59. Clarke J., Wilhelm F. K. Superconducting quantum bits. *Nature*. 2008. Vol. 453, No. 7198. P. 1031–1042.

60. Li J., Silveri M., Kumar K., Pirkkalainen J.-M., Vepsäläinen A., Chien W. et al. Motional averaging in a superconducting qubit. *Nature communications*. 2013. Vol. 4, No. 1. P. 1–6.

61. Cleland A., Roukes M. Noise processes in nanomechanical resonators. *Journal of applied physics*. 2002. Vol. 92, No. 5. P. 2758–2769.

62. Kippenberg T. J., Vahala K. J. Cavity optomechanics: back-action at the mesoscale. *science*. 2008. Vol. 321, No. 5893. P. 1172–1176.

63. Faust T., Rieger J., Seitner M. J., Kotthaus J. P., Weig E. M. Coherent control of a classical nanomechanical two-level system. *Nature Physics*. 2013. Vol. 9, No. 8. P. 485–488.

64. Okamoto H., Gourgout A., Chang C.-Y., Onomitsu K., Mahboob I., Chang E. Y., Yamaguchi H. Coherent phonon manipulation in coupled mechanical resonators. *Nature Physics*. 2013. Vol. 9, No. 8. P. 480–484.

65. Giessibl F. J. Advances in atomic force microscopy. *Reviews of modern physics*. 2003. Vol. 75, No. 3. P. 949.

66. Sullivan D., Allan D., Howe D., Walls F. NIST technical note 1337: Characterization of clocks and oscillators. *National Institute of Standards and Technology*. 1990.

67. Rubiola E., Giordano V. On the 1/f frequency noise in ultra-stable quartz oscillators. 2006 IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition / IEEE. 2006. P. 759–766.

68. Van Kampen N. G. Stochastic differential equations. *Physics reports*. 1976. Vol. 24, No. 3. P. 171–228.

69. Yong Y. K., Vig J. R. Resonator surface contamination-a cause of frequency fluctuations?. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*. 1989. Vol. 36, No. 4. P. 452–458.

70. Yong Y. K., Vig J. R. Modeling resonator frequency fluctuations induced by adsorbing and desorbing surface molecules. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*. 1990. Vol. 37, No. 6. P. 543–550.

71. Dykman M., Khasin M., Portman J., Shaw S. Spectrum of an oscillator with jumping frequency and the interference of partial susceptibilities. *Physical review letters*. 2010. Vol. 105, No. 23. P. 230601.

72. Atalaya J., Isacsson A., Dykman M. Diffusion-induced dephasing in nanomechanical resonators. *Physical Review B*. 2011. Vol. 83, No. 4. P. 045419.

73. Yang Y., Callegari C., Feng X., Roukes M. Surface adsorbate fluctuations and noise in nanoelectromechanical systems. *Nano letters*. 2011. Vol. 11, No. 4. P. 1753–1759.

74. Gao J., Daal M., Martinis J. M., Vayonakis A., Zmuidzinas J., Sadoulet B. et al. A semiempirical model for two-level system noise in superconducting microresonators. *Applied Physics Letters*. 2008. Vol. 92, No. 21. P. 212504.

75. Dykman M., Krivoglaz M. Theory of nonlinear oscillator interacting with a medium. *Soviet Physics Reviews*. 1984. Vol. 5. P. 265–442.

76. Hanay M. S., Kelber S., Naik A., Chi D., Hentz S., Bullard E. et al. Single-protein nanomechanical mass spectrometry in real time. *Nature nanotechnology*. 2012. Vol. 7, No. 9. P. 602.

77. Ekinci K., Huang X., Roukes M. Ultrasensitive nanoelectromechanical mass detection. *Applied Physics Letters*. 2004. Vol. 84, No. 22. P. 4469–4471.

78. Clerk A., Marquardt F., Harris J. Quantum measurement of phonon shot noise. *Physical review letters*. 2010. Vol. 104, No. 21. P. 213603.

79. Gao J., Zmuidzinas J., Mazin B. A., LeDuc H. G., Day P. K. Noise properties of superconducting coplanar waveguide microwave resonators. *Applied Physics Letters*. 2007. Vol. 90, No. 10. P. 102507.

80. Fong K. Y., Pernice W. H., Tang H. X. Frequency and phase noise of ultrahigh ***q*** silicon nitride nanomechanical resonators. *Physical Review B*. 2012. Vol. 85, No. 16. P. 161410.

81. Sazonova V., Yaish Y., Üstünel H., Roundy D., Arias T. A., McEuen P. L. A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator. *Nature*. 2004. Vol. 431, No. 7006. P. 284–287.

82. Bunch J. S., Van Der Zande A. M., Verbridge S. S., Frank I. W., Tanenbaum D. M., Parpia J. M. et al. Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science*. 2007. Vol. 315, No. 5811. P. 490–493.

83. Eichler A., Moser J., Chaste J., Zdrojek M., Wilson-Rae I., Bachtold A. Nonlinear damping in mechanical resonators made from carbon nanotubes and graphene. *Nature nanotechnology*. 2011. Vol. 6, No. 6. P. 339–342.

84. Sullivan D. B., Allan D. W., Howe D. A., Walls F. L. Characterization of clocks and oscillators. Washigton: National Institute of Standards and Technology Technical Note, 1990. P. 1337.

85. Konstantinov O., Perel V. A graphical technique for computation of kinetic quantities. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. 1960. Vol. 39. P. 197.

86. Dykman M., Platzman P. Theory of cyclotron resonance of two-dimensional electrons interacting with surface and volume phonons. *Phys. Status Solidi B*. 1978. Vol. 88. P. 463.

87. Schwinger J. Brownian motion of a quantum oscillator. *Journal of Mathematical Physics*. 1961. Vol. 2, No. 3. P. 407–432.

88. Zel'dovich B. Y., Perelomov A., Popov V. Relaxation of a quantum oscillator. *JETP Lett*. 1969. Vol. 28, No. 2.

89. Zel'dovich B. Y., Perelomov A., Popov V. Relaxation of a quantum oscillator in the presence of an external force. *JETP Lett*. 1969. Vol. 57. P. 196–206.

90. Dykman M., Krivoglaz M. Quantum theory of nonlinear oscillators interacting with a medium. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. 1973. Vol. 64. P. 993–1006.

91. Los' V. F. Superoperator method in the theory of an oscillator which interacts weakly with a medium. i. general results. *Theoretical and Mathematical Physics*. 1978. Vol. 35. P. 352–361.

92. Haroche S., Raimond J.-M. Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons. Oxford: Oxford University Press, 2006.

93. Schuster D., Houck A. A., Schreier J., Wallraff A., Gambetta J., Blais A. et al. Resolving photon number states in a superconducting circuit. *Nature*. 2007. Vol. 445, No. 7127. P. 515–518.

94. Thompson J., Zwickl B., Jayich A., Marquardt F., Girvin S., Harris J. Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane. *Nature*. 2008. Vol. 452, No. 7183. P. 72–75.

95. Vijay R., Devoret M., Siddiqi I. Invited review article: The Josephson bifurcation amplifier. *Review of Scientific Instruments*. 2009. Vol. 80, No. 11. P. 111101.

96. LaHaye M., Suh J., Echternach P., Schwab K. C., Roukes M. L. Nanomechanical measurements of a superconducting qubit. *Nature*. 2009. Vol. 459, No. 7249. P. 960–964.

97. Clerk A. A., Devoret M. H., Girvin S. M., Marquardt F., Schoelkopf R. J. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Reviews of Modern Physics*. 2010. Vol. 82, No. 2. P. 1155.

98. Petersson K. D., McFaul L. W., Schroer M. D., Jung M., Taylor J. M., Houck A. A., Petta J. R. Circuit quantum electrodynamics with a spin qubit. *Nature*. 2012. Vol. 490, No. 7420. P. 380–383.

99. Eichenfield M., Chan J., Safavi-Naeini A. H., Vahala K. J., Painter O. Modeling dispersive coupling and losses of localized optical and mechanical modes in optomechanical crystals. *Optics express*. 2009. Vol. 17, No. 22. P. 20078–20098.

100. Weiss T., Bruder C., Nunnenkamp A. Strong-coupling effects in dissipatively coupled optomechanical systems. *New journal of physics*. 2013. Vol. 15, No. 4. P. 045017.

101. Landa P. S., Duboshinskiĭ Y. B. Self-oscillatory systems with high-frequency energy sources. *Soviet Physics Uspekhi*. 1989. Vol. 32, No. 8. P. 723.

102. Tennenbaum J. Amplitude quantization as an elementary property of macroscopic vibrating systems. *21st century science and technology*. 2006. Vol. 18, No. 4. P. 50.

103. Landa P. Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems. Kluwer Academic Publishers, 1996. P. 538.

104. Bevivino J. The path from the simple pendulum to chaos. *Dynamics at the Horsetooth*. 2009. Vol. 1, No. 1. P. 1–24.

105. Hubbard J. H. The forced damped pendulum: Chaos, complication and control. *CODEE newsletter*. 1995. P. 3–11.

106. Damgov V., Popov I. "discrete"oscillations and multiple attractors in kick-excited systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2000. Vol. 4.

107. Doubochinski D., Duboshinski Y. B., Magarchak A., Chabanski V. Discrete modes of a system subject to an inhomogeneous high-frequency force. *Zh. Tech. Fiz*. 1979. Vol. 49. P. 1160.

108. Doubochinski D., Tennenbaum J. On the general nature of physical objects and their interactions, as suggested by the properties of argumentally-coupled oscillating systems. *arXiv preprint arXiv:0808.1205*. 2008.

109. Casimir H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Vol. 51. 1948. P. 793.

110. Plunien G., Müller B., Greiner W. The Casimir effect. *Physics Reports*. 1986. Vol. 134, No. 2-3. P. 87–193.

111. Elizalde E., Romeo A. Essentials of the Casimir effect and its computation. *American Journal of Physics*. 1991. Vol. 59, No. 8. P. 711–719.

112. Krech M. The Casimir effect in critical systems. Singapore: World Scientific, 1994.

113. Mostepanenko V. M., Trunov N. The Casimir effect and its applications. Oxford: Oxford University Press, 1997.

114. Milonni P. W. The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics. Academic press, 2013.

115. Milton K. Physical manifestations of zero-point energy, the Casimir effect. 2001.

116. Kardar M., Golestanian R. The "friction"of vacuum, and other fluctuation-induced forces. *Reviews of Modern Physics*. 1999. Vol. 71, No. 4. P. 1233.

117. Capasso F., Munday J. N., Iannuzzi D., Chan H. B. Casimir forces and quantum electrodynamical torques: Physics and nanomechanics. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 2007. Vol. 13, No. 2. P. 400–414.

118. Cattuto C., Brito R., Marconi U. M. B., Nori F., Soto R. Fluctuation-induced Casimir forces in granular fluids. *Physical review letters*. 2006. Vol. 96, No. 17. P. 178001.

119. Лифшиц Е. М. Теория молекулярных сил притяжения между твердыми телами. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1955. Т. 29, № 1. С. 711–719.

120. Dubrava V., Yampol'skii V. The temperature effect in the Casimir attraction of a thin metal film. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2000. Vol. 33, No. 28. P. L243.

121. Дубарева В. Н., Ямпольский В. А., Любимов О. И. Эффект Казимира в тонких металлических ленках. *Радиофизика и электроника*. 1999. Vol. 4, No. 1. P. 70–76.

122. Dubrava V., Yampol'skii V., Lyubimov O. The Casimir attraction between thin metal films. *Telecommunications and Radio Engineering*. 1999. Vol. 53, No. 9-10.

123. Дубарева В. Н., Ямпольский В. А. Феноменологическая модель казимировского притяжения металлической пленки. *Физика низких температур*. 1999. Vol. 25, No. 12. P. 1304–1312.

124. Дубарева В. Н., Любимов О. И., Ямпольский В. А. Роль дисперсионных свойств металлической пленки в ее казимировском притяжении. *Доклады Национальной Академии Наук Украины*. 2000. No. 1. P. 57–61.

125. Klimchitskaya G., Roy A., Mohideen U., Mostepanenko V. Complete roughness and conductivity corrections for Casimir force measurement. *Physical Review A*. 1999. Vol. 60, No. 5. P. 3487.

126. Chen F., Klimchitskaya G., Mohideen U., Mostepanenko V. Theory confronts experiment in the Casimir force measurements: Quantification of errors and precision. *Physical Review A*. 2004. Vol. 69, No. 2. P. 022117.

127. Decca R., López D., Fischbach E., Klimchitskaya G., Krause D., Mostepanenko V. M. Precise comparison of theory and new experiment for the Casimir force leads to stronger constraints on thermal quantum effects and long-range interactions. *Annals of Physics*. 2005. Vol. 318, No. 1. P. 37–80.

128. Iannuzzi D., Lisanti M., Munday J. N., Capasso F. Quantum fluctuations in the presence of thin metallic films and anisotropic materials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2006. Vol. 39, No. 21. P. 6445.

129. Munday J. N., Capasso F. Precision measurement of the Casimir-Lifshitz force in a fluid. *Physical Review A*. 2007. Vol. 75, No. 6. P. 060102.

130. Chan H., Aksyuk V., Kleiman R., Bishop D., Capasso F. Nonlinear micromechanical Casimir oscillator. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 87, No. 21. P. 211801.

131. Sernelius B. E., Boström M. Comment on "Casimir force at both nonzero temperature and finite conductivity". *Physical review letters*. 2001. Vol. 87, No. 25. P. 259101.

132. Bezerra V., Klimchitskaya G., Mostepanenko V. Correlation of energy and free energy for the thermal Casimir force between real metals. *Physical Review A*. 2002. Vol. 66, No. 6. P. 062112.

133. Chen F., Klimchitskaya G., Mohideen U., Mostepanenko V. New features of the thermal Casimir force at small separations. *Physical review letters*. 2003. Vol. 90, No. 16. P. 160404.

134. Genet C., Lambrecht A., Reynaud S. Casimir force and the quantum theory of lossy optical cavities. *Physical Review A*. 2003. Vol. 67, No. 4. P. 043811.

135. Klimchitskaya G., Mostepanenko V. Comment on "analytical and numerical verification of the nernst theorem for metals". *Physical Review E*. 2008. Vol. 77, No. 2. P. 023101.

136. Svetovoy V. B. Application of the lifshitz theory to poor conductors. *Physical review letters*. 2008. Vol. 101, No. 16. P. 163603.

137. Vetsch E., Reitz D., Sagué G., Schmidt R., Dawkins S., Rauschenbeutel A. Optical interface created by laser-cooled atoms trapped in the evanescent field surrounding an optical nanofiber. *Physical review letters*. 2010. Vol. 104, No. 20. P. 203603.

138. Wang Y., Wheeler N. V., Couny F., Roberts P., Benabid F. Low loss broadband transmission in hypocycloid-core kagome hollow-core photonic crystal fiber. *Optics letters*. 2011. Vol. 36, No. 5. P. 669–671.

139. Benabid F., Roberts P. Linear and nonlinear optical properties of hollow core photonic crystal fiber. *Journal of Modern Optics*. 2011. Vol. 58, No. 2. P. 87–124.

140. Knabe K., Wu S., Lim J., Tillman K. A., Light P. S., Couny F. et al. 10 kHz accuracy of an optical frequency reference based on $^{12}C_2H_2$-filled large-core

kagome photonic crystal fibers. *Optics express*. 2009. Vol. 17, No. 18. P. 16017–16026.

141. Bajcsy M., Hofferberth S., Peyronel T., Balic V., Liang Q., Zibrov A. et al. Laser-cooled atoms inside a hollow-core photonic-crystal fiber. *Physical Review A*. 2011. Vol. 83, No. 6. P. 063830.

142. Goban A., Choi K., Alton D., Ding D., Lacroûte C., Pototschnig M. et al. Demonstration of a state-insensitive, compensated nanofiber trap. *Physical Review Letters*. 2012. Vol. 109, No. 3. P. 033603.

143. Katori H. Optical lattice clocks and quantum metrology. *Nature Photonics*. 2011. Vol. 5, No. 4. P. 203–210.

144. Gill P. When should we change the definition of the second?. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2011. Vol. 369, No. 1953. P. 4109–4130.

145. Derevianko A., Obreshkov B., Dzuba V. Mapping out atom-wall interaction with atomic clocks. *Physical review letters*. 2009. Vol. 103, No. 13. P. 133201.

146. Nayak K., Melentiev P., Morinaga M., Le Kien F., Balykin V., Hakuta K. Optical nanofiber as an efficient tool for manipulating and probing atomic fluorescence. *Optics express*. 2007. Vol. 15, No. 9. P. 5431–5438.

147. Ido T., Katori H. Recoil-free spectroscopy of neutral Sr atoms in the Lamb-Dicke regime. *Physical review letters*. 2003. Vol. 91, No. 5. P. 053001.

148. Drozdowski R., Ignaciuk M., Kwela J., Heldt J. Radiative lifetimes of the lowest $^3p_1$ metastable states of Ca and Sr. *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters*. 1997. Vol. 41, No. 2. P. 125–131.

149. Ido T., Loftus T. H., Boyd M. M., Ludlow A. D., Holman K. W., Ye J. Precision spectroscopy and density-dependent frequency shifts in ultracold Sr. *Physical review letters*. 2005. Vol. 94, No. 15. P. 153001.

150. Katori H., Takamoto M., Pal'Chikov V., Ovsiannikov V. Ultrastable optical clock with neutral atoms in an engineered light shift trap. *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 91, No. 17. P. 173005.

151. Akatsuka T., Takamoto M., Katori H. Optical lattice clocks with non-interacting bosons and fermions. *Nature Physics*. 2008. Vol. 4, No. 12. P. 954–959.

152. Mattis D. C. The many-body problem: an encyclopedia of exactly solved models in one dimension. Singapore: World Scientific, 1993.

153. Sutherland B. Beautiful models: 70 years of exactly solved quantum many-body problems. Singapore: World Scientific, 2004.

154. Tomonaga S.-i. Remarks on Bloch's method of sound waves applied to many-fermion problems. *Progress of Theoretical Physics*. 1950. Vol. 5, No. 4. P. 544–569.

155. Luttinger J. An exactly soluble model of a many-fermion system. *Journal of mathematical physics*. 1963. Vol. 4, No. 9. P. 1154–1162.

156. Venkataraman L., Hong Y. S., Kim P. Electron transport in a multichannel one-dimensional conductor: molybdenum selenide nanowires. *Physical review letters*. 2006. Vol. 96, No. 7. P. 076601.

157. Auslaender O., Steinberg H., Yacoby A., Tserkovnyak Y., Halperin B., Baldwin K. et al. Spin-charge separation and localization in one dimension. *Science*. 2005. Vol. 308, No. 5718. P. 88–92.

158. Chen Y.-F., Dirks T., Al-Zoubi G., Birge N. O., Mason N. Nonequilibrium tunneling spectroscopy in carbon nanotubes. *Physical review letters*. 2009. Vol. 102, No. 3. P. 036804.

159. Barak G., Steinberg H., Pfeiffer L. N., West K. W., Glazman L., Von Oppen F., Yacoby A. Interacting electrons in one dimension beyond the Luttinger-liquid limit. *Nature Physics*. 2010. Vol. 6, No. 7. P. 489–493.

160. Granger G., Eisenstein J., Reno J. Observation of chiral heat transport in the quantum hall regime. *Physical review letters*. 2009. Vol. 102, No. 8. P. 086803.

161. Altimiras C., Le Sueur H., Gennser U., Cavanna A., Mailly D., Pierre F. Non-equilibrium edge-channel spectroscopy in the integer quantum hall regime. *Nature Physics*. 2010. Vol. 6, No. 1. P. 34–39.

162. Thomas K., Nicholls J., Appleyard N., Simmons M., Pepper M., Mace D. et al. Interaction effects in a one-dimensional constriction. *Physical Review B*. 1998. Vol. 58, No. 8. P. 4846.

163. Kristensen A., Bruus H., Hansen A. E., Jensen J., Lindelof P., Marckmann C. et al. Bias and temperature dependence of the 0.7 conductance anomaly in quantum point contacts. *Physical Review B*. 2000. Vol. 62, No. 16. P. 10950.

164. Cronenwett S., Lynch H., Goldhaber-Gordon D., Kouwenhoven L., Marcus C., Hirose K. et al. Low-temperature fate of the 0.7 structure in a point contact: A Kondo-like correlated state in an open system. *Physical review letters*. 2002. Vol. 88, No. 22. P. 226805.

165. Reilly D. J., Facer G. R., Dzurak A. S., Kane B., Clark R., Stiles P. et al. Many-body spin-related phenomena in ultra low-disorder quantum wires. *Physical Review B*. 2001. Vol. 63, No. 12. P. 121311.

166. Crook R., Prance J., Thomas K., Chorley S., Farrer I., Ritchie D. et al. Conductance quantization at a half-integer plateau in a symmetric GaAs quantum wire. *Science*. 2006. Vol. 312, No. 5778. P. 1359–1362.

167. Chiatti O., Nicholls J., Proskuryakov Y., Lumpkin N., Farrer I., Ritchie D. Quantum thermal conductance of electrons in a one-dimensional wire. *Physical review letters*. 2006. Vol. 97, No. 5. P. 056601.

168. Wakeham N., Bangura A. F., Xu X., Mercure J.-F., Greenblatt M., Hussey N. E. Gross violation of the Wiedemann-Franz law in a quasi-one-dimensional conductor. *Nature communications*. 2011. Vol. 2, No. 1. P. 1–6.

169. Imambekov A., Glazman L. I. Universal theory of nonlinear Luttinger liquids. *Science*. 2009. Vol. 323, No. 5911. P. 228–231.

170. Imambekov A., Schmidt T. L., Glazman L. I. One-dimensional quantum liquids: Beyond the Luttinger liquid paradigm. *Reviews of Modern Physics*. 2012. Vol. 84, No. 3. P. 1253.

171. Kane C., Fisher M. P. Thermal transport in a Luttinger liquid. *Physical review letters*. 1996. Vol. 76, No. 17. P. 3192.

172. Garg A., Rasch D., Shimshoni E., Rosch A. Large violation of the Wiedemann-Franz law in Luttinger liquids. *Physical review letters*. 2009. Vol. 103, No. 9. P. 096402.

173. Fazio R., Hekking F., Khmelnitskii D. Anomalous thermal transport in quantum wires. *Physical review letters*. 1998. Vol. 80, No. 25. P. 5611.

174. Krive I. Thermal transport through Luttinger liquid constriction. *Low Temperature Physics*. 1998. Vol. 24, No. 5. P. 377–379.

175. Gutman D., Gefen Y., Mirlin A. Tunneling spectroscopy of Luttinger-liquid structures far from equilibrium. *Physical Review B*. 2009. Vol. 80, No. 4. P. 045106.

176. Maslov D. L., Stone M. Landauer conductance of Luttinger liquids with leads. *Physical Review B*. 1995. Vol. 52, No. 8. P. R5539.

177. Gramada A., Raikh M. Randomly inhomogeneous Luttinger liquid: Fluctuations of the tunnel conductance. *Physical Review B*. 1997. Vol. 55, No. 12. P. 7673.

178. Schulz H. Wigner crystal in one dimension. *Physical review letters*. 1993. Vol. 71, No. 12. P. 1864.

179. Matveev K. A. Conductance of a quantum wire at low electron density. *Physical Review B*. 2004. Vol. 70, No. 24. P. 245319.

180. Deshpande V. V., Bockrath M. The one-dimensional Wigner crystal in carbon nanotubes. *Nature Physics*. 2008. Vol. 4, No. 4. P. 314–318.

181. Hew W., Thomas K., Pepper M., Farrer I., Anderson D., Jones G., Ritchie D. Incipient formation of an electron lattice in a weakly confined quantum wire. *Physical review letters*. 2009. Vol. 102, No. 5. P. 056804.

182. Yamamoto M., Takagi H., Stopa M., Tarucha S. Hydrodynamic rectified drag current in a quantum wire induced by Wigner crystallization. *Physical Review B*. 2012. Vol. 85, No. 4. P. 041308.

183. Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S. V. et al. Electric field effect in atomically thin carbon films. *science*. 2004. Vol. 306, No. 5696. P. 666–669.

184. Zhang Y., Tan Y.-W., Stormer H. L., Kim P. Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene. *Nature*. 2005. Vol. 438, No. 7065. P. 201–204.

185. Katsnelson M., Novoselov K., Geim A. Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene. *Nature physics*. 2006. Vol. 2, No. 9. P. 620–625.

186. Beenakker C. Specular Andreev reflection in graphene. *Physical review letters*. 2006. Vol. 97, No. 6. P. 067007.

187. Titov M., Beenakker C. W. Josephson effect in ballistic graphene. *Physical Review B*. 2006. Vol. 74, No. 4. P. 041401.

188. Lukose V., Shankar R., Baskaran G. Novel electric field effects on Landau levels in graphene. *Physical review letters*. 2007. Vol. 98, No. 11. P. 116802.

189. Cheianov V. V., Fal'ko V., Altshuler B. The focusing of electron flow and a veselago lens in graphene *p-n* junctions. *Science*. 2007. Vol. 315, No. 5816. P. 1252–1255.

190. Geim A., Novoselov K. The rise of graphene. *Naturematerials*. 2007. Vol. 6. P. 183–191.

191. Beenakker C. Colloquium: Andreev reflection and Klein tunneling in graphene. *Reviews of Modern Physics*. 2008. Vol. 80, No. 4. P. 1337.

192. Neto A. C., Guinea F., Peres N. M., Novoselov K. S., Geim A. K. The electronic properties of graphene. *Reviews of modern physics*. 2009. Vol. 81, No. 1. P. 109.

193. Williams J., DiCarlo L., Marcus C. Quantum Hall effect in a gate-controlled pn junction of graphene. *Science*. 2007. Vol. 317, No. 5838. P. 638–641.

194. DiCarlo L., Williams J., Zhang Y., McClure D., Marcus C. Shot noise in graphene. *Physical review letters*. 2008. Vol. 100, No. 15. P. 156801.

195. Fogler M. M., Novikov D. S., Glazman L., Shklovskii B. I. Effect of disorder on a graphene p-n junction. *Physical Review B*. 2008. Vol. 77, No. 7. P. 075420.

196. Bliokh Y. P., Freilikher V., Savel'ev S., Nori F. Transport and localization in periodic and disordered graphene superlattices. *Physical Review B*. 2009. Vol. 79, No. 7. P. 075123.

197. Rozhkov A., Savel'ev S., Nori F. Electronic properties of armchair graphene nanoribbons. *Physical Review B*. 2009. Vol. 79, No. 12. P. 125420.

198. Itzykson C., Zuber J. Quantum Field Theory. Dover Publications, 2006.

199. Calogeracos A., Dombey N. History and physics of the Klein paradox. *Contemporary physics*. 1999. Vol. 40, No. 5. P. 313–321.

200. Cserti J., Pályi A., Péterfalvi C. Caustics due to a negative refractive index in circular graphene p-n junctions. *Physical review letters*. 2007. Vol. 99, No. 24. P. 246801.

201. Silvestrov P., Efetov K. Quantum dots in graphene. *Physical review letters*. 2007. Vol. 98, No. 1. P. 016802.

202. Huard B., Sulpizio J., Stander N., Todd K., Yang B., Goldhaber-Gordon D. Transport measurements across a tunable potential barrier in graphene. *Physical review letters*. 2007. Vol. 98, No. 23. P. 236803.

203. Lemme M. C., Echtermeyer T. J., Baus M., Kurz H. A graphene field-effect device. *IEEE Electron Device Letters*. 2007. Vol. 28, No. 4. P. 282–284.

204. Pauling L. The Nature of the Chemical Bond. Cornell U.P., 1972.

205. Wallace P. R. The band theory of graphite. *Physical review*. 1947. Vol. 71, No. 9. P. 622.

206. Slonczewski J., Weiss P. Band structure of graphite. *Physical Review*. 1958. Vol. 109, No. 2. P. 272.

207. McClure J. Band structure of graphite and de Haas-van Alphen effect. *Physical Review*. 1957. Vol. 108, No. 3. P. 612.

208. McClure J. Analysis of multicarrier galvanomagnetic data for graphite. *Physical Review*. 1958. Vol. 112, No. 3. P. 715.

209. Williamson S., Foner S., Dresselhaus M. de Haas-van Alphen effect in pyrolytic and single-crystal graphite. *Physical Review*. 1965. Vol. 140, No. 4A. P. A1429.

210. Boyle W., Nozières P. Band structure and infrared absorption of graphite. *Physical Review*. 1958. Vol. 111, No. 3. P. 782.

211. Spry W., Scherer P. de Haas-Van Alphen effect in graphite between 3 and 85 kilogauss. *Physical Review*. 1960. Vol. 120, No. 3. P. 826.

212. Schroeder P., Dresselhaus M., Javan A. Location of electron and hole carriers in graphite from laser magnetoreflection data. *Physical Review Letters*. 1968. Vol. 20, No. 23. P. 1292.

213. Reich S., Maultzsch J., Thomsen C., Ordejon P. Tight-binding description of graphene. *Physical Review B*. 2002. Vol. 66, No. 3. P. 035412.

214. Deacon R., Chuang K.-C., Nicholas R., Novoselov K., Geim A. Cyclotron resonance study of the electron and hole velocity in graphene monolayers. *Physical Review B*. 2007. Vol. 76, No. 8. P. 081406.

215. Katsnelson M., Novoselov K. Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics. *Solid State Communications*. 2007. Vol. 143, No. 1-2. P. 3–13.

216. Peres N., Guinea F., Neto A. C. Electronic properties of disordered two-dimensional carbon. *Physical Review B*. 2006. Vol. 73, No. 12. P. 125411.

217. Gusynin V., Sharapov S. Unconventional integer quantum Hall effect in graphene. *Physical review letters*. 2005. Vol. 95, No. 14. P. 146801.

218. Mills D. L. Nonlinear optics: basic concepts. Springer, 2012.

219. Rajaraman R. Solitons and instantons. An introduction to solitons and instantons in quantum field theory. North Holland, 1987. P. 418.

220. Tonouchi M. Cutting-edge terahertz technology. *Nature photonics*. 2007. Vol. 1, No. 2. P. 97–105.

221. Capasso F., Gmachl C., Sivco D. L., Cho A. Y. Quantum cascade lasers. *Physics Today*. 2002. Vol. 55, No. 5. P. 34–40.

222. Koshelets V., Shitov S. Integrated superconducting receivers. *Superconductor Science and Technology*. 2000. Vol. 13, No. 5. P. R53.

223. Kleiner R. Filling the terahertz gap. *Science*. 2007. Vol. 318, No. 5854. P. 1254–1255.

224. Wollman D. A., Van Harlingen D. J., Lee W. C., Ginsberg D. M., Leggett A. J. Experimental determination of the superconducting pairing state in YBCO from the phase coherence of YBCO-Pb dc SQUIDs. *Phys. Rev. Lett*. 1993. Vol. 71. P. 2134–2137.

225. Wollman D. A., Van Harlingen D. J., Giapintzakis J., Ginsberg D. M. Evidence for $d_{x^2-y^2}$ pairing from the magnetic field modulation of $\mathrm{YBa_2Cu_3O_7}$-Pb Josephson junctions. *Phys. Rev. Lett*. 1995. Vol. 74. P. 797–800.

226. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. Москва: МЦНОМ, 2000. 402 с.

227. Kohn W., Luttinger J. M. New mechanism for superconductivity. *Phys. Rev. Lett*. 1965. Vol. 15. P. 524–526.

228. Chubukov A. Pairing mechanism in Fe-based superconductors. *Annu. Rev. Con. Mat. Phys*. 2012. Vol. 3, No. 1. P. 57–92.

229. Savel'ev S., Yampol'skii V., Rakhmanov A., Nori F. Terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum, generation, nonlinear and quantum phenomena. *Reports on Progress in Physics*. 2010. Vol. 73, No. 2. P. 026501.

230. Apostolov S., Kadygrob D., Maizelis Z., Nikolaenko A., Shmatko A., Yampol'skii V. Normal and anomalous dispersion of weakly non-linear localized modes in a slab of a layered superconductive material. *Radio physics and electronics*. 2017. Vol. 77, No. 2. P. 131–144.

231. Apostolov S., Kadygrob D., Maizelis Z., Nikolaenko A., Yampol'skii V. Nonlinear localized modes in a plate of a layered superconductor. *Low Temperature Physics*. 2018. Vol. 44, No. 3. P. 238–246.

232. Yampol'skii V., Gulevich D., Savel'ev S., Nori F. Surface plasma waves across the layers of intrinsic Josephson junctions. *Physical Review B*. 2008. Vol. 78, No. 5. P. 054502.

233. Kadygrob D., Golick V., Yampol'skii V., Slipchenko T., Gulevich D. R., Savel'ev S. Excitation of surface plasma waves across the layers of intrinsic Josephson junctions. *Physical Review B*. 2009. Vol. 80, No. 18. P. 184512.

234. Rokhmanova T., Apostolov S., Kvitka N., Yampol'skii V. Effect of a magnetic field on the anomalous dispersion of localized Josephson plasma modes in layered superconductors. *Low Temperature Physics*. 2018. Vol. 44, No. 6. P. 552–560.

235. Apostolov S., Makarov N., Yampol'skii V. Excitation of terahertz modes localized on a layered superconductor: Anomalous dispersion and resonant transmission. *Physical Review B*. 2018. Vol. 97, No. 2. P. 024510.

236. Yampol'skii V., Kats A., Nesterov M., Nikitin A. Y., Slipchenko T., Savel'ev S., Nori F. Resonance effects due to the excitation of surface Josephson plasma waves in layered superconductors. *Physical Review B*. 2009. Vol. 79, No. 21. P. 214501.

237. Apostolov S., Maizelis Z., Sorokina M., Yampol'skiĭ V. Nonlinear wood anomalies in the reflectivity of layered superconductors. *Low Temperature Physics*. 2010. Vol. 36, No. 3. P. 199–204.

238. Averkov Y. O., Yakovenko V., Yampol'skii V., Nori F. Conversion of terahertz wave polarization at the boundary of a layered superconductor due to the resonance excitation of oblique surface waves. *Physical review letters*. 2012. Vol. 109, No. 2. P. 027005.

239. Averkov Y. O., Yakovenko V. M., Yampol'skii V. A., Nori F. Oblique surface Josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2013. Feb. Vol. 87. P. 054505.

240. Golick V., Kadygrob D., Yampol'skii V., Rakhmanov A., Ivanov B., Nori F. Surface Josephson plasma waves in layered superconductors above the plasma frequency: evidence for a negative index of refraction. *Physical review letters*. 2010. Vol. 104, No. 18. P. 187003.

241. Apostolov S., Havrilenko V., Maizelis Z., Yampol'skii V. Anomalous dispersion of surface and waveguide modes in layered superconductor slabs. *Low Temperature Physics*. 2017. Vol. 43, No. 2. P. 296–302.

242. Shelby R. A., Smith D. R., Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction. *science*. 2001. Vol. 292, No. 5514. P. 77–79.

243. Pendry J. B. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical review letters*. 2000. Vol. 85, No. 18. P. 3966.

244. Агранович В., Гартштейн Ю. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света. *Успехи физических наук*. 2006. Vol. 176. P. 1051.

245. Khankina S., Yakovenko V., Yampol'skii V. Josephson plasma oscillations in confined layered superconductors. *Low Temperature Physics*. 2012. Vol. 38, No. 3. P. 193–198.

246. Savel’ev S., Yampol’skii V., Nori F. Surface Josephson plasma waves in layered superconductors. *Physical review letters*. 2005. Vol. 95, No. 18. P. 187002.

247. Slipchenko T., Kadygrob D. V., Bogdanis D., Yampol’skii V., Krokhin A. A. Surface and waveguide Josephson plasma waves in slabs of layered superconductors. *Physical Review B*. 2011. Vol. 84, No. 22. P. 224512.

248. Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices. *Journal of applied physics*. 1993. Vol. 73, No. 5. P. 2411–2418.

249. Tachiki M., Machida M. Current understanding of Josephson plasma theory and experiments in HTSC. *Physica C: Superconductivity*. 2000. Vol. 341. P. 1493–1498.

250. Helm C., Bulaevskii L., Chudnovsky E., Maley M. Reflectivity and microwave absorption in crystals with alternating intrinsic Josephson junctions. *Physical review letters*. 2002. Vol. 89, No. 5. P. 057003.

251. Bulaevskii L., Zamora M., Baeriswyl D., Beck H., Clem J. R. Time-dependent equations for phase differences and a collective mode in Josephson-coupled layered superconductors. *Physical Review B*. 1994. Vol. 50, No. 17. P. 12831.

252. Artemenko S. N., Remizov S. Excitation of plasma oscillations during the motion of Josephson vortices in layered superconductors. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. 1997. Vol. 66, No. 12. P. 853–859.

253. Koyama T., Tachiki M. I-V characteristics of Josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations. *Physical Review B*. 1996. Vol. 54, No. 22. P. 16183.

254. Artemenko S. N., Remizov S. Stability, collective modes and radiation from sliding Josephson vortex lattice in layered superconductors. *Physica C: Superconductivity*. 2001. Vol. 362, No. 1-4. P. 200–204.

255. Kim J. H., Pokharel J. Collective Josephson vortex dynamics in long Josephson junction stacks. *Physica C: Superconductivity*. 2003. Vol. 384, No. 4. P. 425–436.

256. Machida M., Koyama T., Tanaka A., Tachiki M. Theory of the superconducting phase and charge dynamics in intrinsic Josephson-junction systems: microscopic foundation for longitudinal Josephson plasma and phenomenological dynamical equations. *Physica C: Superconductivity*. 2000. Vol. 331, No. 1. P. 85–96.

257. Bulaevskii L., Koshelev A. Radiation due to Josephson oscillations in layered superconductors. *Physical review letters*. 2007. Vol. 99, No. 5. P. 057002.

258. Ozyuzer L., Koshelev A. E., Kurter C., Gopalsami N., Li Q., Tachiki M. et al. Emission of coherent THz radiation from superconductors. *Science*. 2007. Vol. 318, No. 5854. P. 1291–1293.

259. Koshelev A. Role of in-plane dissipation in dynamics of a Josephson vortex lattice in high-temperature superconductors. *Physical Review B*. 2000. Vol. 62, No. 6. P. R3616.

260. Shafranjuk S., Tachiki M., Yamashita T. Penetration of ac fields into anisotropic layered superconductors. *Physical Review B*. 1997. Vol. 55, No. 13. P. 8425.

261. Helm C., Bulaevskii L. Optical properties of layered superconductors near the Josephson plasma resonance. *Physical Review B*. 2002. Vol. 66, No. 9. P. 094514.

262. Ryndyk D. A. Collective dynamics of intrinsic Josephson junctions in high-t c superconductors. *Physical review letters*. 1998. Vol. 80, No. 15. P. 3376.

263. Gurevich A., Tachiki M. Charge effects and Josephson plasma resonance on planar defects in high-temperature superconductors. *Physical review letters*. 1999. Vol. 83, No. 1. P. 183.

264. Helm C., Keller J., Preis C., Sergeev A. Static charge coupling of intrinsic Josephson junctions. *Physica C: Superconductivity*. 2001. Vol. 362, No. 1-4. P. 43–50.

265. Shukrinov Y. M., Mahfouzi F. Current–voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions with charge-imbalance effect. *Physica C: Superconductivity*. 2007. Vol. 460. P. 1303–1304.

266. Slichter C. Principles of magnetic resonance. Springer, 1990. P. 670.

267. Kubo R. Stochastic liouville equations. *Journal of Mathematical Physics*. 1963. Vol. 4, No. 2. P. 174–183.

268. Dykman M., Krivoglaz M. Spectral distribution of nonlinear oscillators with nonlinear friction due to a medium. *Physica Status Solidi (B)*. 1975. Vol. 68, No. 1. P. 111–123.

269. Lindenberg K., Seshadri V., West B. J. Brownian motion of harmonic systems with fluctuating parameters: Iii scaling and moment instabilities. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1981. Vol. 105, No. 3. P. 445–471.

270. Mandel L., Wolf E. Optical coherence and quantum optics. Cambridge University Press, 1995. P. 1194.

271. Dykman M., Krivoglaz M. Theory of nonlinear oscillator interacting with a medium. *Soviet Physics Reviews*. 1984. Vol. 5. P. 265–442.

272. Иванов М., Квашина Л., Кривоглаз М. Спектральное распределение локальных колебаний. *Физика твердого тела*. 1965. Т. 7, № 7. С. 2047.

273. Elliott R. J., Hayes W., Jones G., Macdonald H., Sennett C. Localized vibrations of H- and D-ions in the alkaline earth fluorides. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1965. Vol. 289, No. 1416. P. 1–33.

274. Feynman R. P., Hibbs A. R., Styer D. F. Quantum mechanics and path integrals. Courier Corporation, 2010. P. 384.

275. Peil S., Gabrielse G. Observing the quantum limit of an electron cyclotron: QND measurements of quantum jumps between Fock states. *Physical Review Letters*. 1999. Vol. 83, No. 7. P. 1287.

276. Anderson P. A mathematical model for the narrowing of spectral lines by exchange or motion. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1954. Vol. 9, No. 3. P. 316–339.

277. Banaszek K., Wódkiewicz K. Direct probing of quantum phase space by photon counting. *Physical review letters*. 1996. Vol. 76, No. 23. P. 4344.

278. Anderson P.-W., Weiss P. Exchange narrowing in paramagnetic resonance. *Reviews of Modern Physics*. 1953. Vol. 25, No. 1. P. 269.

279. W. Anderson P. A mathematical model for the narrowing of spectral lines by exchange or motion. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1954. Vol. 9, No. 3. P. 316–339.

280. Grabovskij G. J., Peichl T., Lisenfeld J., Weiss G., Ustinov A. V. Strain tuning of individual atomic tunneling systems detected by a superconducting qubit. *Science*. 2012. Vol. 338, No. 6104. P. 232–234.

281. Walls D. F., Milburn G. J. Quantum optics. Springer, 2007.

282. Carmichael H. J. Statistical methods in quantum optics 2: Non-classical fields. Springer, 2009.

283. Lifshitz R., Cross M. Response of parametrically driven nonlinear coupled oscillators with application to micromechanical and nanomechanical resonator arrays. *Physical Review B*. 2003. Vol. 67, No. 13. P. 134302.

284. Karabalin R., Cross M., Roukes M. Nonlinear dynamics and chaos in two coupled nanomechanical resonators. *Physical Review B*. 2009. Vol. 79, No. 16. P. 165309.

285. Wallraff A., Schuster D. I., Blais A., Frunzio L., Huang R.-S., Majer J. et al. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature*. 2004. Vol. 431, No. 7005. P. 162–167.

286. Dykman M. Fluctuating nonlinear oscillators: from nanomechanics to quantum superconducting circuits. Oxford: Oxford University Press, 2012.

287. Zwanzig R. Nonequilibrium statistical mechanics. Oxford: Oxford University Press, 2001.

288. Karplus R., Schwinger J. A note on saturation in microwave spectroscopy. *Physical Review*. 1948. Vol. 73, No. 9. P. 1020.

289. Landau L. D., Lifshitz E. M. Mechanics, 3rd ed. Amsterdam: Elsevier, 2004.

290. Arnold V. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. 2nd edn. Fundamental principles of mathematical sciences. 1988.

291. Lifshitz E., Landau L. Quantum Mechanics; Non-relativistic Theory. Oxford: Pergamon Press, 1965.

292. Dykman M. Critical exponents in metastable decay via quantum activation. *Physical Review E*. 2007. Vol. 75, No. 1. P. 011101.

293. Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random perturbations. Random perturbations of dynamical systems. Springer, 1998. P. 15–43.

294. Graham R., Tél T. Existence of a potential for dissipative dynamical systems. *Physical review letters*. 1984. Vol. 52, No. 1. P. 9.

295. Kramers H. A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*. 1940. Vol. 7, No. 4. P. 284–304.

296. Quintana C., Petersson K., McFaul L., Srinivasan S., Houck A. A., Petta J. R. Cavity-mediated entanglement generation via Landau-Zener interferometry. *Physical review letters*. 2013. Vol. 110, No. 17. P. 173603.

297. Ibach H., Lueth H. Solid-state physics. An introduction to principles of materials science. 4. ext. upd. and enl. ed. Springer, 2009.

298. Makarov N., Moroz A., Yampol’skii V. Classical and quantum size effects in electron conductivity of films with rough boundaries. *Physical Review B*. 1995. Vol. 52, No. 8. P. 6087.

299. B-locki J., Randrup J., Światecki W., Tsang C. Proximity forces. *Annals of Physics*. 1977. Vol. 105, No. 2. P. 427–462.

300. Decca R., Lopez D., Fischbach E., Klimchitskaya G., Krause D., Mostepanenko V. Tests of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between two gold-coated plates. *Physical Review D*. 2007. Vol. 75, No. 7. P. 077101.

301. Katori H., Ido T., Isoya Y., Kuwata-Gonokami M. Magneto-optical trapping and cooling of strontium atoms down to the photon recoil temperature. *Physical Review Letters*. 1999. Vol. 82, No. 6. P. 1116.

302. Bradley T. D., Wang Y., Alharbi M., Debord B., Fourcade-Dutin C., Beaudou B. et al. Optical properties of low loss (70 dB/km) hypocycloid-core Kagome hollow core photonic crystal fiber for Rb and Cs based optical applications. *Journal of Lightwave Technology*. 2013. Vol. 31, No. 16. P. 2752–2755.

303. Debord B., Alharbi M., Bradley T., Fourcade-Dutin C., Wang Y., Vincetti L. et al. Hypocycloid-shaped hollow-core photonic crystal fiber. Part I: Arc curvature effect on confinement loss. *Optics Express*. 2013. Vol. 21, No. 23. P. 28597–28608.

304. Steane A., Chowdhury M., Foot C. Radiation force in the magneto-optical trap. *JOSA B*. 1992. Vol. 9, No. 12. P. 2142–2158.

305. Friebel S., D'Andrea C., Walz J., Weitz M., Hänsch T. CO_2-laser optical lattice with cold rubidium atoms. *Physical Review A*. 1998. Vol. 57, No. 1. P. R20.

306. Pang M., Jin W. A hollow-core photonic bandgap fiber polarization controller. *Optics letters*. 2011. Vol. 36, No. 1. P. 16–18.

307. Baillard X., Fouché M., Le Targat R., Westergaard P. G., Lecallier A., Le Coq Y. et al. Accuracy evaluation of an optical lattice clock with bosonic atoms. *Optics Letters*. 2007. Vol. 32, No. 13. P. 1812–1814.

308. Barber Z. W., Hoyt C. W., Oates C. W., Hollberg L., Taichenachev A. V., Yudin V. I. Direct excitation of the forbidden clock transition in neutral ^{174}Yb atoms confined to an optical lattice. *Physical Review Letters*. 2006. Vol. 96, No. 8. P. 083002.

309. Lisdat C., Winfred J. V., Middelmann T., Riehle F., Sterr U. Collisional losses, decoherence, and frequency shifts in optical lattice clocks with bosons. *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 103, No. 9. P. 090801.

310. Bishof M., Lin Y., Swallows M. D., Gorshkov A. V., Ye J., Rey A. M. Resolved atomic interaction sidebands in an optical clock transition. *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106, No. 25. P. 250801.

311. Westergaard P. G., Lodewyck J., Lorini L., Lecallier A., Burt E., Zawada M. et al. Lattice-induced frequency shifts in Sr optical lattice clocks at the 10-17 level. *Physical review letters*. 2011. Vol. 106, No. 21. P. 210801.

312. Lodewyck J., Westergaard P. G., Lemonde P. Nondestructive measurement of the transition probability in a Sr optical lattice clock. *Physical Review A*. 2009. Vol. 79, No. 6. P. 061401.

313. Bjorklund G. C., Levenson M., Lenth W., Ortiz C. Frequency modulation (fm) spectroscopy. *Applied Physics B*. 1983. Vol. 32, No. 3. P. 145–152.

314. Wiseman H. M., Milburn G. J. Quantum measurement and control. *Press, Cambridge*. 2010.

315. Itano W. M., Bergquist J. C., Bollinger J. J., Gilligan J., Heinzen D., Moore F. et al. Quantum projection noise: Population fluctuations in two-level systems. *Physical Review A*. 1993. Vol. 47, No. 5. P. 3554.

316. Scully M. O. Collective Lamb shift in single photon dicke superradiance. *Physical review letters*. 2009. Vol. 102, No. 14. P. 143601.

317. Gross M., Haroche S. Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission. *Physics reports*. 1982. Vol. 93, No. 5. P. 301–396.

318. Meiser D., Ye J., Carlson D., Holland M. Prospects for a millihertz-linewidth laser. *Physical review letters*. 2009. Vol. 102, No. 16. P. 163601.

319. Yu D., Chen J. Optical clock with millihertz linewidth based on a phase-matching effect. *Physical review letters*. 2007. Vol. 98, No. 5. P. 050801.

320. Kessler T., Hagemann C., Grebing C., Legero T., Sterr U., Riehle F. et al. A sub-40-mHz-linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity. *Nature Photonics*. 2012. Vol. 6, No. 10. P. 687–692.

321. Jiang Y., Ludlow A., Lemke N. D., Fox R. W., Sherman J. A., Ma L.-S., Oates C. W. Making optical atomic clocks more stable with 10-16-level laser stabilization. *Nature Photonics*. 2011. Vol. 5, No. 3. P. 158–161.

322. Bloch I. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature physics*. 2005. Vol. 1, No. 1. P. 23–30.

323. DeMille D. Quantum computation with trapped polar molecules. *Physical Review Letters*. 2002. Vol. 88, No. 6. P. 067901.

324. Lifshitz E., Pitaevskii L. Statistical Physics. Part 2. Vol. 9. Pergamon Press, Oxford, 1980. P. 387.

325. Safronova M., Porsev S., Safronova U., Kozlov M., Clark C. W. Blackbody-radiation shift in the Sr optical atomic clock. *Physical Review A*. 2013. Vol. 87, No. 1. P. 012509.

326. Le Kien F., Hakuta K. Spontaneous radiative decay of translational levels of an atom near a dielectric surface. *Physical Review A*. 2007. Vol. 75, No. 1. P. 013423.

327. Matveev K., Andreev A., Pustilnik M. Equilibration of a one-dimensional Wigner crystal. *Physical review letters*. 2010. Vol. 105, No. 4. P. 046401.

328. Lin J., Matveev K., Pustilnik M. Thermalization of acoustic excitations in a strongly interacting one-dimensional quantum liquid. *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110, No. 1. P. 016401.

329. Levchenko A., Micklitz T., Ristivojevic Z., Matveev K. Interaction effects on thermal transport in quantum wires. *Physical Review B*. 2011. Vol. 84, No. 11. P. 115447.

330. Micklitz T., Levchenko A. Thermalization of nonequilibrium electrons in quantum wires. *Physical review letters*. 2011. Vol. 106, No. 19. P. 196402.

331. Karzig T., Refael G., Glazman L. I., von Oppen F. Energy partitioning of tunneling currents into Luttinger liquids. *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, No. 17. P. 176403.

332. Swartz E. T., Pohl R. O. Thermal boundary resistance. *Reviews of modern physics*. 1989. Vol. 61, No. 3. P. 605.

333. Iucci A., Cazalilla M. Quantum quench dynamics of the Luttinger model. *Physical Review A*. 2009. Vol. 80, No. 6. P. 063619.

334. Mitra A., Giamarchi T. Thermalization and dissipation in out-of-equilibrium quantum systems: A perturbative renormalization group approach. *Physical Review B*. 2012. Vol. 85, No. 7. P. 075117.

335. Foster M. S., Berkelbach T. C., Reichman D. R., Yuzbashyan E. A. Quantum quench spectroscopy of a Luttinger liquid: Ultrarelativistic density wave dynamics due to fractionalization in an XXZ chain. *Physical Review B*. 2011. Vol. 84, No. 8. P. 085146.

336. Rosch A., Andrei N. Conductivity of a clean one-dimensional wire. *Physical review letters*. 2000. Vol. 85, No. 5. P. 1092.

337. Sirker J., Pereira R. G., Affleck I. Conservation laws, integrability, and transport in one-dimensional quantum systems. *Physical Review B*. 2011. Vol. 83, No. 3. P. 035115.

338. Karrasch C., Ilan R., Moore J. Nonequilibrium thermal transport and its relation to linear response. *Physical Review B*. 2013. Vol. 88, No. 19. P. 195129.

339. Polkovnikov A., Sengupta K., Silva A., Vengalattore M. Colloquium: Nonequilibrium dynamics of closed interacting quantum systems. *Reviews of Modern Physics*. 2011. Vol. 83, No. 3. P. 863.

340. Winful H. G., Ngom M., Litchinitser N. M. Relation between quantum tunneling times for relativistic particles. *Physical Review A*. 2004. Vol. 70, No. 5. P. 052112.

341. Tworzyd‑lo J., Trauzettel B., Titov M., Rycerz A., Beenakker C. W. Sub-poissonian shot noise in graphene. *Physical review letters*. 2006. Vol. 96, No. 24. P. 246802.

342. Hau L. V., Harris S. E., Dutton Z., Behroozi C. H. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*. 1999. Vol. 397, No. 6720. P. 594–598.

343. Savel'ev S., Rakhmanov A., Yampol'skii V., Nori F. Analogues of nonlinear optics using terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors. *Nature Physics*. 2006. Vol. 2, No. 8. P. 521–525.

344. Pereira Jr J. M., Mlinar V., Peeters F., Vasilopoulos P. Confined states and direction-dependent transmission in graphene quantum wells. *Physical Review B*. 2006. Vol. 74, No. 4. P. 045424.

345. Zhou S., Gweon G.-H., Graf J., Fedorov A., Spataru C., Diehl R. et al. First direct observation of dirac fermions in graphite. *Nature physics*. 2006. Vol. 2, No. 9. P. 595–599.

346. Banerjee S., Sardar M., Gayathri N., Tyagi A., Raj B. Enhanced conductivity in graphene layers and at their edges. *Applied Physics Letters*. 2006. Vol. 88, No. 6. P. 062111.

347. Neto A. C., Guinea F., Peres N. Edge and surface states in the quantum Hall effect in graphene. *Physical Review B*. 2006. Vol. 73, No. 20. P. 205408.

348. Nomura K., MacDonald A. H. Quantum transport of massless Dirac fermions. *Physical review letters*. 2007. Vol. 98, No. 7. P. 076602.

349. Koshelev A., Aranson I. Dynamic structure selection and instabilities of driven Josephson lattice in high-temperature superconductors. *Physical Review B*. 2001. Vol. 64, No. 17. P. 174508.

350. Latyshev Y. I., Koshelev A., Bulaevskii L. Probing quasiparticle dynamics in $\mathrm{Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}}$ with a driven Josephson vortex lattice. *Physical Review B*. 2003. Vol. 68, No. 13. P. 134504.

351. Maystre D. Theory of Wood's anomalies. Plasmonics. Springer, 2012. P. 39–83.

352. Sarychev A. K., Shalaev V. M. Electrodynamics of metamaterials. Singapore: World Scientific, 2007.

353. Izrailev F. M., Krokhin A. A., Makarov N. Anomalous localization in low-dimensional systems with correlated disorder. *Physics Reports*. 2012. Vol. 512, No. 3. P. 125–254.

354. Markos P., Soukoulis C. M. Wave propagation: from electrons to photonic crystals and left-handed materials. Princeton: Princeton University Press, 2008.

355. Rakhmanov A., Yampol'skii V., Fan J., Capasso F., Nori F. Layered superconductors as negative-refractive-index metamaterials. *Physical Review B*. 2010. Vol. 81, No. 7. P. 075101.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. Maizelis Z. A., Roukes M. L., Dykman M. I. Detecting and characterizing frequency fluctuations of vibrational modes. *Phys. Rev. B*. 2011. Vol. 84, No. 14. P. 144301. Квартиль Q1.

2. Maizelis Z. A. Electromechanical resonator under the influence of telegraph unbalanced frequency noise. *Telecomm. Radio. Eng.*. 2016. Vol. 75, No. 9. C. 811–821. Квартиль Q3.

3. Sun F., Zou J., Maizelis Z. A., Chan H. B. Telegraph frequency noise in electromechanical resonators. *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 91, No. 17. P. 174102. Квартиль Q1.

4. Maizelis Z., Rudner M., Dykman M. I. Vibration multistability and quantum switching for dispersive coupling. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 89, No. 15. P. 155439. Квартиль Q1.

5. Shumaev A. I., Maizelis Z. A. Distribution functions of argumental oscillations of the Duboshinskiy pendulum. *J. Appl. Phys*. 2017. Vol. 121, No. 15. P. 154902. Квартиль Q2.

6. Yampol’skii V. A., Savel’ev S., Mayselis Z. A., Apostolov S. S., Nori F. Anomalous temperature dependence of the Casimir force for thin metal films. *Phys. Rev. Lett*. 2008. Vol. 101, No. 9. P. 096803. Квартиль Q1.

7. Yampol’skii V. A., Savel’ev S., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Nori F.

Temperature dependence of the Casimir force for bulk lossy media. *Phys. Rev. A*. 2010. Vol. 82, No. 3. P. 032511. Квартиль Q1.

8. Okaba S., Takano T., Benabid F., Bradley T., Vincetti L., Maizelis Z., Yampol'skii V., Nori F., Katori H. Lamb-Dicke spectroscopy of atoms in a hollow-core photonic crystal fibre. *Nature Comm*. 2014. Vol. 5, No. 1. P. 4096. Квартиль Q1.

9. Apostolov S., Liu D.E., Maizelis Z., Levchenko A. Thermal transport and quench relaxation in nonlinear Luttinger liquids. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88, No. 4. P. 045435. Квартиль Q1.

10. Yampol'skii V. A., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Levchenko A., Nori F. Voltage-driven quantum oscillations of conductance in graphene. *Europhys. Lett.*. 2011. Vol. 96, No. 6. P. 67009. Квартиль Q1.

11. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Pérez-Rodríguez F., Rokhmanova T. N., Yampol'skii V. A. Transmission of terahertz waves through layered superconductors controlled by a dc magnetic field. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 94, No. 2. P. 024513. Квартиль Q1.

12. Apostolov S. S., Kadygrob D. V., Maizelis Z. A., Rokhmanova T. N., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Localized waves in layered superconductors. *Telecomm. Radio. Eng.*. 2019. Vol. 78, No. 7. P. 615–631. Квартиль Q3.

13. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Shimkiv D. V., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Anomalous dispersion of oblique terahertz waves localized in the plate of a layered superconductor. *Low Temp. Phys*. 2019. Vol. 45, No. 8. P. 885–893. Квартиль Q3.

14. Mazanov M. V., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Resonant absorption of terahertz waves in layered superconductors: Wood's anomalies and anomalous dispersion. *Phys. Rev. B*. 2020. Vol. 101, No. 2. P. 024504. Квартиль Q1.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

15. Yampol'skii V. A., Savel'ev S., Mayselis Z. A., Apostolov S. S., Nori F.

Anomal Temperature Dependence of the Casimir Force for Thin Metal Films. *Modern Challenges in Microwave Superconductivity, Photonics and Electronics*: Proceedings of Mini-Colloquium and International Workshop, Kharkiv, Ukraine, 11–12 June 2009. Kharkiv, 2009. С. 23.

16. Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А., Савельев С. Е., Nori F. Немонотонная температурная зависимость силы Казимира для металлических нанопленок. *НТ-35*: тезисы докладов XXXV Совещания по физике низких температур, г. Черноголовка, Россия, 29 сентября – 9 октября 2009 г.. Черноголовка, 2009. С. 220.

17. Апостолов С. С., Майзелис З. А., Ямпольский В. А., Савельев С. Е., Nori F. Температурная зависимость силы казимировского притяжения металлических пластин конечных размеров. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали IX міжнародної конференції (м. Харків, 1–4 груд. 2009 р.). Харків, 2009. С. 31.

18. Майзелис З. А. Тристабильность колебательной моды, связанной с двухуровневой системой. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XI міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 3–6 грудня 2013 р.) Харків, 2013. С. 1.

19. Majzelis Z. O., Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Applying a DC Magnetic Field as a way to Control the Reflectance of Layered Superconductors. *ICPS 2014*: Proceedings of International Conference of Physics Students, Heidelberg, Germany, 10–17 August, 2014. Kharkiv, 2014. С. 22.

20. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Reflectivity of semi-infinite layered superconductors in presence of external dc magnetic field. *Radiophysics, Electronics, Photonics and Biophysics* Proceedings of 14th Kharkiv Young Scientist Conference, Kharkiv, Ukraine, 14–17 October 2014. Kharkiv, 2014. С. 1.

21. Sun F., Zou J., Maizelis Z., Chan H. B. Characterizing Random Telegraph Frequency Noise in a Micromechanical Oscillator. *APS March Meeting 2014*: Bulletin of the American Physical Society, Denver, Colorado, USA, 3–7 March, 2014 Denver,

2014. С. S24.00005.

22. Rokhmanova T. N., Maizelis Z. A., Apostolov S. S., Yampol'skii V. A. Transparency of finite-thickness layered superconductors controlled by DC magnetic field. *Open Readings 2015*: Proceedings of 58th Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences, Vilnius, Lithuania, 24–27 March, 2015. Lithuania, 2015. С. 64.

23. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Effect of DC Magnetic Field on Reflectivity of Layered Superconductors. *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves*: Proceedings of 9th International Kharkiv Symposium, Kharkiv, Ukraine, 21–24 June, 2016. Kharkiv, 2016. С. 21.

24. Rokhmanova T. N., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. Transmittance of THz Waves Through Finite-thickness Layered Superconductors in the Presence of External DC Magnetic Field. *Applied Physics and Engineering – 2016*: Proceedings of International Young Scientists Forum, Kharkiv, Ukraine, 10–14 October, 2016. Kharkiv, 2016. С. 23.

25. Рохманова Т. Н., Майзелис З. А., Апостолов С. С., Перес-Родригес Ф., Макаров Н. М., Ямпольский В. А. Отражение, прохождение и трансформация поляризации волн в слоистых сверхпроводниках. *Current problems in Solid State Physics*: Proceedings of International Jubilee Seminar, Kharkov, Ukraine, 22–23 November, 2016. Kharkiv, 2016. С. 40–41.

26. Rokhmanova T., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A. DC magnetic field control of wave transformation in layered superconductors. *Фізичні явища в твердих тілах*: матеріали XIII міжнародної конференції (м. Харків, Україна, 5–8 грудня 2017 р.). Харків, 2017. С. 39.

27. Shymkiv D. V., Rokhmanova T., Maizelis Z. A., Kadygrob D. V., Apostolov S. S. Oblique localized Josephson plasma waves in a plate of layered superconductor. *Clusters and Nanostructured Materials (CNM-5)*: Proceedings of International meeting, Uzhgorod, Ukraine, 22–26 October 2018 Uzhgorod, 2018. С. 88–

90.

28. Mazanov M. V., Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Makarov N. M., Shmat'ko A. A., Yampol'skii V. A. Resonant absorption of electromagnetic waves accompanied by localized modes with anomalous dispersion in layered superconductors. *Low temperature physics – 2019*: Proceedings of 8th International Conference for for Professionals and Young Scientists, Kharkiv, Ukraine, 3–7 June 2019 Kharkiv, 2019. C. 83.